Otimização Não-Linear Restrita

De forma geral, um problema de otimização pode ser descrito por:

Minimizar $f(\underline{x})$

Sujeito a $\underline{h}(\underline{x}) = 0$

$\underline{g}(\underline{x}) \leq 0$

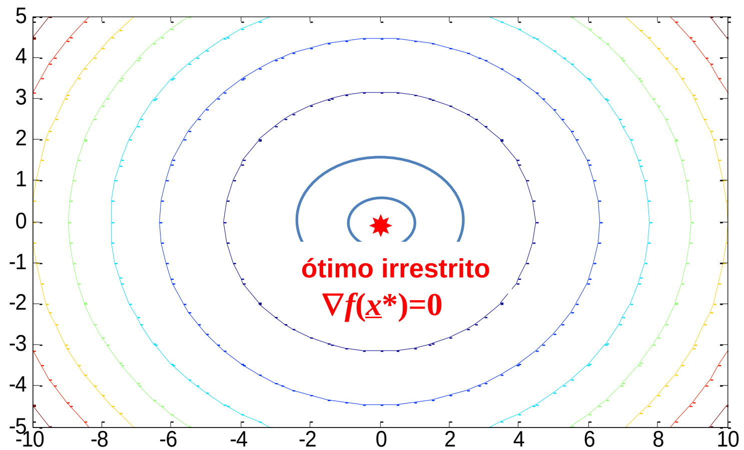
$\underline{x} \in \Omega$

- Assim como visto nos POL, um ponto $\underline{x} \in \Omega$ que satisfaça as restrições é denominado Ponto Factível (ou Viável).

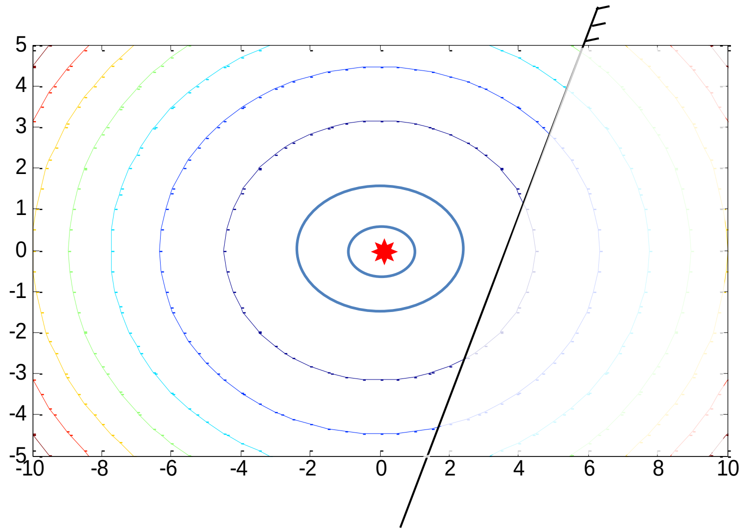
- No espaço das soluções factíveis, uma restrição de desigualdade pode ser:
  - Ativa, quando $g_i(\underline{x}) = 0$, ou;
  - Inativa, quando $g_i(\underline{x}) < 0$

Otimização Não-Linear Restrita

Considerações Gerais



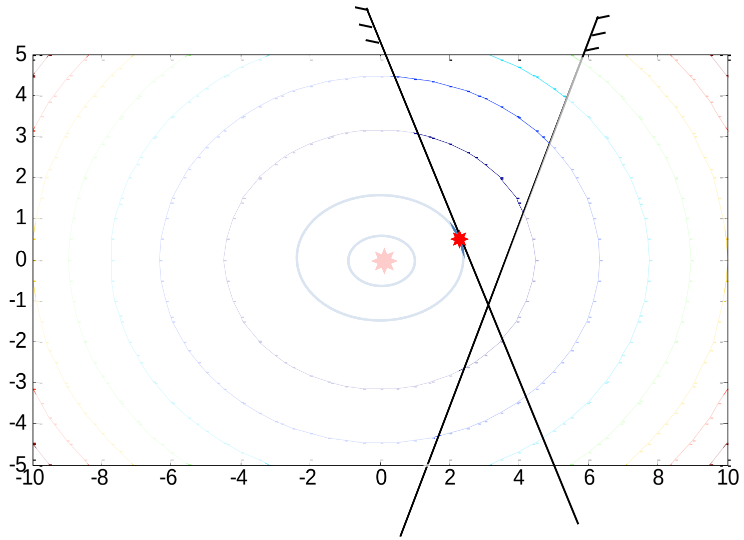
Otimização Não-Linear Restrita



Restrição não ativa $\Rightarrow$ *solução não muda*

Otimização Não-Linear Restrita

Considerações Gerais

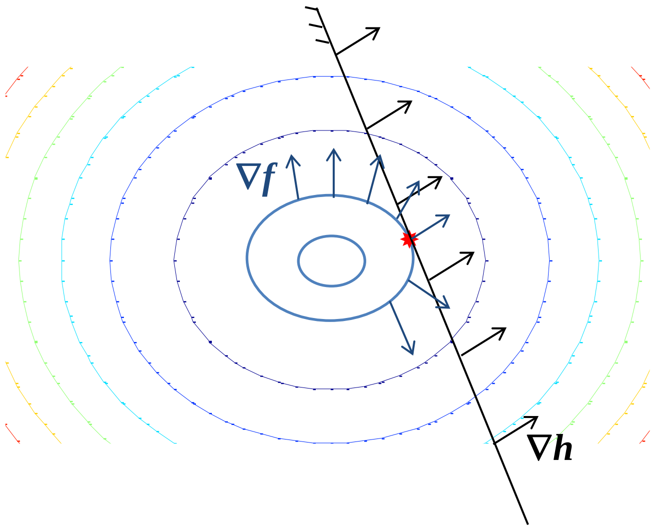


Restrição ativa ⇒ solução muda (e ocorre sobre a restrição)

↳ *logo, restrição de ≤ se torna de =*

Otimização Não-Linear Restrita

Condições de otimalidade de 1ª ordem (considerando restrições de igualdade):



Obs.: no ótimo $\nabla \boldsymbol{h}$ é colinear a $\nabla \boldsymbol{f}$

Teorema de Lagrange:
Seja $\underline{x}$* um ponto extremo de $f(\underline{x})$ sujeito às restrições $\underline{h}(\underline{x})$. Então, existe um vetor λ tal que:

$$\nabla f(\underline{x}^*) + \underline{\lambda}^t . \nabla h(\underline{x}^*) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \nabla[f(\underline{x}^*) + \underline{\lambda}^t . h(\underline{x}^*)] = 0$$

Otimização Não-Linear Restrita

<u>Condições de otimalidade de 1ª ordem</u> (considerando restrições de igualdade):

Assim, as condições necessárias de 1ª ordem, considerando restrições de igualdade são dadas por:

$$\begin{cases} \nabla\left(f(\underline{x}) + \underline{\lambda}^t . \underline{h}(\underline{x})\right) = \underline{0} \\ \underline{h}(\underline{x}) = \underline{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla\mathcal{L}(\underline{x}, \underline{\lambda}) = \underline{0} \\ \underline{h}(\underline{x}) = \underline{0} \end{cases}$$

Logo, define-se a **Função Lagrangeana** do problema:

$$\mathcal{L}(\underline{x}, \underline{\lambda}) = f(\underline{x}) + \underline{\lambda}^t . \underline{h}(\underline{x})$$

onde, λ é o *Multiplicador de Lagrange*

Otimização Não-Linear Restrita

Condições de otimalidade de 1ª ordem - Exemplo

Min $f(x_1, x_2, x_3) = 400(x_1)^2 + 800(x_2)^2 + 1600(x_3)^2 + 200x_1x_2 + 400x_2x_3$

s.a. $10x_1 + 10x_2 + 15x_3 = 12$

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$

Na forma padrão:

Min $f(\underline{x})$

s.a. $h_1(\underline{x}) = 10x_1 + 10x_2 + 15x_3 - 12 = 0$

$h_2(\underline{x}) = x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0$

Assim, o Lagrangeano do problema fica:

$$\mathcal{L}(\underline{x}, \underline{\lambda}) = f(x_1, x_2, x_3) + \lambda_1 . h_1(x_1, x_2, x_3) + \lambda_2 . h_2(x_1, x_2, x_3)$$

$$= f(\underline{x}) + [\lambda_1 \quad \lambda_2] \begin{bmatrix} h_1(\underline{x}) \\ h_2(\underline{x}) \end{bmatrix}$$

Otimização Não-Linear Restrita

Condições de otimalidade de 1ª ordem - Exemplo

Min $f(x_1, x_2, x_3) = 400(x_1)^2 + 800(x_2)^2 + 1600(x_3)^2 + 200x_1x_2 + 400x_2x_3$

s.a. $h_1(\underline{x}) = 10x_1 + 10x_2 + 15x_3 - 12 = 0$

$h_2(\underline{x}) = x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0$

A partir das condições necessárias, chega-se ao seguinte conjunto de equações:

$$\nabla_x \mathcal{L} = 0 \begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_1} + \lambda_1 \dfrac{\partial h_1(\underline{x})}{\partial x_1} + \lambda_2 \dfrac{\partial h_2(\underline{x})}{\partial x_1} = 800x_1 + 200x_2 + 10\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_2} + \lambda_1 \dfrac{\partial h_1(\underline{x})}{\partial x_2} + \lambda_2 \dfrac{\partial h_2(\underline{x})}{\partial x_2} = 1600x_2 + 200x_1 + 400x_3 + 10\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial f(\underline{x})}{\partial x_3} + \lambda_1 \dfrac{\partial h_1(\underline{x})}{\partial x_3} + \lambda_2 \dfrac{\partial h_2(\underline{x})}{\partial x_3} = 3200x_3 + 400x_2 + 15\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

$$\nabla_\lambda \mathcal{L} = 0 \begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = 0 \Rightarrow h_1(\underline{x}) = 10x_1 + 10x_2 + 15x_3 - 12 = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = 0 \Rightarrow h_2(\underline{x}) = x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0 \end{cases}$$

(n + m) equações a (n + m) incógnitas

n = nº. variáveis
m = nº restrições

Otimização Não-Linear Restrita

Condições de otimalidade de 1ª ordem - Exemplo

Min $f(x_1, x_2, x_3) = 400(x_1)^2 + 800(x_2)^2 + 1600(x_3)^2 + 200x_1x_2 + 400x_2x_3$

s.a. $h_1(\underline{x}) = 10x_1 + 10x_2 + 15x_3 - 12 = 0$

$h_2(\underline{x}) = x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0$

Resolvendo o sistema de equações resultante:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 800x_1 + 200x_2 \qquad\qquad + 10\lambda_1 + \lambda_2 &=& 0 \\ 200x_1 + 1600x_2 + 400x_3 + 10\lambda_1 + \lambda_2 &=& 0 \\ 400x_2 + 3200x_3 + 15\lambda_1 + \lambda_2 &=& 0 \\ 10x_1 + 10x_2 + 15x_3 &=& 12 \\ x_1 + x_2 + x_3 &=& 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1^* = 0{,}5 \\ x_2^* = 0{,}1 \\ x_3^* = 0{,}4 \\ \lambda_1^* = -180 \\ \lambda_2^* = 1380 \end{array}\right.$$

$f^* = 390$

Otimização Não-Linear Restrita

Condições de otimalidade de 1ª ordem - Exemplo

Min $f(x_1, x_2, x_3) = 400(x_1)^2 + 800(x_2)^2 + 1600(x_3)^2 + 200x_1x_2 + 400x_2x_3$

s.a. $h_1(\underline{x}) = 10x_1 + 10x_2 + 15x_3 - 12 = 0$

$h_2(\underline{x}) = x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0$

Significado do Multiplicador de Lagrange (λ):

Indica o quanto a Função Objetivo é alterada em função de modificações na restrição respectiva, representando assim, o "custo" marginal ou incremental ("*shadow price*") do problema.

No exemplo, se o limite para $h_1(x)$ passar de 12 para 12.1, ou seja $h_1(x)$ passar a ser:

$$h'_1(\underline{x}) = 10x_1 + 10x_2 + 15x_3 - 12.1 = 0$$

A nova solução passa a ser, aproximadamente:

$$(f^*)' \approx f^* + (12 - 12.1)\,\lambda_1$$

$$\approx 390 + (-0.1)\,(-180) = 408$$