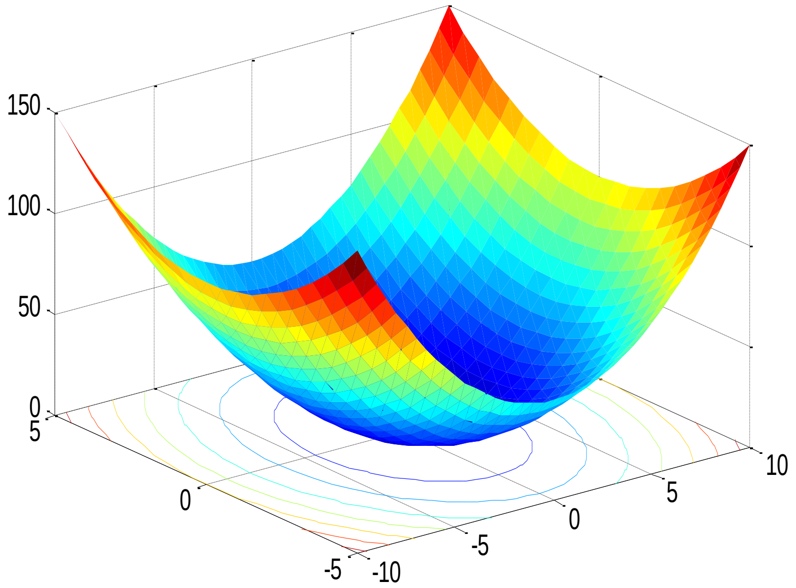
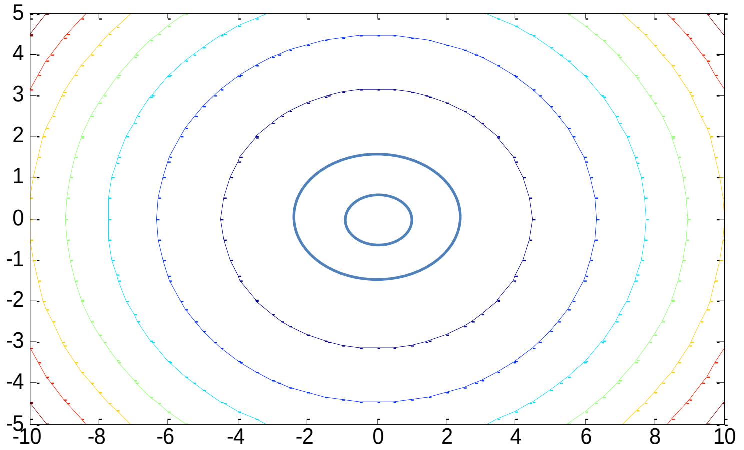
Otimização Não-Linear Irrestrita

Busca Multidimensional





Otimização Não-Linear Irrestrita

Busca Multidimensional – Métodos de Newton

Como na Busca Unidimensional, no Método de Newton a função $f(\underline{x})$ é aproximada localmente por uma função quadrática, obtida pela expansão em Série de Taylor de $f(\underline{x})$, que é então minimizada, ou seja:

$$\tilde{f}(\underline{x}) \approx f(\underline{x}^k) + \nabla f(\underline{x}^k)(\underline{x} - \underline{x}^k) + \tfrac{1}{2}(\underline{x} - \underline{x}^k)\,\nabla^2 f(\underline{x}^k)\,(\underline{x} - \underline{x}^k)$$

Desse modo, a partir da condição de otimalidade ($\nabla f(\underline{x})$=0) aplicada à aproximação quadrática, determina-se o passo de otimização:

$$\underline{x}^{k+1} = \underline{x}^k - \left(\nabla^2 f(\underline{x}^k)\right)^{-1} . \nabla f(\underline{x}^k)$$

Otimização Não-Linear Irrestrita

Algoritmo do Método de Newton para Busca Multidimensional

(1) Fazer k=0 e determinar uma solução inicial ($\underline{x}^{(k)}$)

(2) Calcular o Gradiente da Função Objetivo em $\underline{x}^{(k)}$

$$\nabla f(\underline{x}^{(k)}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\underline{x}=\underline{x}^{(k)}}$$

(3) Se: $\|\nabla_x f(\underline{x}^{(k)})\| <$ precisão $\Rightarrow$ $\underline{x}^* = \underline{x}^{(k)}$ $\Rightarrow$ (FIM)

Senão: Calcular a Matriz Hessiana: H($\underline{x}^k$) = $\nabla^2 f(\underline{x}^k)$

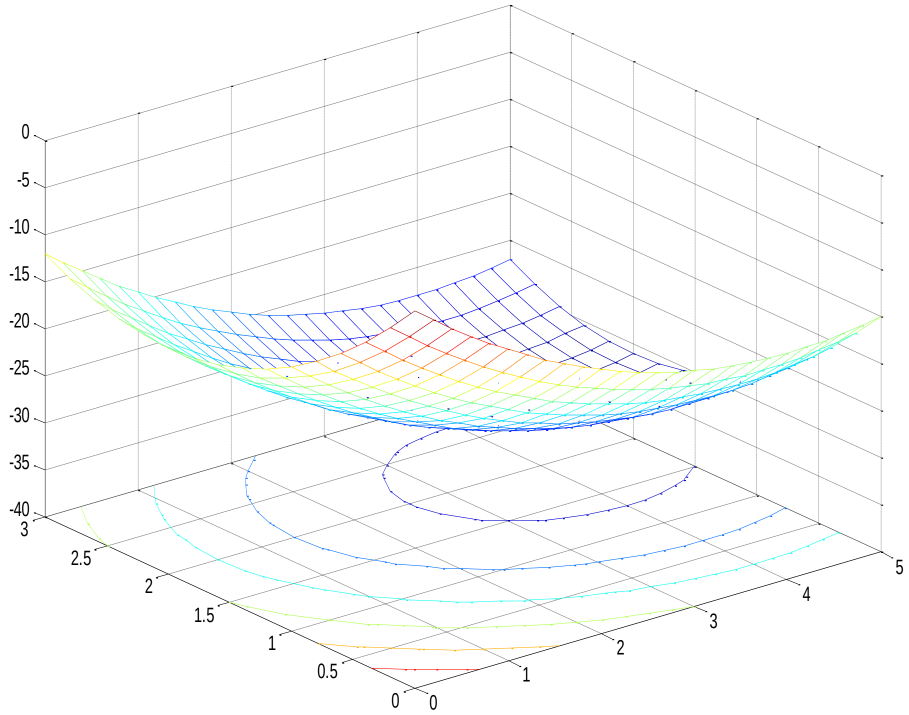
(4) Determinar o novo ponto: $\underline{x}^{k+1} = \underline{x}^k - \left(\mathrm{H}(\underline{x}^k)\right)^{-1} . \nabla f(\underline{x}^k)$

(5) Fazer k = k+1 e voltar para (2)

Otimização Não-Linear Irrestrita

Método de Newton - Exemplo

Minimizar $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 - 8x_1 - 16x_2$



Otimização Não-Linear Irrestrita

Método de Newton - Exemplo Minimizar $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 - 8x_1 - 16x_2$

1ª. iteração

(1) Adotando $\underline{x}^0 = [\ 0 \quad 0\ ]$ e *precisão* = 0.01

(2) Calculando o Gradiente de f :

$$\nabla f(\underline{x}^0) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 8 \\ 8x_2 - 16 \end{bmatrix}_{\underline{x}=\underline{x}^0} = \begin{bmatrix} -8 \\ -16 \end{bmatrix}$$

(3) Como $\|\nabla_x f(\underline{x}^0)\| >$ *precisão* , determina-se a Matriz Hessiana H($\underline{x}$):

$$\mathrm{H}\left(\underline{x}^0\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f(\underline{x}^0)}{\partial x_1 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(\underline{x}^0)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f(\underline{x}^0)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(\underline{x}^0)}{\partial x_2 \partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

(4) Logo:

$$\underline{x}^1 = \underline{x}^0 - \left(\mathrm{H}(\underline{x}^0)\right)^{-1} . \nabla f\left(\underline{x}^0\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -8 \\ -16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Otimização Não-Linear Irrestrita

Método de Newton - Exemplo Minimizar $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 - 8x_1 - 16x_2$

2ª. iteração

(2) Calculando o Gradiente de f :

$$\nabla f(\underline{x}^1) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 8 \\ 8x_2 - 16 \end{bmatrix}_{\underline{x}=\underline{x}^1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(3) como $\|\nabla_x f(\underline{x}^1)\| < precisão$ $\Rightarrow$ (FIM) $\Rightarrow$ $\underline{x}^* = \underline{x}^{(1)} = [4 \quad 2]$

Otimização Não-Linear Irrestrita

Método de Newton

Generalização para Quadráticas:

Seja:

$$f(\underline{x}) = \frac{1}{2}\,\underline{x}^t.Q.\underline{x} - \underline{x}^t.B + C$$

Então:

$$\nabla f(\underline{x}) = Q.\underline{x} - B$$

$$\mathrm{H}(\underline{x}) = Q$$

Logo:

$$\left.\begin{array}{l} \underline{x}^1 = \underline{x}^0 - \left(\mathrm{H}(\underline{x}^0)\right)^{-1}.\nabla f(\underline{x}^0) = \underline{x}^0 - Q^{-1}(Q.\underline{x}^0 - B) = Q^{-1}.B \\ \\ \text{Como, para ótimo: } \nabla f(\underline{x}^*) = 0 \;\rightarrow\; Q.\underline{x}^* - B = 0 \;\rightarrow\; \underline{x}^* = Q^{-1}.B \end{array}\right\} \quad \underline{x}^1 = \underline{x}^*$$

Otimização Não-Linear Irrestrita

<u>Considerações quanto aos Métodos de Busca Multidimensional</u>

Acrescentando-se um parâmetro de busca α ao Método de Newton:

$$\underline{x}^{k+1} = \underline{x}^{k} - \alpha\left(\mathrm{H}\left(\underline{x}^{k}\right)\right)^{-1}.\nabla f\left(\underline{x}^{k}\right) \quad \text{p/ } \alpha > 0$$

E tratando $\mathrm{H}\left(\underline{x}^{k}\right)$ como S^k :

$$\underline{x}^{k+1} = \underline{x}^{k} - \alpha.\left(S^{k}\right)^{-1}.\nabla f\left(\underline{x}^{k}\right)$$

Observar que, se:
$$\begin{cases} S^k = \mathrm{I} \;\Rightarrow\; \text{Método do Gradiente} \\ S^k = \mathrm{H}\left(\underline{x}^{k}\right) \text{ e } \alpha = 1 \Rightarrow \text{Método de Newton} \\ S^k = \mathrm{H}\left(\underline{x}^{0}\right) \;\Rightarrow\; \text{Método de Newton “constante”} \end{cases}$$

Método do Gradiente → Métodos Conjugados → Métodos Quasi-Newton → Método de Newton