Otimização Não-Linear Restrita

De forma geral, um problema de otimização pode ser descrito por:

Minimizar $f(\underline{x})$

Sujeito a $\underline{h}(\underline{x}) = 0$

$\underline{g}(\underline{x}) \leq 0$

$\underline{x} \in \Omega$

Como visto, as condições necessárias de 1ª ordem, considerando apenas restrições de igualdade proporcionam o sistema de equações que define o ótimo restrito:

$$\left\{\begin{array}{l} \nabla_x \mathcal{L}(\underline{x}, \underline{\lambda}) = \underline{0} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} \end{array}\right. \\ \nabla_\lambda \mathcal{L}(\underline{x}, \underline{\lambda}) = \underline{h}(\underline{x}) = \underline{0} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} h_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ h_m(\underline{x}) \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Sistema de equações de dimensão n+m
(n variáveis e m restrições de igualdade)

Otimização Não-Linear Restrita

Tratamento das Restrições de Desigualdade:
CONDIÇÕES GERAIS DE OTIMALIDADE – Condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

(1) $\nabla_x \mathcal{L} = \underline{0}$

(2) $\nabla_\lambda \mathcal{L} = \underline{h}(\underline{x}) = \underline{0}$

(3) $\underline{g}(\underline{x}) \leq \underline{0}$

(4) Condição de Folga Complementar

$$\text{p/ } i = 1,\ldots,n_g \begin{cases} \mu_i . g_i(\underline{x}) = 0 \\ \mu_i \geq 0 \end{cases}$$

E a Função Lagrangeana do problema geral de otimização fica:

$$\mathcal{L}\left(\underline{x}, \underline{\lambda}, \underline{\mu}\right) = f(\underline{x}) + \lambda_1 . h_1(\underline{x}) + \cdots + \lambda_{n_h} . h_{n_h}(\underline{x}) + \mu_1 . g_1(\underline{x}) + \cdots + \mu_{n_g} . g_{n_g}(\underline{x})$$

$$\mathcal{L}\left(\underline{x}, \underline{\lambda}, \underline{\mu}\right) = f(\underline{x}) + \sum_{i=1}^{n_h} \lambda_i . h_i(\underline{x}) + \sum_{i=1}^{n_g} \mu_i . g_i(\underline{x})$$

Otimização Não-Linear Restrita

CONDIÇÕES GERAIS DE OTIMALIDADE – Condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

Exemplo:

Min $f(x_1, x_2) = 2(x_1)^2 + (x_2)^2 + 2x_1x_2 - 10x_1 - 10x_2$

s.a. $(x_1)^2 + (x_2)^2 \leq 5$

$3x_1 + x_2 \leq 6$

Na forma padrão:

Min $f(\underline{x})$

s.a. $g_1(\underline{x}) = (x_1)^2 + (x_2)^2 - 5 \leq 0$

$g_2(\underline{x}) = 3x_1 + x_2 - 6 \leq 0$

A Função Lagrangeana do problema fica:

$$\mathcal{L}(\underline{x}, \underline{\mu}) = f(x_1, x_2, x_3) + \mu_1 . g_1(x_1, x_2, x_3) + \mu_2 . g_2(x_1, x_2, x_3)$$

Otimização Não-Linear Restrita

CONDIÇÕES GERAIS DE OTIMALIDADE

Exemplo:

Min $f(x_1, x_2) = 2(x_1)^2 + (x_2)^2 + 2x_1x_2 - 10x_1 - 10x_2$

s.a. $g_1(\underline{x}) = (x_1)^2 + (x_2)^2 - 5 \leq 0$

$g_2(\underline{x}) = 3x_1 + x_2 - 6 \leq 0$

$$\mathcal{L}\left(\underline{x}, \underline{\mu}\right) = 2(x_1)^2 + (x_2)^2 + 2x_1x_2 - 10x_1 - 10x_2 + \mu_1.\left((x_1)^2 + (x_2)^2 - 5\right) + \mu_2.(3x_1 + x_2 - 6)$$

Condições de KKT

(1) $$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 4x_1 + 2x_2 - 10 + 2\mu_1 x_1 + 3\mu_2 = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 2x_1 + 2x_2 - 10 + 2\mu_1 x_2 + \mu_2 = 0 \end{cases}$$

(2) Sem restrições de igualdade

(3) $$\begin{cases} (x_1)^2 + (x_2)^2 - 5 \leq 0 \\ 3x_1 + x_2 - 6 \leq 0 \end{cases}$$

(4) $$\begin{cases} \mu_1.\left((x_1)^2 + (x_2)^2 - 5\right) = 0 \;;\; \mu_1 \geq 0 \\ \mu_2.(3x_1 + x_2 - 6) = 0 \;;\; \mu_2 \geq 0 \end{cases}$$

Otimização Não-Linear Restrita

CONDIÇÕES GERAIS DE OTIMALIDADE

Exemplo:

Min $f(x_1, x_2) = 2(x_1)^2 + (x_2)^2 + 2x_1x_2 - 10x_1 - 10x_2$

s.a. $g_1(\underline{x}) = (x_1)^2 + (x_2)^2 - 5 \leq 0$

$g_2(\underline{x}) = 3x_1 + x_2 - 6 \leq 0$

Hipótese 1: $\mu_1 = \mu_2 = 0 \Rightarrow$ *Ambas as restrições não-ativas (Problema Irrestrito!)*

Nesse caso o sistema de equações fica:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 10 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 10 = 0 \end{cases}$$

Cuja solução é:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 5 \end{cases} \Rightarrow$$

Não satisfaz KKT(3), já que: $g_1(\underline{x}) = (x_1)^2 + (x_2)^2 - 5 = 20 > 0$

Otimização Não-Linear Restrita

CONDIÇÕES GERAIS DE OTIMALIDADE

Exemplo:

Min $f(x_1, x_2) = 2(x_1)^2 + (x_2)^2 + 2x_1x_2 - 10x_1 - 10x_2$

s.a. $g_1(\underline{x}) = (x_1)^2 + (x_2)^2 - 5 \leq 0$

$g_2(\underline{x}) = 3x_1 + x_2 - 6 \leq 0$

Hipótese 2: $\mu_1 = 0$ e $g_2(\underline{x}) = 0 \Rightarrow$ *Apenas a restrição 1 não está ativa*

Nesse caso o sistema de equações fica:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 10 + 3\mu_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 10 + \mu_2 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 6 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 0.4 \\ x_2 = 4.8 \\ \mu_2 = -0.4 \end{cases}$$

Não satisfaz KKT(3), já que: $(x_1)^2 + (x_2)^2 - 5 = 18.2 > 0$

Não satisfaz KKT(4), já que: $\mu_2 < 0$

Otimização Não-Linear Restrita

CONDIÇÕES GERAIS DE OTIMALIDADE

Exemplo:

Min $f(x_1, x_2) = 2(x_1)^2 + (x_2)^2 + 2x_1x_2 - 10x_1 - 10x_2$

s.a. $g_1(\underline{x}) = (x_1)^2 + (x_2)^2 - 5 \leq 0$

$g_2(\underline{x}) = 3x_1 + x_2 - 6 \leq 0$

Hipótese 3: $\mu_2 = 0$ e $g_1(\underline{x}) = 0 \Rightarrow$ *Apenas a restrição 2 não está ativa*

Nesse caso o sistema de equações fica:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - 10 + 2\mu_1 x_1 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 10 + 2\mu_1 x_2 = 0 \\ (x_1)^2 + (x_2)^2 - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1.0 \\ x_2 = 2.0 \\ \mu_1 = 1.0 \end{cases}$$

Satisfaz KKT(3), já que: $3x_1 + x_2 - 6 = -1 < 0$ ✓

Satisfaz KKT(4), já que: $\mu_1 > 0$ ✓

Solução ótima ! $\begin{cases} \underline{x} = [1.0 \quad 2.0] \\ \underline{\mu} = [1.0 \quad 0.0] \end{cases}$