

Otimização Não-Linear Restrita

Métodos Baseados em Direções Factíveis

- ✓ A cada iteração a solução é melhor que a da iteração anterior

Método do Gradiente Reduzido:

- Proposto por P. Wolfe, em 1963:

“Methods of Nonlinear Programming: The Reduced Gradient Method”

- Extensão do Método Simplex para F. Obj. não-linear
- Adequado para restrições lineares

Otimização Não-Linear Restrita

Método do Gradiente Reduzido

Utiliza abordagem da projeção do gradiente, mas dividindo as variáveis em Básicas (ou dependentes) e Não-Básicas (ou independentes):

Assim, o problema:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Min } f(\underline{x}) & \\
 \text{s.a } A \underline{x} = \underline{b} & \\
 \underline{x} \geq \underline{0} &
 \end{array}
 \quad \Rightarrow \quad
 \begin{array}{ll}
 \text{Min } f(\underline{x}_B, \underline{x}_{NB}) & \\
 \text{s.a } A^B \underline{x}_B + A^{NB} \underline{x}_{NB} = \underline{b} & \\
 \underline{x}_B \geq \underline{0} , \underline{x}_{NB} \geq \underline{0} &
 \end{array}$$

Desse modo:

$$\underline{x}_B = (A^B)^{-1} \underline{b} - (A^B)^{-1} A^{NB} \underline{x}_{NB}$$

Assumindo um incremento em $\underline{x}$ tem-se:

$$\begin{aligned}
 \underline{x}_B + \Delta \underline{x}_B &= (A^B)^{-1} \underline{b} - (A^B)^{-1} A^{NB} (\underline{x}_{NB} + \Delta \underline{x}_{NB}) \\
 &= \underbrace{(A^B)^{-1} \underline{b} - (A^B)^{-1} A^{NB} \underline{x}_{NB}}_{\underline{x}_B} - (A^B)^{-1} A^{NB} \Delta \underline{x}_{NB}
 \end{aligned}$$

Logo:

$$\Delta \underline{x}_B = - (A^B)^{-1} A^{NB} \Delta \underline{x}_{NB}$$

Otimização Não-Linear Restrita

Algoritmo do Método do Gradiente Reduzido

(1) Fazer $k=0$, determinar uma solução inicial factível ($\underline{x}^k$) e definir a partição $\underline{x}_B$ e $\underline{x}_{NB}$

(2) Calcular o Gradiente Reduzido (em relação à $\underline{x}_{NB}$) :

$$\nabla f_R(\underline{x}_{NB}) = \nabla_{NB} f(\underline{x}^k) - \nabla_B f(\underline{x}^k) \cdot (A^B)^{-1} \cdot A^{NB}$$

(3) Avaliar $\underline{x}_{NB}$ (para cada elemento de $\underline{x}_{NB}$):

$$\text{Se: } x_{NB} > 0 \text{ ou } (x_{NB} = 0 \text{ e } \nabla f_R < 0) \Rightarrow \Delta x_{NB} = - \nabla f_R$$

$$\text{Se: } x_{NB} = 0 \text{ e } \nabla f_R \geq 0 \Rightarrow \Delta x_{NB} = 0$$

(4) Avaliar convergência: Se $\Delta x_{NB} = 0 \Rightarrow \text{FIM}$

$$\text{Senão: Calcular } \underline{\Delta x}_B = -(A^B)^{-1} \cdot A^{NB} \cdot \underline{\Delta x}_{NB}$$

(5) Determinar o novo $\underline{x}$: $\underline{x}^{k+1} = \underline{x}^k + \alpha^* \cdot \underline{\Delta x}^k$ (Busca Unidimensional, sendo $0 \leq \alpha \leq \alpha^{\max}$)

$$\text{Se: } \alpha^* > \alpha^{\max} \Rightarrow \alpha^* = \alpha^{\max}$$

e alterar a base, refazendo a partição $\{B, NB\}$
e retornar ao passo (2)

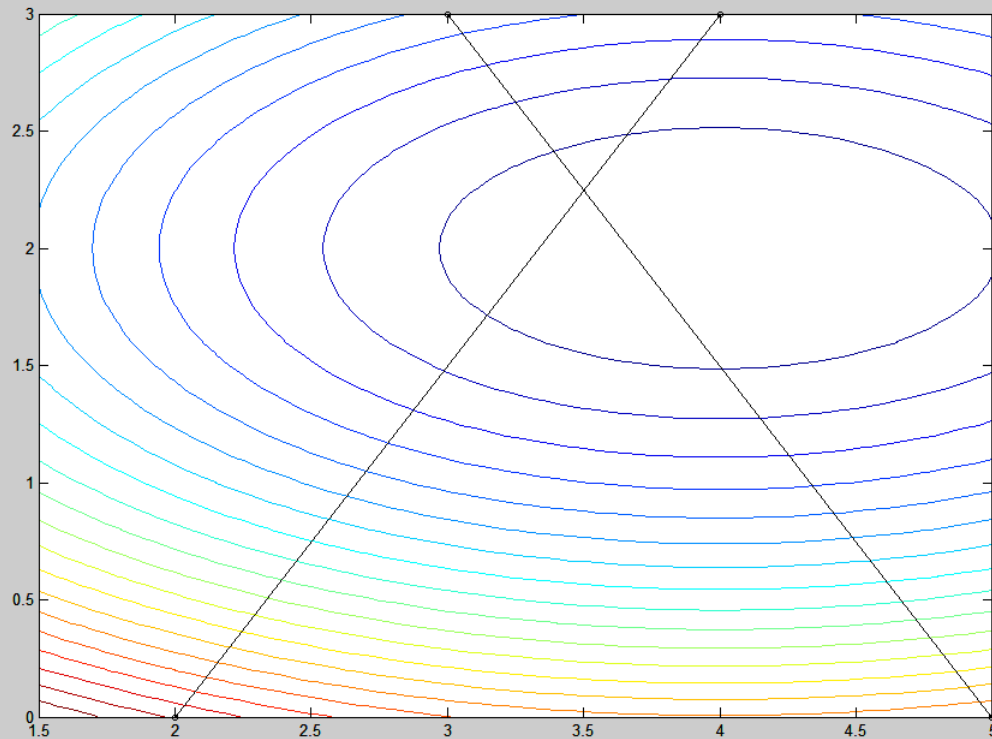
Otimização Não-Linear Restrita

Método do Gradiente Reduzido - Exemplo

Minimizar $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 - 8x_1 - 16x_2$

s.a. $g1(x_1, x_2) = 3x_1 - 2x_2 \geq 6$

$g2(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \leq 15$

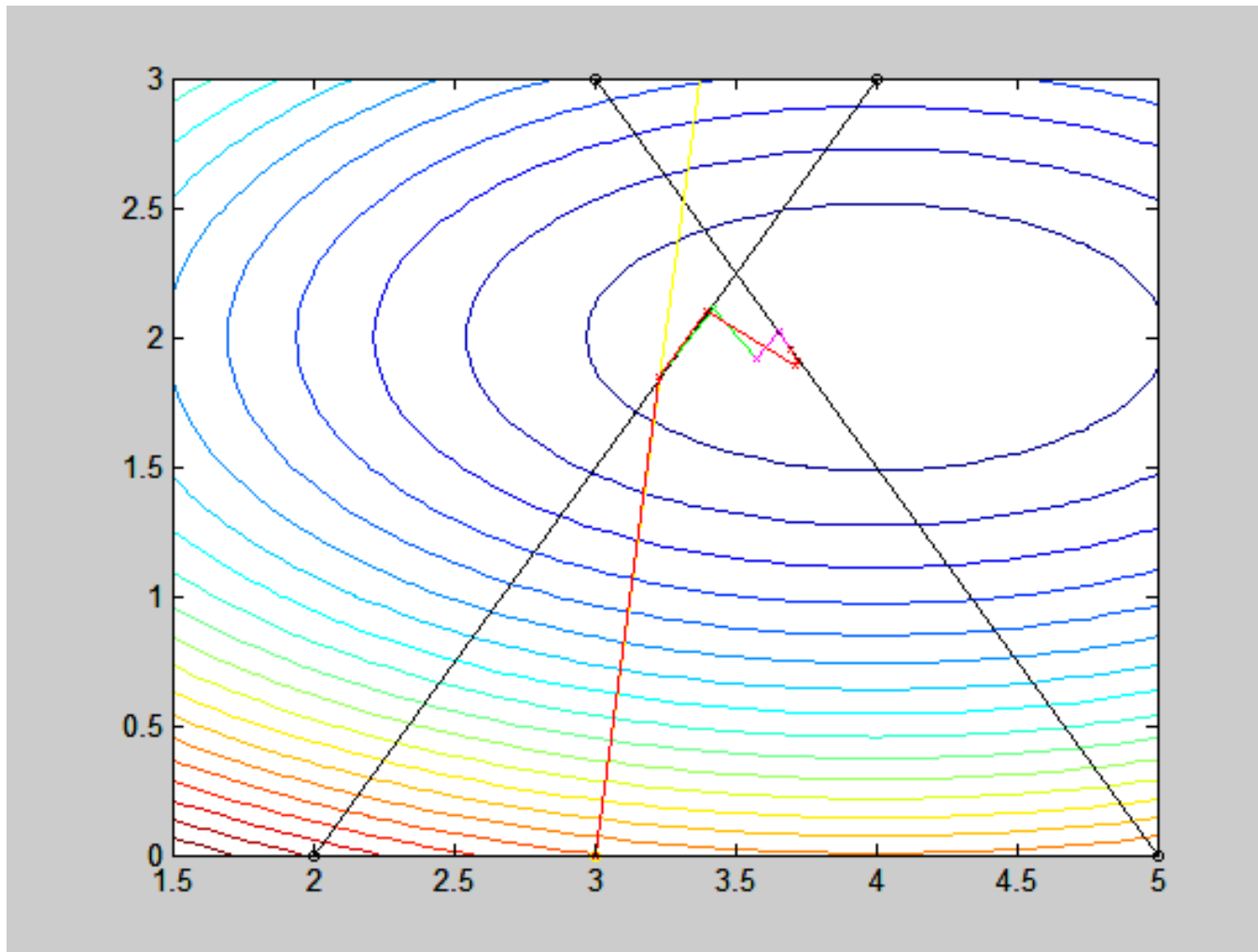


Otimização Não-Linear Restrita

Algoritmo do Método do Gradiente Reduzido - Exemplo

$$\underline{x}^0 = [3 \quad 0]$$

Bases (3,4) $\rightarrow$ (1,4) $\rightarrow$ (1,2)



$$\underline{x}^1 = [3.2308 \quad 1.8462]$$

$$\underline{x}^2 = [3.4243 \quad 2.1068]$$

$$\underline{x}^3 = [3.5774 \quad 1.9155]$$

$$\underline{x}^4 = [3.6541 \quad 2.0188]$$

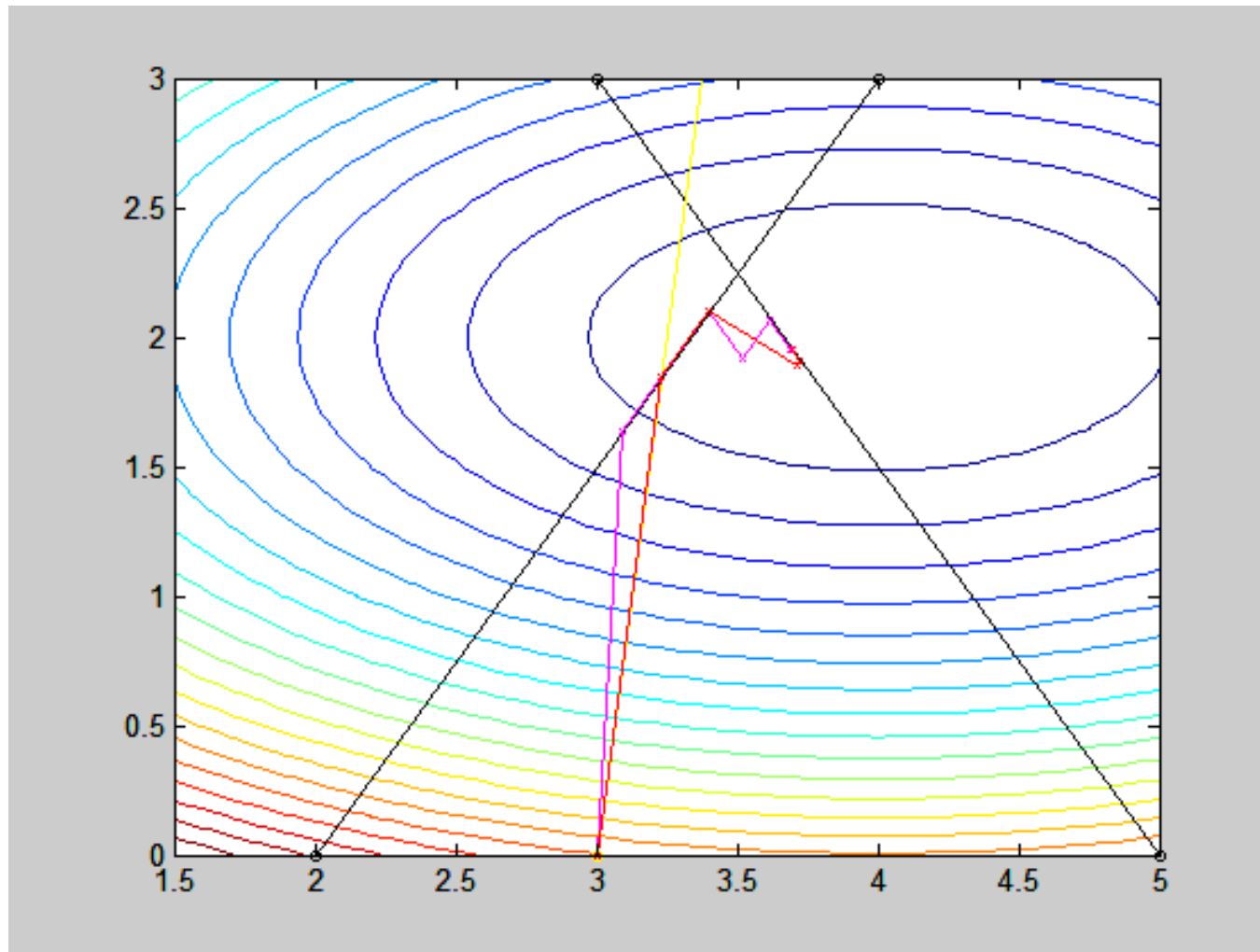
$$\underline{x}^5 = [3.70 \quad 1.95]$$

Otimização Não-Linear Restrita

Algoritmo do Método do Gradiente Reduzido - Exemplo

$$\underline{x}^0 = [3 \ 0]$$

Base (1,2)



$$\underline{x}^1 = [3.0909 \ 1.6364]$$

$$\underline{x}^2 = [3.4000 \ 2.1000]$$

$$\underline{x}^3 = [3.5200 \ 1.9200]$$

$$\underline{x}^4 = [3.6160 \ 2.0640]$$

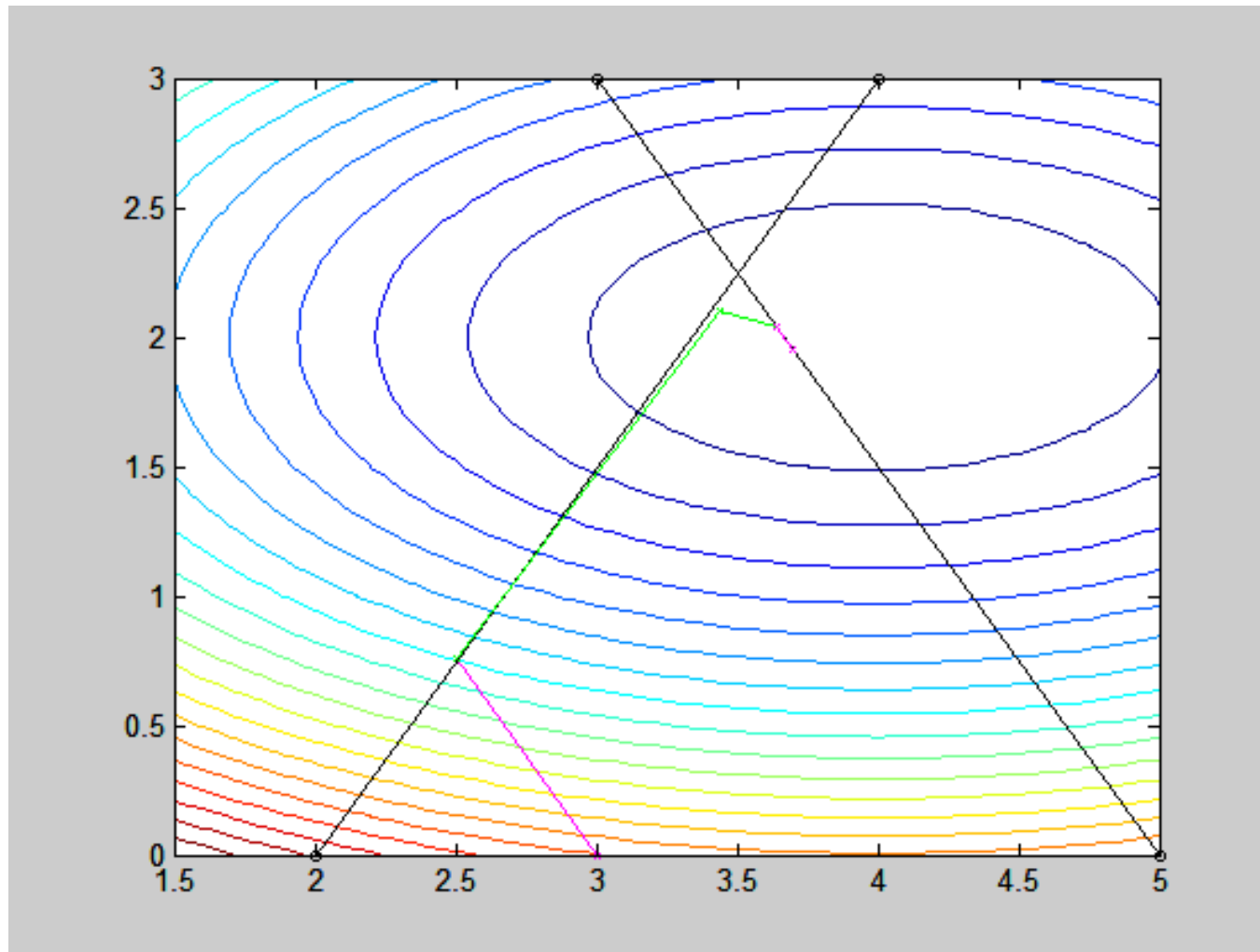
$$\underline{x}^5 = [3.70 \ 1.95]$$

Otimização Não-Linear Restrita

Algoritmo do Método do Gradiente Reduzido - Exemplo

$$\underline{x}^0 = [3 \ 0]$$

Bases (1,3) $\rightarrow$ (1,4) $\rightarrow$ (1,2)



$$\underline{x}^1 = [2.5057 \ 0.7586]$$

$$\underline{x}^2 = [3.4359 \ 2.0979]$$

$$\underline{x}^3 = [3.6429 \ 2.0357]$$

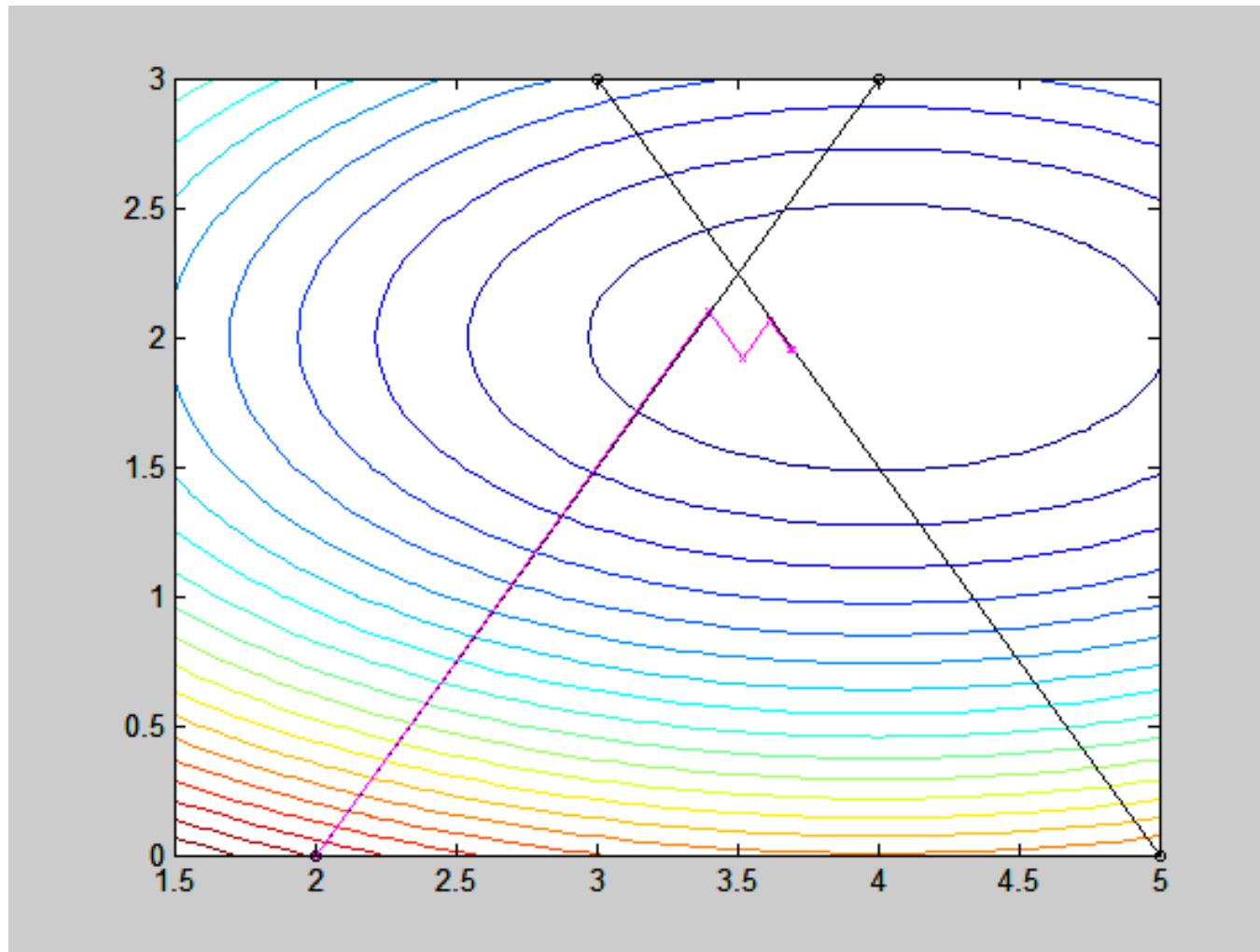
$$\underline{x}^4 = [3.70 \ 1.95]$$

Otimização Não-Linear Restrita

Algoritmo do Método do Gradiente Reduzido - Exemplo

$$\underline{x}^0 = [2 \ 0]$$

Base (1,2)



$$\underline{x}^1 = [3.4000 \ 2.1000]$$

$$\underline{x}^2 = [3.5200 \ 1.9200]$$

$$\underline{x}^3 = [3.6160 \ 2.0640]$$

$$\underline{x}^4 = [3.70 \ 1.95]$$