Otimização Não-Linear Restrita

- Condições Gerais de Otimalidade: KKT

- Métodos de Solução:

  - Baseados em Direções Factíveis:

    - Gradiente Projetado: *Rosen* (1960)
    - Gradiente Reduzido: *Wolfe* (1963), *Abadie e Carpentier* (GRG, 1969)

    ⋮

  - Baseados em Sucessivas Otimizações Irrestritas: Incorporam as restrições na F.Obj.

    - Baseados nas KKT
    - Baseados em Penalidades e Barreiras (*Fiacco e McCormick*, 1966)

Otimização Não-Linear Restrita

Métodos Baseados em Direções Factíveis

✓ A cada iteração a solução é melhor que a da iteração anterior

Método do Gradiente Projetado:

- Proposto por J. B. Rosen, em 1960:

  "The Gradient Projection for Nonlinear Programming"

- Adaptação do Método da Descida

- Adequado para restrições lineares

Otimização Não-Linear Restrita

Algoritmo do Método do Gradiente Projetado

(1) Fazer $k=0$ e determinar uma solução inicial factível ($\underline{x}^k$)

(2) Formar a Matriz A_q (linhas da matriz A relativas às restrições ativas no ponto k)

(3) Calcular a Matriz de Projeção do Gradiente: $P^k = I - A_q^t\,(A_q\,A_q^t)^{-1}\,A_q$

(4) Calcular a Direção Projetada: $d^k = -Pk.\nabla f\left(\underline{x}^k\right)$

Se: $\underline{d}_k \neq \underline{0}$, calcular o passo ótimo (α*):

$\alpha^* = \mathrm{Min}\,\{f(\underline{x}^k + \alpha\,\underline{d}^k)\}\,;\ 0 \leq \alpha \leq \alpha_{max}$ *(busca unidimensional)*

e atualizar $\underline{x}$ $\Rightarrow$ $\underline{x}^{k+1} = \underline{x}^k + \alpha^*\,\underline{d}^k$; $k = k+1$ e voltar para (2)

Senão: Calcular $\underline{\lambda} = -\,(A_q\,A_q^t)^{-1}\,A_q\,\nabla f\left(\underline{x}^k\right)^t$

Se: $\lambda_j \geq 0$ para todo $j \Rightarrow$ FIM: $\underline{x}^* = \underline{x}^k$

Senão: retirar a linha de A_q relativa à restrição associada ao componente mais negativo de λ e voltar para (3).

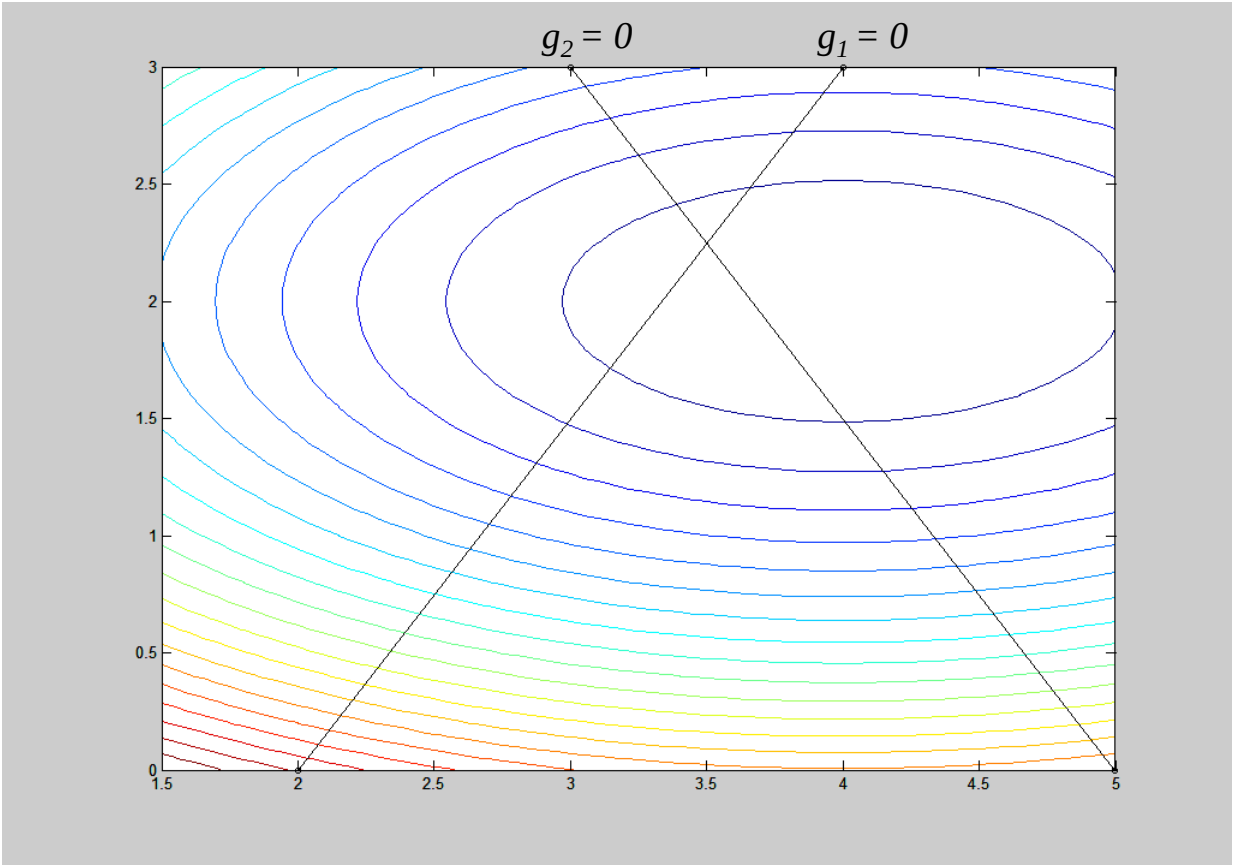
Otimização Não-Linear Restrita

Método do Gradiente Projetado - Exemplo

Minimizar $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 - 8x_1 - 16x_2$

s.a. $3x_1 - 2x_2 \geq 6$ $\quad g_1(\underline{x})$

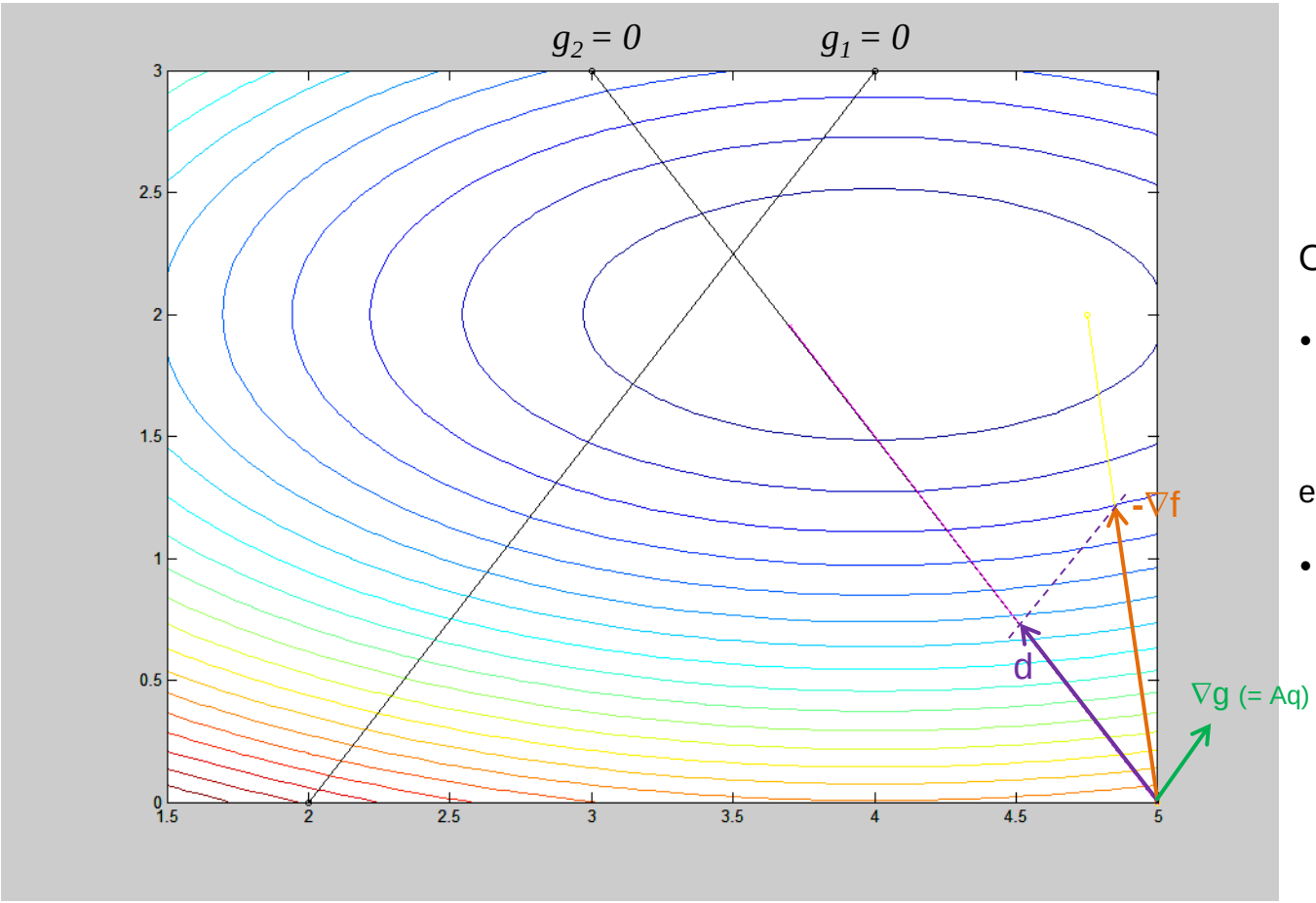
$3x_1 + 2x_2 \leq 15$ $\quad g_2(\underline{x})$



Otimização Não-Linear Restrita

Algoritmo do Método do Gradiente Projetado - Exemplo

$\underline{x}^0 = [5 \quad 0]$



Observar que:

- A_q e d são ortogonais

  ↳ $A_q \cdot \underline{d} = \underline{0}$

e

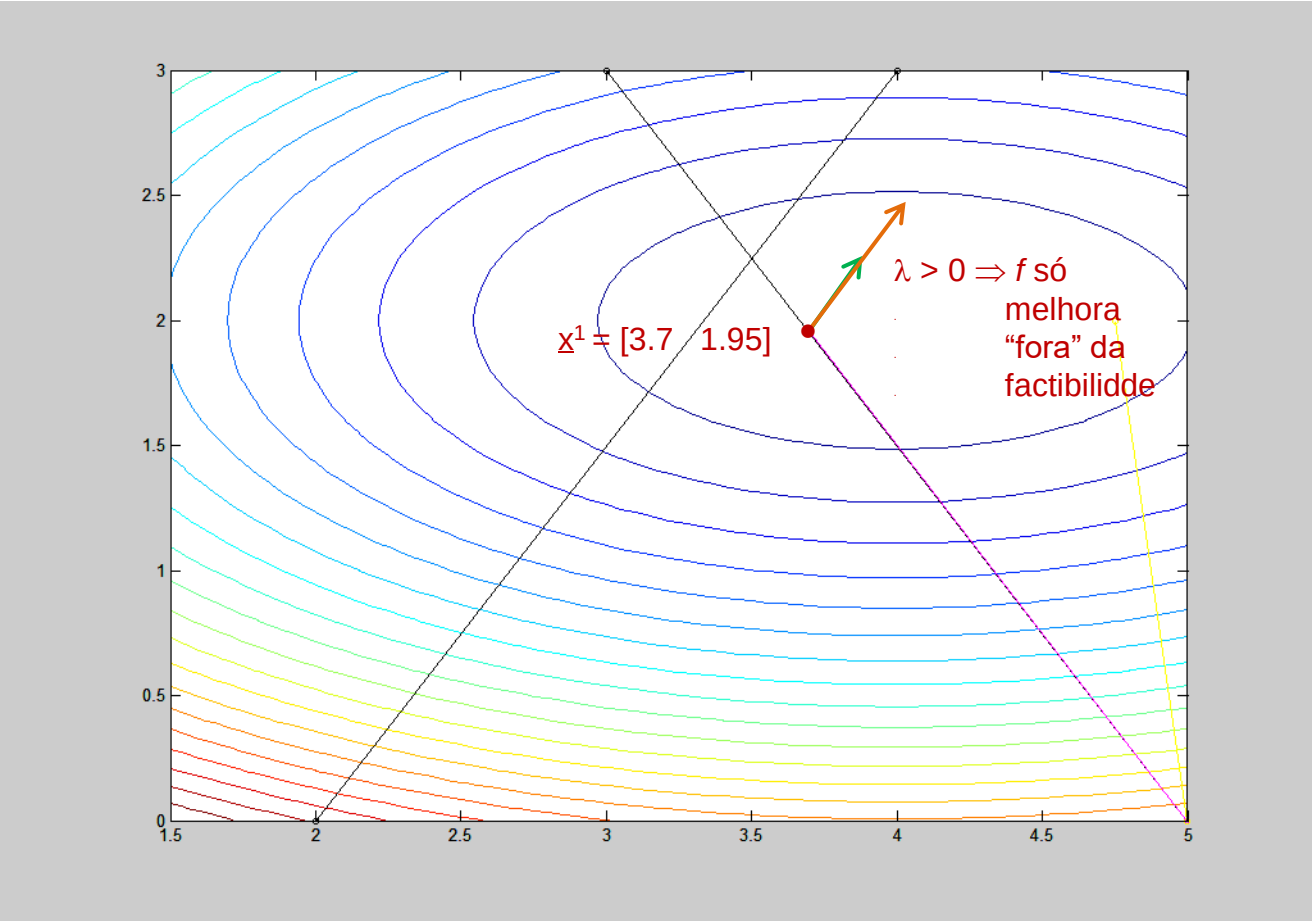
- d é a projeção de (-∇f) em g

  ↳ $-\nabla f = d + A_q^t \lambda$

Otimização Não-Linear Restrita

Algoritmo do Método do Gradiente Projetado - Exemplo

$\underline{x}^0 = [5 \quad 0]$



Como:

- $A_q \cdot \underline{d} = \underline{0}$

e

- $-\nabla f = \underline{d} + A_q^t \cdot \underline{\lambda}$

e, nesse caso $\underline{d} = \underline{0}$, logo:

$$\underline{\lambda} = -(A_q A_q^t)^{-1} \cdot A_q \cdot \nabla f$$

Assim,

se: $\underline{\lambda} \geq 0 \Rightarrow$ FIM

(A_q e $-\nabla f$ mesmo sentido)

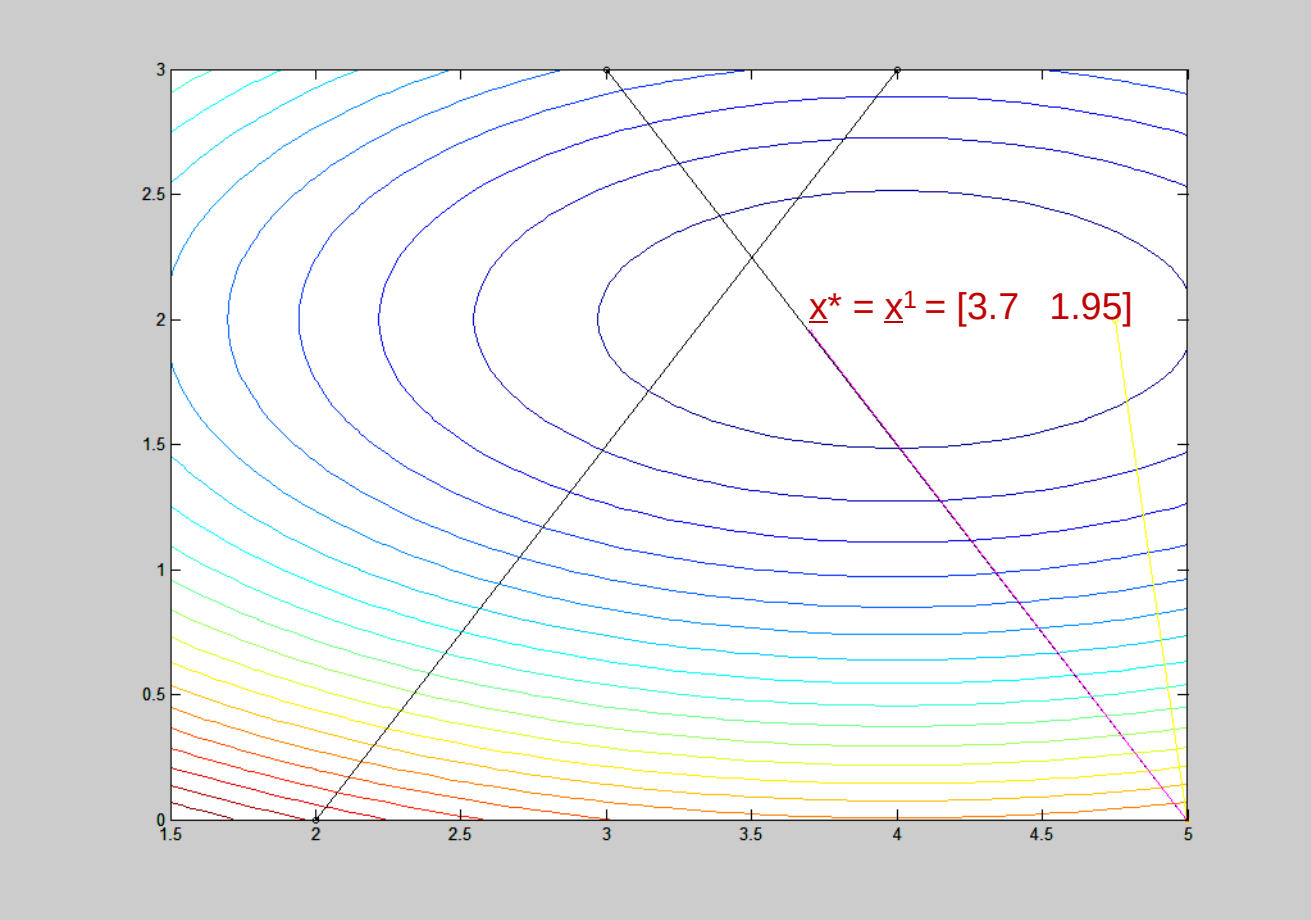
senão (algum $\lambda < 0$):

(A_q e $-\nabla f$ sentidos opostos)

Otimização Não-Linear Restrita

Algoritmo do Método do Gradiente Projetado - Exemplo

$\underline{x}^0 = [5 \quad 0]$



Observar que, no ótimo:

- $\underline{d} = \underline{0}$

logo:

- $-\nabla f = A_q^t \cdot \lambda$

No exemplo,

$\underline{x}^* = [3.7 \quad 1.95]$

$-\nabla f(\underline{x}^*) = [0.6 \quad 0.4]^t$

$A_q^* = [3 \quad 2]$ e $\lambda^* = 0.2$

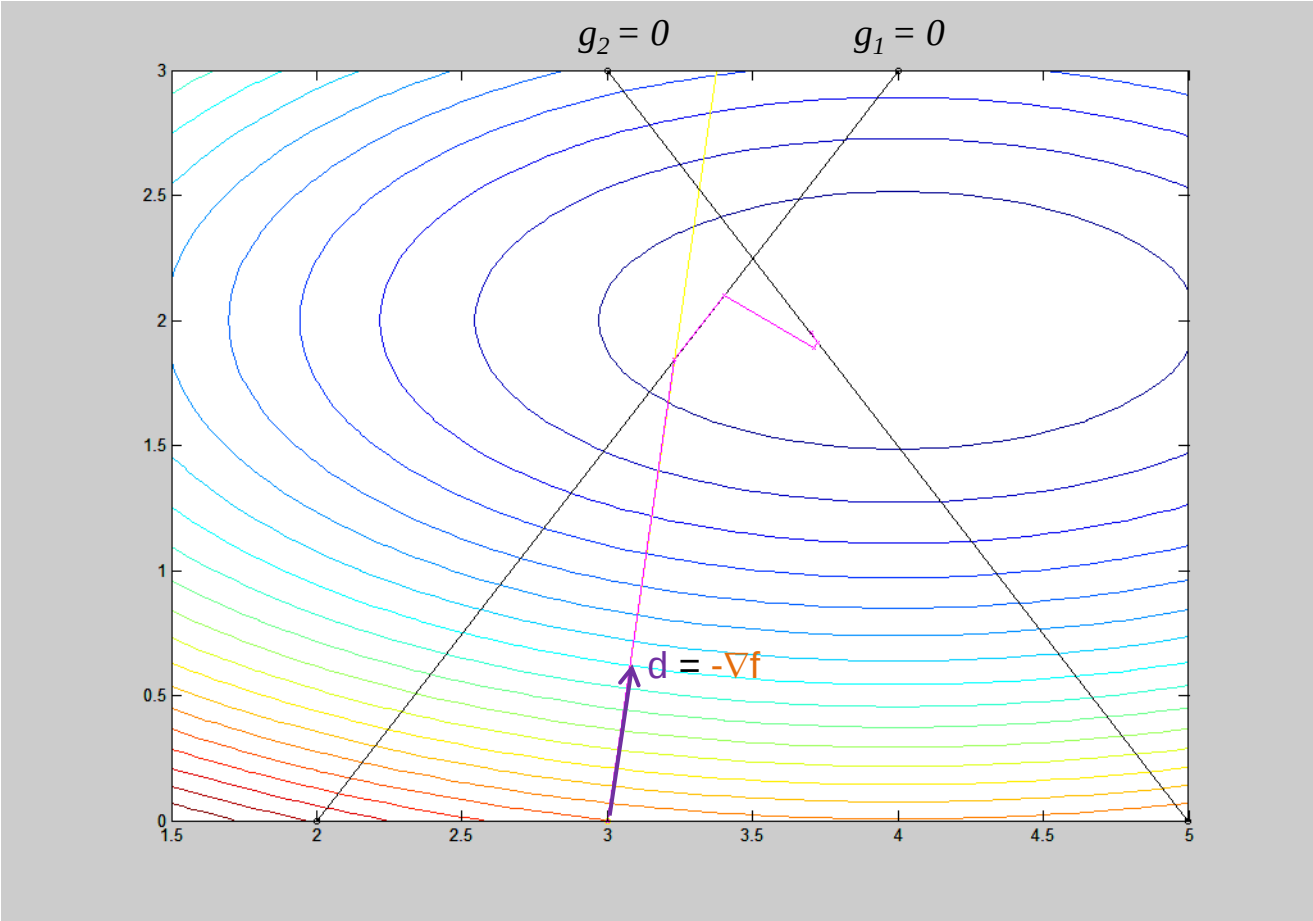
ou seja, generalizando:

$-\nabla f(\underline{x}^*) = A^t \cdot \underline{\lambda}$ (KKT)

Otimização Não-Linear Restrita

Algoritmo do Método do Gradiente Projetado - Exemplo

$\underline{x}^0 = [3 \quad 0]$



1º passo:

$A_q = [\ ] \Rightarrow d = -\nabla f$

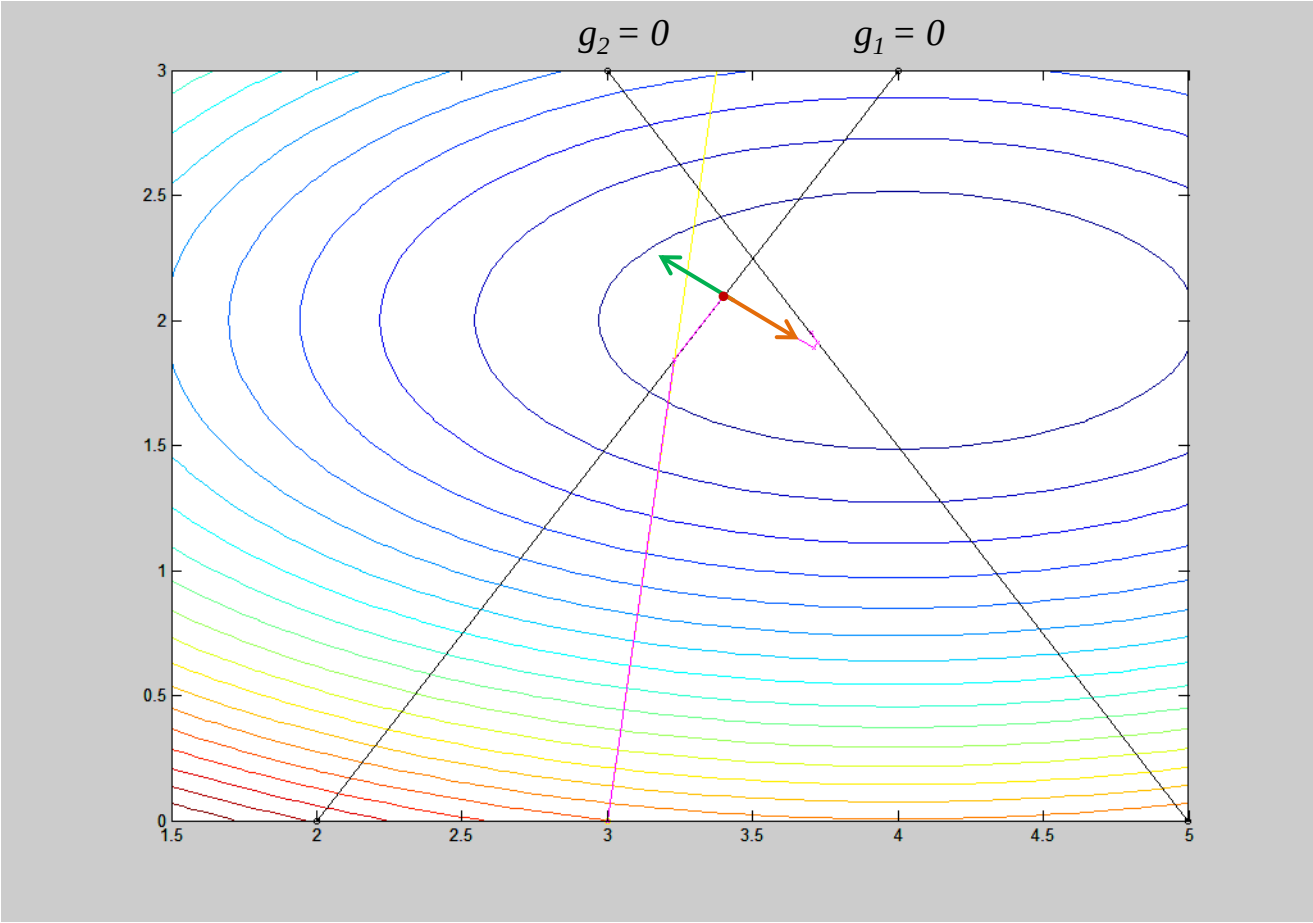
$\alpha^* > \alpha_{max} \Rightarrow \alpha^* = \alpha_{max}$

↳ ativa g_1

Otimização Não-Linear Restrita

Algoritmo do Método do Gradiente Projetado - Exemplo

$\underline{x}^0 = [3 \quad 0]$



3º passo ($\underline{x}^{(2)} = [3.4 \quad 2.1]$):

$-\nabla f(\underline{x}^{(2)}) = [1.2 \quad -0.8]^t$

$A_q = [-3 \quad 2]$

$\Rightarrow \underline{d} = \underline{0}$

(A_q e $-\nabla f$ tem sentidos opostos)

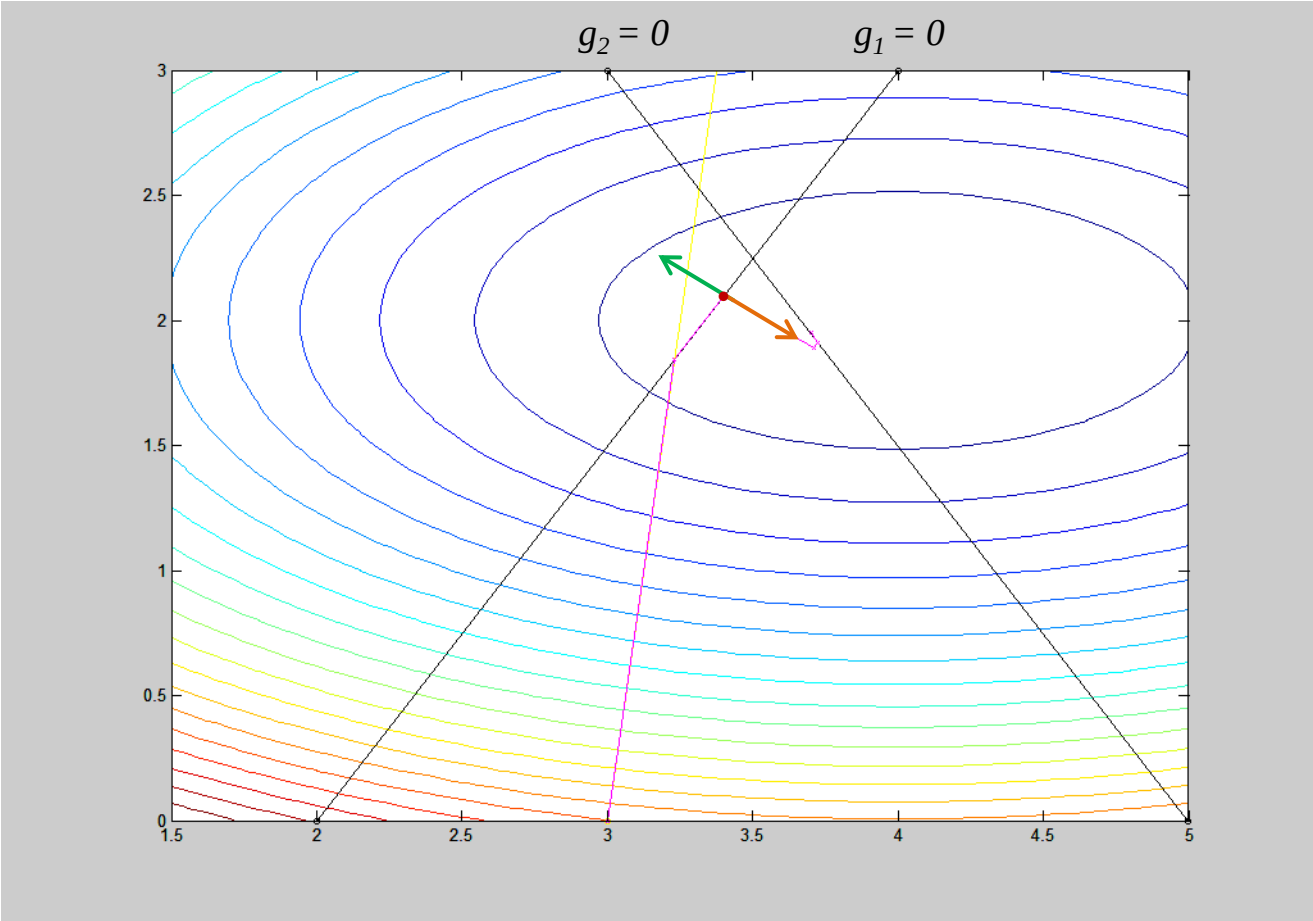
$\Downarrow$

$\lambda = -0.4 \ (< 0) \Rightarrow A_q = [\ ]$

Otimização Não-Linear Restrita

Algoritmo do Método do Gradiente Projetado - Exemplo

$\underline{x}^0 = [3 \quad 0]$



3º passo ($\underline{x}^{(2)} = [3.4 \quad 2.1]$):

$-\nabla f(\underline{x}^{(2)}) = [1.2 \quad -0.8]^t$

$A_q = [-3 \quad 2]$

$\Rightarrow \underline{d} = \underline{0}$

(A_q e $-\nabla f$ tem sentidos opostos)

$\Downarrow$

$\lambda = -0.4 \ (< 0) \Rightarrow A_q = [\ ]$

(desativar g_1 e obter nova projeção.
No caso,
como A_q fica vazia $\Rightarrow d = -\nabla f$)