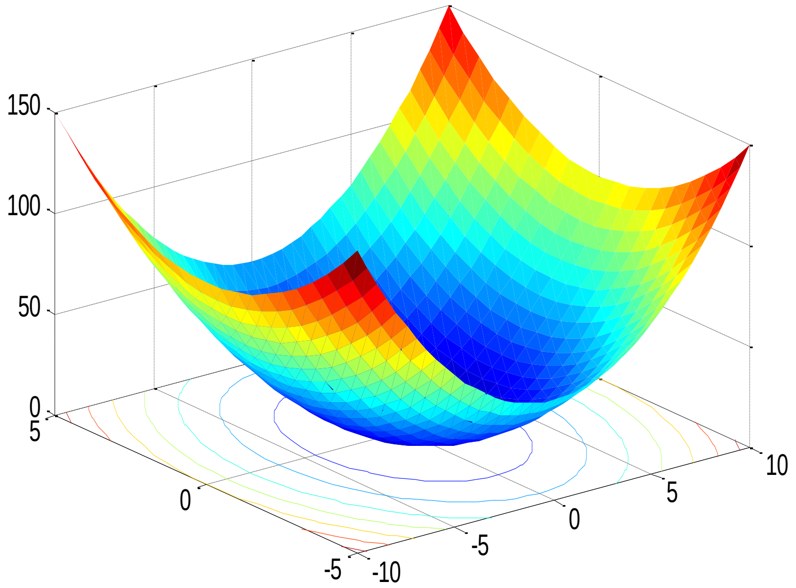
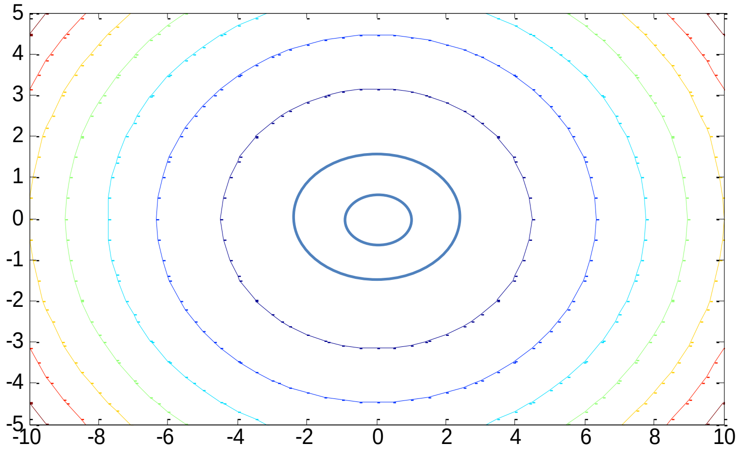
Otimização Não-Linear Irrestrita

Busca Multidimensional





Otimização Não-Linear Irrestrita

Busca Multidimensional – Métodos de Descida (*Steepest Descent*)

Seja o problema:

Minimizar $f(\underline{x})$

Para diminuir o valor de f, a partir de um ponto $\underline{x}^{(k)}$, pode-se definir um caminho de descida (ou subida, para maximização):

$$\underline{x}^{(k+1)} = \underline{x}^{(k)} + \alpha . \underline{d}^{(k)}$$

onde:

$$\underline{d}^{(k)} = -\nabla_x f(\underline{x}^{(k)})$$

$\Rightarrow$ Método do Gradiente

Otimização Não-Linear Irrestrita

Busca Multidimensional – Métodos de Descida (*Steepest Descent*)

Seja o problema:

Minimizar $f(\underline{x})$

Para diminuir o valor de f, a partir de um ponto $\underline{x}^{(k)}$, pode-se definir um caminho de descida (ou subida, para maximização):

$$\underline{x}^{(k+1)} = \underline{x}^{(k)} + \alpha.\underline{d}^{(k)}$$

onde:

$$\underline{d}^{(k)} = -\nabla_x f(\underline{x}^{(k)})$$ $\Rightarrow$ Método do Gradiente

Assim, o problema original é resolvido através de uma sequência de <u>Buscas Unidimensionais</u>, onde em cada uma delas, partindo de $x^{(k)}$ e na direção $d^{(k)}$, busca-se determinar o melhor passo (α*).

Otimização Não-Linear Irrestrita

Método do Gradiente - Algoritmo

(1) Fazer k=0 e determinar uma solução inicial ($\underline{x}^{(k)}$)

(2) Calcular o Gradiente da Função Objetivo em $\underline{x}^{(k)}$

$$\nabla f(\underline{x}^{(k)}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\underline{x}=\underline{x}^{(k)}}$$

(3) Se: $\|\nabla_x f(\underline{x}^{(k)})\| <$ precisão $\Rightarrow$ $\underline{x}^* = \underline{x}^{(k)}$ $\Rightarrow$ (FIM)

Senão: Formular o Problema de Busca Unidimensional

$$\begin{cases} \text{Min } g(\alpha) = f(\underline{x}^{(k)} + \alpha.\underline{d}^{(k)}) \\ \text{s.a.} \\ \qquad \alpha > 0 \end{cases}$$

onde: $\underline{d}^{(k)} = -\nabla_x f(\underline{x}^{(k)})$

Otimização Não-Linear Irrestrita

Método do Gradiente - Algoritmo

Problema de Busca Unidimensional

$$\begin{cases} \text{Min } g(\alpha) = f(\underline{x}^{(k)} + \alpha.\underline{d}^{(k)}) \\ \text{s.a.} \\ \qquad \alpha > 0 \end{cases}$$

onde: $\underline{d}^{(k)} = -\nabla_x f(\underline{x}^{(k)})$

(4) Resolver a Busca Unidimensional, encontrando α^* e atualizar $\underline{x}$

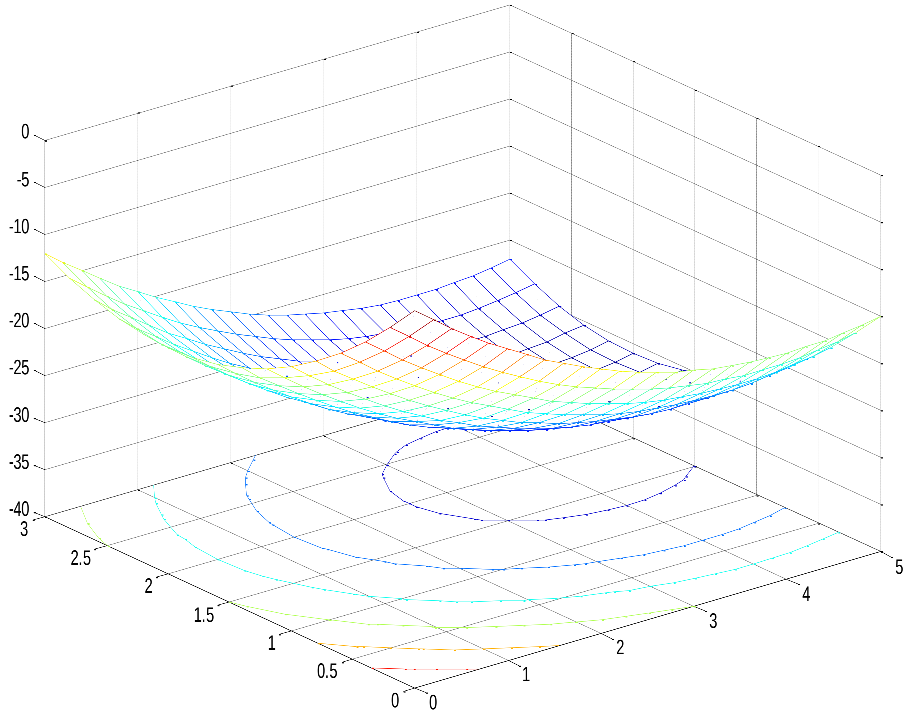
$$\underline{x}^{(k+1)} = \underline{x}^{(k)} + \alpha.\underline{d}^{(k)}$$

(5) Fazer $k = k+1$ e retornar ao passo (2)

Otimização Não-Linear Irrestrita

Método do Gradiente - Exemplo

Minimizar $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 - 8x_1 - 16x_2$



Otimização Não-Linear Irrestrita

Método do Gradiente - Exemplo Minimizar $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 - 8x_1 - 16x_2$

1ª. iteração

(1) Adotando $\underline{x}^0 = [\ 0 \quad 0\ ]$ e *precisão* = 0.01

(2) Calculando o Gradiente de f :

$$\nabla f(\underline{x}^0) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 8 \\ 8x_2 - 16 \end{bmatrix}_{\underline{x}=\underline{x}^0} = \begin{bmatrix} -8 \\ -16 \end{bmatrix}$$

(3) como $\|\nabla_x f(\underline{x}^0)\| > precisão$, determina-se a função unidimensional $g(\alpha)$:

$$g(\alpha) = f(\underline{x}^0 + \alpha.\underline{d}^0) = f(\underline{x}^0 - \alpha.\nabla f(\underline{x}^0) = f(\underline{x}^0(\alpha))$$

onde: $$\underline{x}^0(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} -8 \\ -16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8\alpha \\ 16\alpha \end{bmatrix}$$

logo:

$$g(\alpha) = (8\alpha)^2 + 4(16\alpha)^2 - 8(8\alpha) - 16(16\alpha) = 1088\,\alpha^2 - 320\,\alpha$$

Otimização Não-Linear Irrestrita

Método do Gradiente - Exemplo Minimizar $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 - 8x_1 - 16x_2$

1ª. Iteração (cont.)

(4) Resolvendo o Problema Unidimensional:

$$\begin{cases} \text{Min } g(\alpha) = 1088\,\alpha^2 - 320\,\alpha \\ \text{s.a.} \quad \alpha > 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \alpha^* = 0.147$$

(5) Assim:

$$\underline{x}^1 = \underline{x}^0 - \alpha^* \nabla f(\underline{x}^0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0.147 \begin{bmatrix} -8 \\ -16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.18 \\ 2.35 \end{bmatrix}$$

Otimização Não-Linear Irrestrita

Método do Gradiente - Exemplo Minimizar $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 - 8x_1 - 16x_2$

2ª. iteração

(2) Calculando o Gradiente de f :

$$\nabla f(\underline{x}^1) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 8 \\ 8x_2 - 16 \end{bmatrix}_{\underline{x}=\underline{x}^1} = \begin{bmatrix} -5.64 \\ +2.80 \end{bmatrix}$$

(3) como $\|\nabla_x f(\underline{x}^1)\| > precisão$, determina-se a função unidimensional $g(\alpha)$:

$$g(\alpha) = f(\underline{x}^1 + \alpha.\underline{d}^1) = f(\underline{x}^1 - \alpha.\nabla f(\underline{x}^1) = f(\underline{x}^1(\alpha))$$

onde: $$\underline{x}^1(\alpha) = \begin{bmatrix} 1.18 \\ 2.35 \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} -5.64 \\ +2.80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.18 + 5.64\alpha \\ 2.35 - 2.80\alpha \end{bmatrix}$$

logo:

$$g(\alpha) = (1.18+5.64\alpha)^2 + 4(2.35-2.80\alpha)^2 - 8(1.18+5.64\alpha) - 16(2.35-2.80\alpha)$$

$$g(\alpha) = 63.17\,\alpha^2 - 39.65\,\alpha - 23.56$$

Otimização Não-Linear Irrestrita

<u>Método do Gradiente - Exemplo</u> Minimizar $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 - 8x_1 - 16x_2$

<u>2ª. Iteração</u> (cont.)

(4) Resolvendo o Problema Unidimensional:

$$\begin{cases} \text{Min } g(\alpha) = 63.17\,\alpha^2 - 39.65\,\alpha - 23.56 \\ \text{s.a.} \quad \alpha > 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \alpha^* = 0.3125$$

(5) Assim:

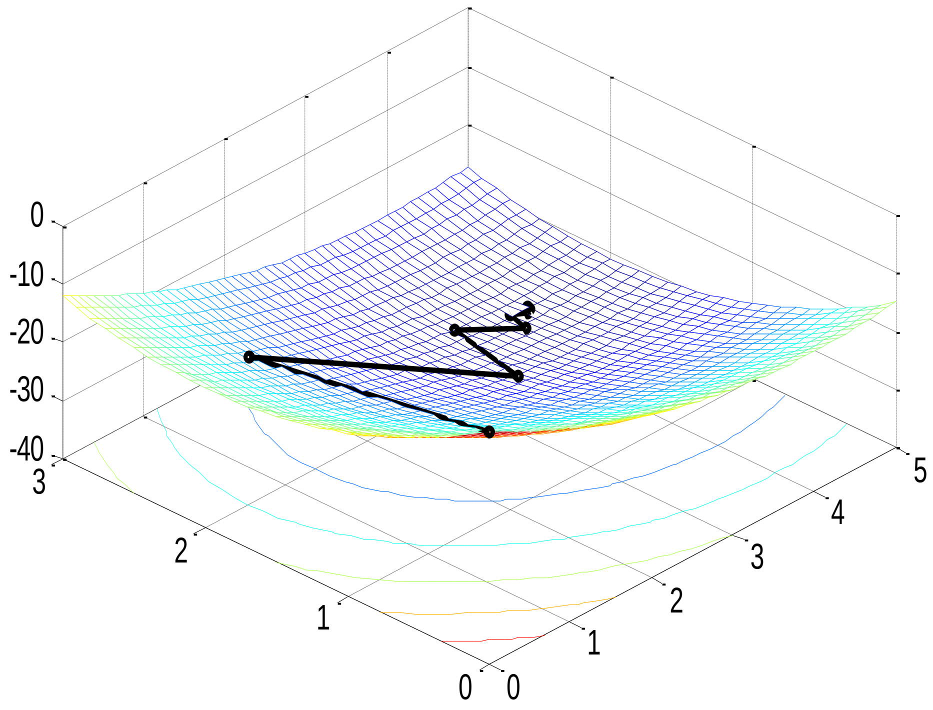
$$\underline{x}^2 = \underline{x}^1 - \alpha^*\,\nabla f(\underline{x}^1) = \begin{bmatrix} 1.18 \\ 2.35 \end{bmatrix} - 0.3125 \begin{bmatrix} -5.64 \\ +2.80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.94 \\ 1.47 \end{bmatrix}$$

⋮

Otimização Não-Linear Irrestrita

Método do Gradiente - Exemplo

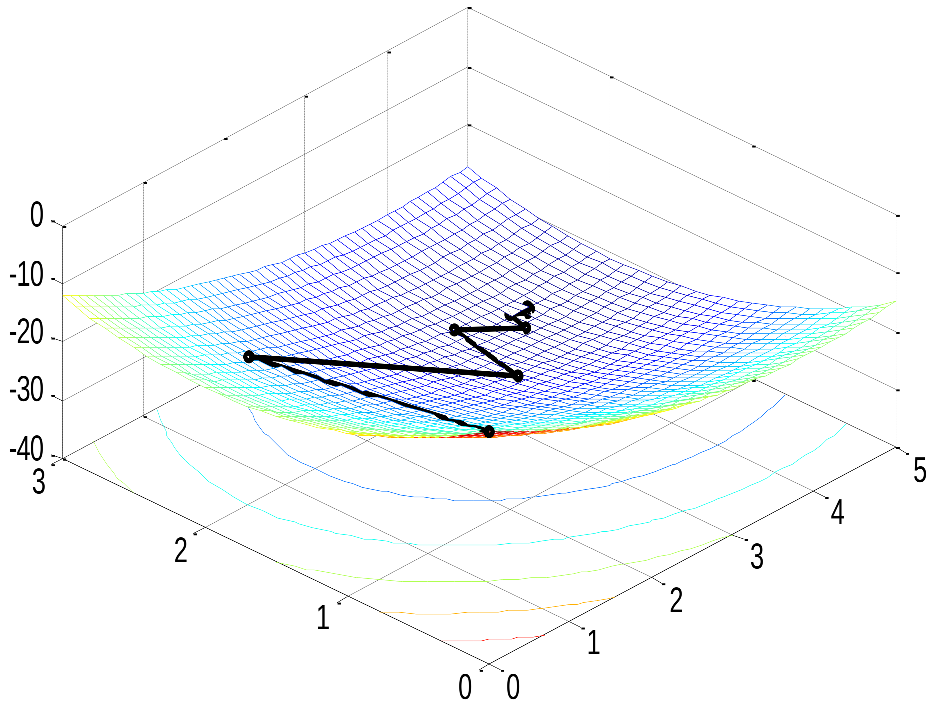
Minimizar $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 - 8x_1 - 16x_2$

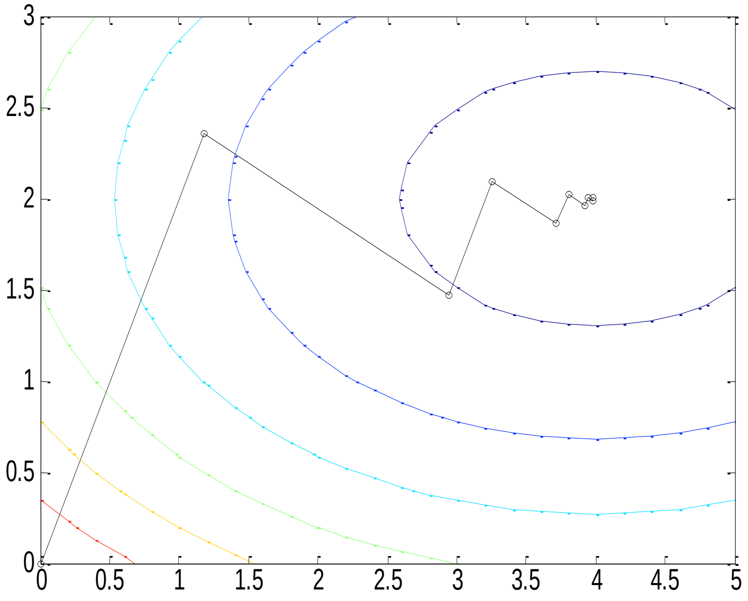


Otimização Não-Linear Irrestrita

Método do Gradiente - Exemplo

Minimizar $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 - 8x_1 - 16x_2$



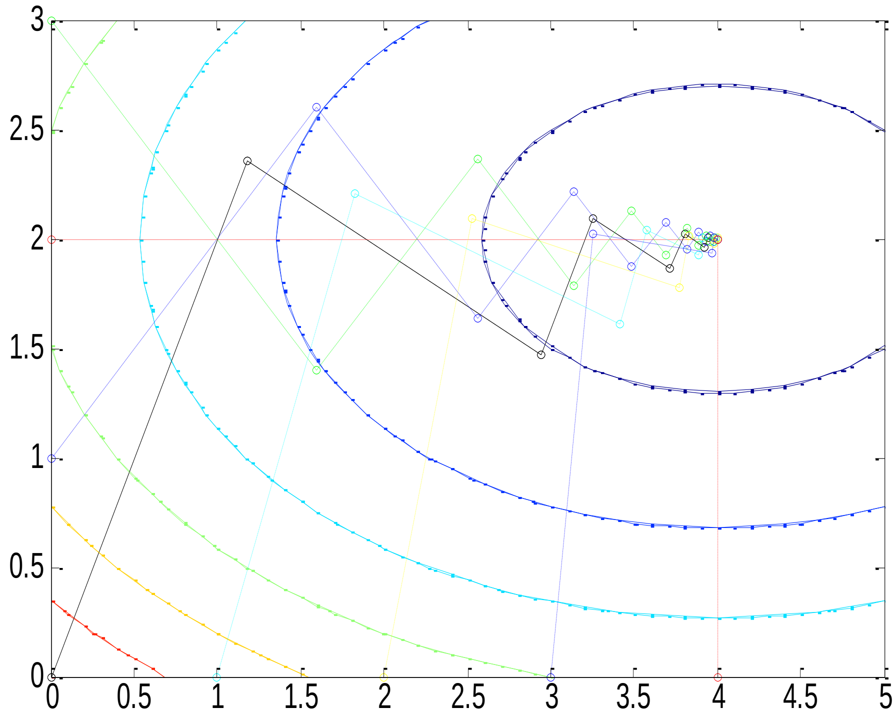


Otimização Não-Linear Irrestrita

Método do Gradiente - Exemplo

Minimizar $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 - 8x_1 - 16x_2$

- Caminho da solução para diferentes pontos de partida



Otimização Não-Linear Irrestrita

Método do Gradiente - Exemplo

Minimizar $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_2^2 - 8x_1 - 16x_2$

➢ Caminho da solução para diferentes valores de α