

Exemplo de aplicação de Problema de Otimização

Uma fábrica de móveis produz armários de madeira e metal em três setores distintos:

- Setor 1: produz peças de madeira p/ 1 armário a cada 2h;
- Setor 2: produz peças de metal p/ 1 armário a cada 1h;
- Setor 3: monta os armários, sendo que:
 - cada armário de madeira leva 3h para ser montado;
 - cada armário de metal leva 2h para ser montado.

Sabe-se ainda que:

- o Setor 1 opera por 8h diárias;
- o Setor 2 opera por 6h diárias;
- o Setor 3 opera por 18h diárias.

Exemplo de aplicação de Problema de Otimização

Uma fábrica de móveis produz armários de madeira e metal em três setores distintos:

- Setor 1: produz peças de madeira p/ 1 armário a cada 2h;
- Setor 2: produz peças de metal p/ 1 armário a cada 1h;
- Setor 3: monta os armários, sendo que:
 - cada armário de madeira leva 3h para ser montado;
 - cada armário de metal leva 2h para ser montado.

Sabe-se ainda que:

- o Setor 1 opera por 8h diárias;
- o Setor 2 opera por 6h diárias;
- o Setor 3 opera por 18h diárias.

Problema: Qual a quantidade ideal de produção de cada armário, sabendo que o lucro obtido é de \$300 para cada armário de madeira e de \$500 para cada armário de metal ?

Otimização Linear

Exemplo – *Tabela Resumo*

<i>Setor</i>	<i>Tempo de produção (h)</i>		<i>Tempo de produção diária (h)</i>
	<i>madeira</i>	<i>metal</i>	
<i>1</i>	2	-	8
<i>2</i>	-	1	6
<i>3</i>	3	2	18
<i>Lucro (\$)</i>	300	500	

Otimização Linear

Exemplo – *Tabela Resumo*

<i>Setor</i>	<i>Tempo de produção (h)</i>		<i>Tempo de produção diária (h)</i>
	<i>madeira</i>	<i>metal</i>	
<i>1</i>	2	-	8
<i>2</i>	-	1	6
<i>3</i>	3	2	18
<i>Lucro (\$)</i>	300	500	

Variáveis de otimização:

- no. de armários de madeira: x_1
- no. de armários de metal: x_2

Otimização Linear

Exemplo – *Tabela Resumo*

<i>Setor</i>	<i>Tempo de produção (h)</i>		<i>Tempo de produção diária (h)</i>
	<i>madeira</i>	<i>metal</i>	
<i>1</i>	2	-	8
<i>2</i>	-	1	6
<i>3</i>	3	2	18
<i>Lucro (\$)</i>	300	500	

Variáveis de otimização:

- no. de armários de madeira: x_1
- no. de armários de metal: x_2

Restrições:

- i) $2x_1 \leq 8$ (h)
- ii) $x_2 \leq 6$ (h)
- iii) $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ (h)

Otimização Linear

Exemplo – *Tabela Resumo*

<i>Setor</i>	<i>Tempo de produção (h)</i>		<i>Tempo de produção diária (h)</i>
	<i>madeira</i>	<i>metal</i>	
1	2	-	8
2	-	1	6
3	3	2	18
<i>Lucro (\$)</i>	300	500	

Variáveis de otimização:

- no. de armários de madeira: x_1
- no. de armários de metal: x_2

Restrições:

- i) $2x_1 \leq 8$ (h)
- ii) $x_2 \leq 6$ (h)
- iii) $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ (h)

Função Objetivo:

$$Z = 300 \cdot x_1 + 500 \cdot x_2$$

Otimização Linear

Exemplo – *Tabela Resumo*

<i>Setor</i>	<i>Tempo de produção (h)</i>		<i>Tempo de produção diária (h)</i>
	<i>madeira</i>	<i>metal</i>	
<i>1</i>	2	-	8
<i>2</i>	-	1	6
<i>3</i>	3	2	18
<i>Lucro (\$)</i>	300	500	

Variáveis de otimização:

- no. de armários de madeira: x_1
- no. de armários de metal: x_2

Restrições:

- i) $2x_1 \leq 8$ (h)
- ii) $x_2 \leq 6$ (h)
- iii) $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ (h)

Função Objetivo:

$$Z = 300.x_1 + 500.x_2$$

Otimização Linear

Exemplo – *Problema de Otimização*

Maximizar: $Z = 300 \cdot x_1 + 500 \cdot x_2$

Sujeito a:

$$2 \cdot x_1 \leq 8$$

$$x_2 \leq 6$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Otimização Linear

Exemplo – *Problema de Otimização*

Maximizar: $Z = 300 \cdot x_1 + 500 \cdot x_2$ (*função objetivo*)

Sujeito a:

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot x_1 \leq 8 \\ x_2 \leq 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right\} \text{(restrições)}$$

Otimização Linear

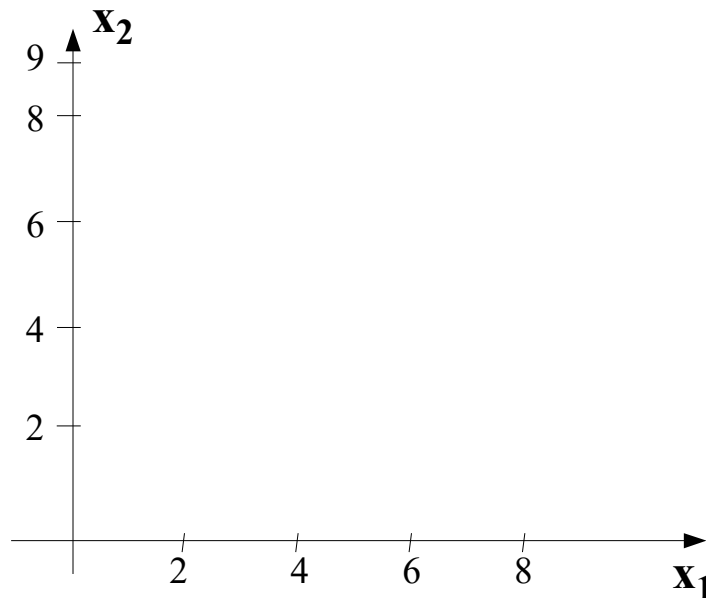
Exemplo – *Problema de Otimização*

Maximizar: $Z = 300 \cdot x_1 + 500 \cdot x_2$ (*função objetivo*)

Sujeito a:

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot x_1 \leq 8 \\ x_2 \leq 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right\} \text{(restrições)}$$

Representação Gráfica:



Otimização Linear

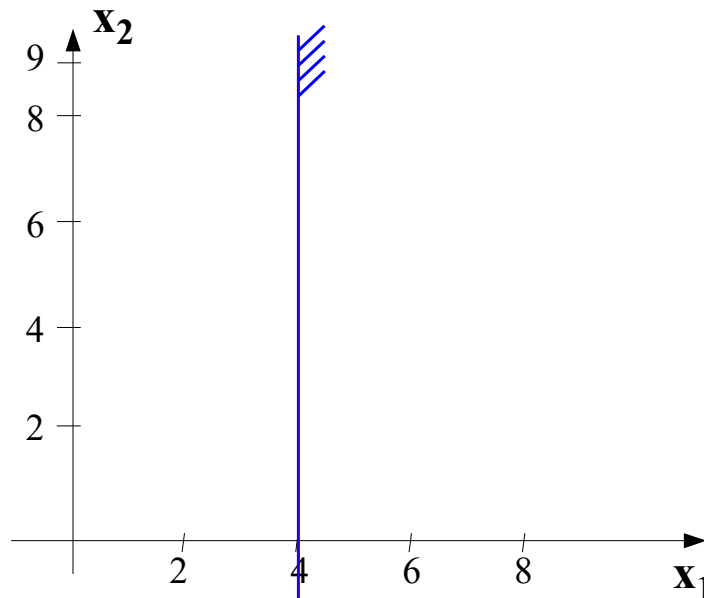
Exemplo – *Problema de Otimização*

Maximizar: $Z = 300 \cdot x_1 + 500 \cdot x_2$ (*função objetivo*)

Sujeito a:

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot x_1 \leq 8 \\ x_2 \leq 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right\} \text{(restrições)}$$

Representação Gráfica:



Otimização Linear

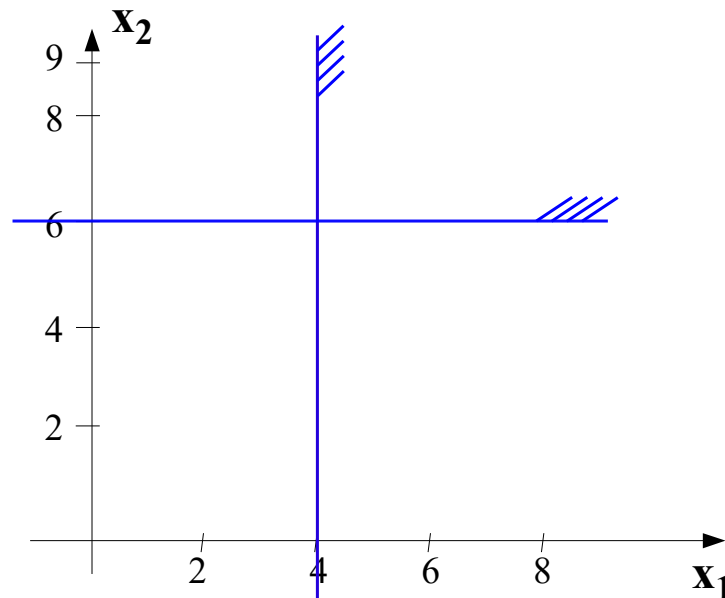
Exemplo – *Problema de Otimização*

Maximizar: $Z = 300.x_1 + 500.x_2$ (*função objetivo*)

Sujeito a:

$$\left. \begin{array}{l} 2.x_1 \leq 8 \\ \boxed{x_2 \leq 6} \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right\} \text{(restrições)}$$

Representação Gráfica:



Otimização Linear

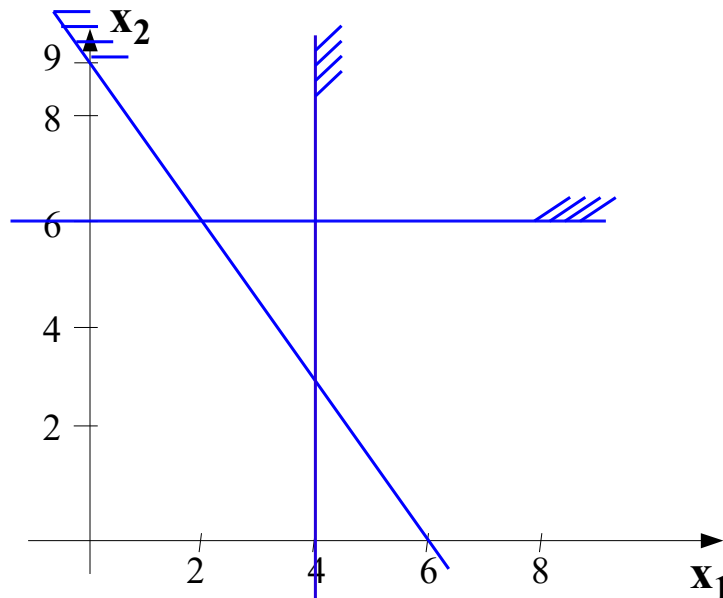
Exemplo – *Problema de Otimização*

Maximizar: $Z = 300 \cdot x_1 + 500 \cdot x_2$ (*função objetivo*)

Sujeito a:

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot x_1 \leq 8 \\ x_2 \leq 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right\} \text{(restrições)}$$

Representação Gráfica:



Otimização Linear

Exemplo – *Problema de Otimização*

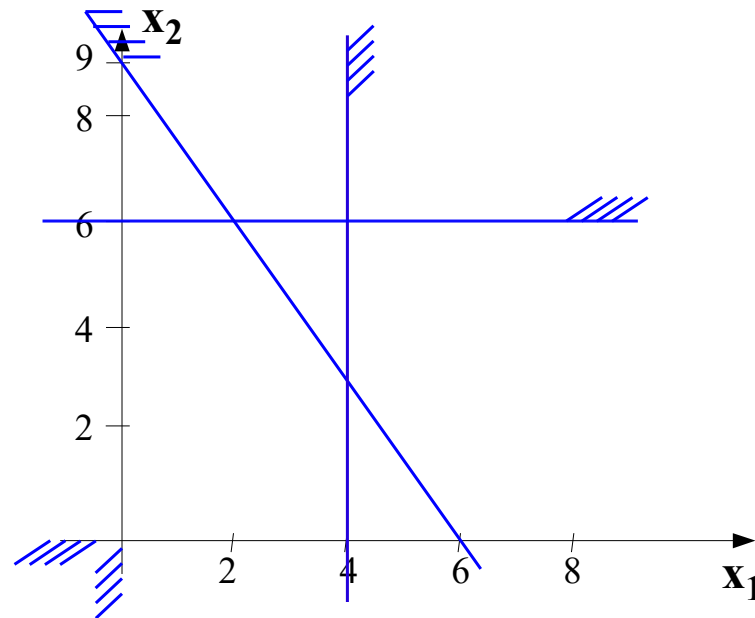
Maximizar: $Z = 300 \cdot x_1 + 500 \cdot x_2$ (*função objetivo*)

Sujeito a:

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot x_1 \leq 8 \\ x_2 \leq 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \end{array} \right\} \text{(restrições)}$$

$$\begin{array}{l} x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array}$$

Representação Gráfica:



Otimização Linear

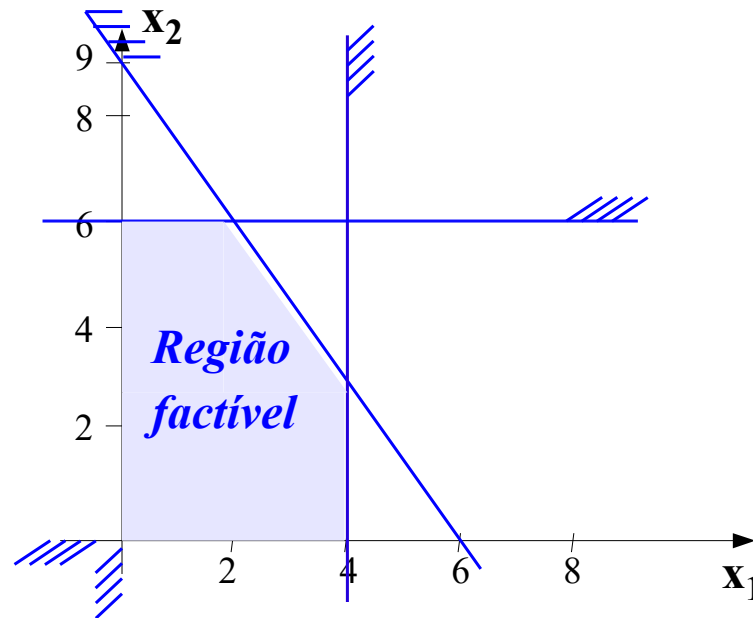
Exemplo – *Problema de Otimização*

Maximizar: $Z = 300.x_1 + 500.x_2$ (*função objetivo*)

Sujeito a:

$$\left. \begin{array}{l} 2.x_1 \leq 8 \\ x_2 \leq 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right\} \text{(restrições)}$$

Representação Gráfica:



Otimização Linear

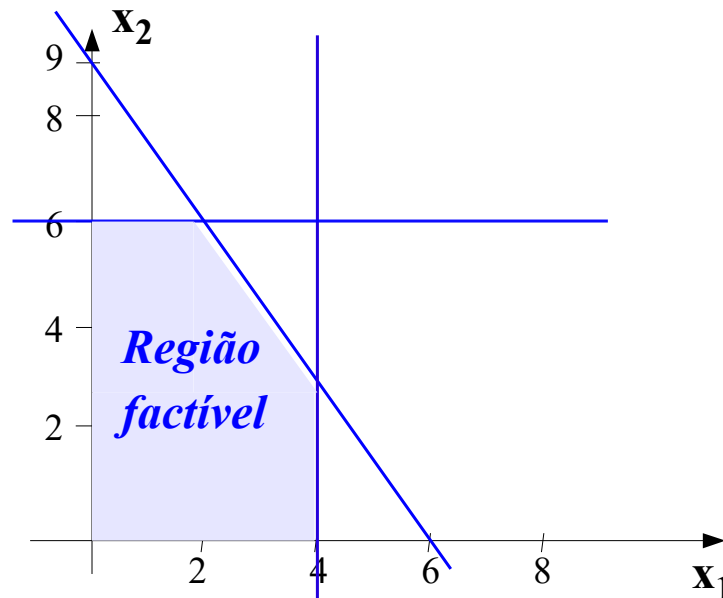
Exemplo – *Problema de Otimização*

Maximizar: $Z = 300.x_1 + 500.x_2$ (*função objetivo*)

Sujeito a:

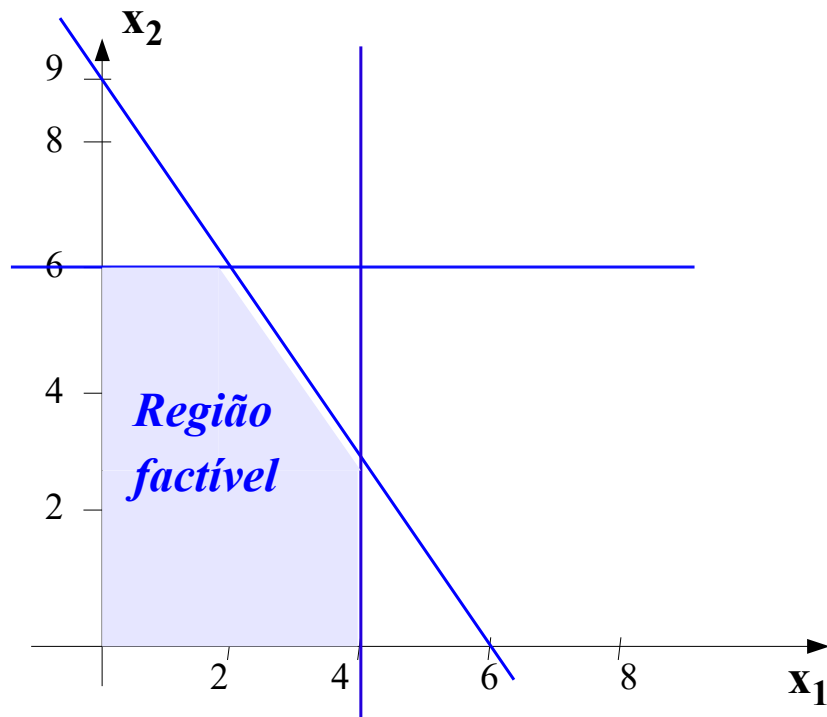
$$\left. \begin{array}{l} 2.x_1 \leq 8 \\ x_2 \leq 6 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0 \end{array} \right\} \text{(restrições)}$$

Representação Gráfica:



Otimização Linear

Exemplo – *Representação Gráfica*



Função Objetivo:

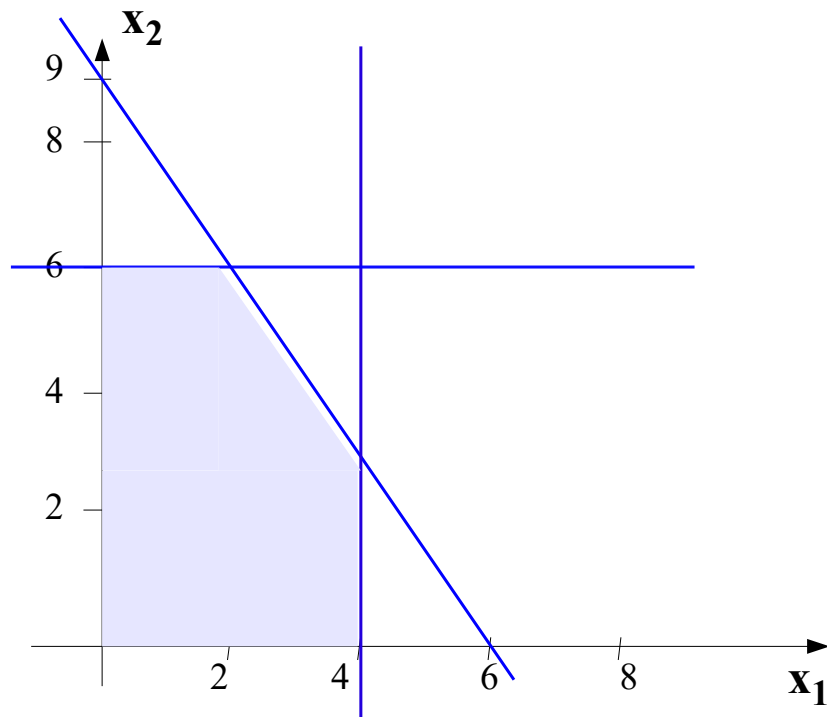
$$Z = 300 \cdot x_1 + 500 \cdot x_2$$

Na forma $y = ax + b$ tem-se:

$$x_2 = -(300/500) x_1 + Z/500$$

Otimização Linear

Exemplo – *Representação Gráfica*



Função Objetivo:

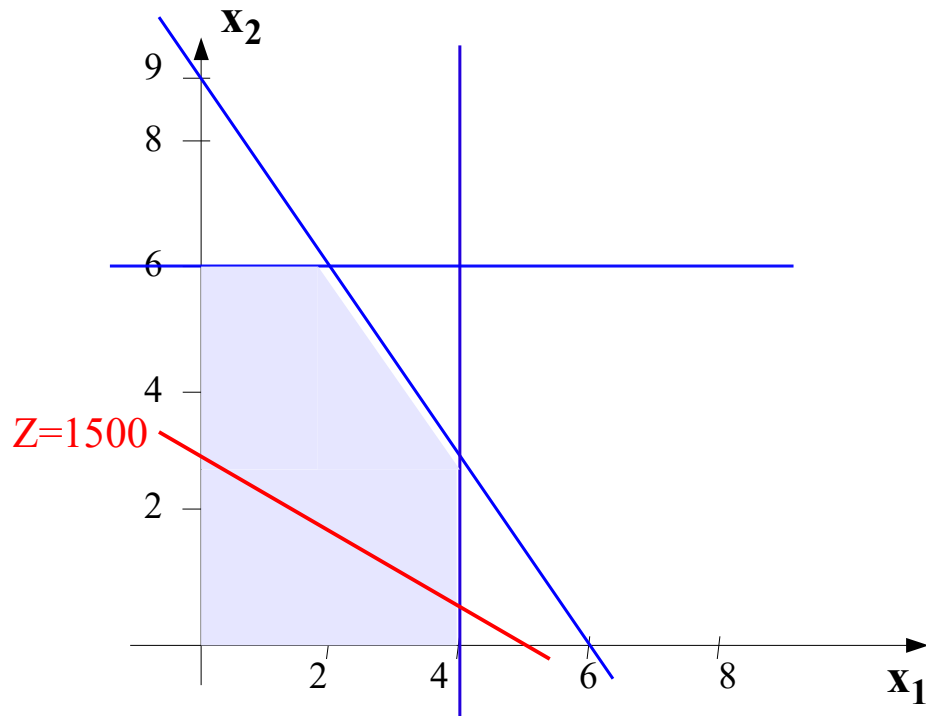
$$Z = 300 \cdot x_1 + 500 \cdot x_2$$

Na forma $y = ax + b$ tem-se:

$$x_2 = \underbrace{-(300/500)}_{\text{constante}} x_1 + \underbrace{Z/500}_{\text{variável}}$$

Otimização Linear

Exemplo – *Representação Gráfica*



Função Objetivo:

$$Z = 300 \cdot x_1 + 500 \cdot x_2$$

Na forma $y = ax + b$ tem-se:

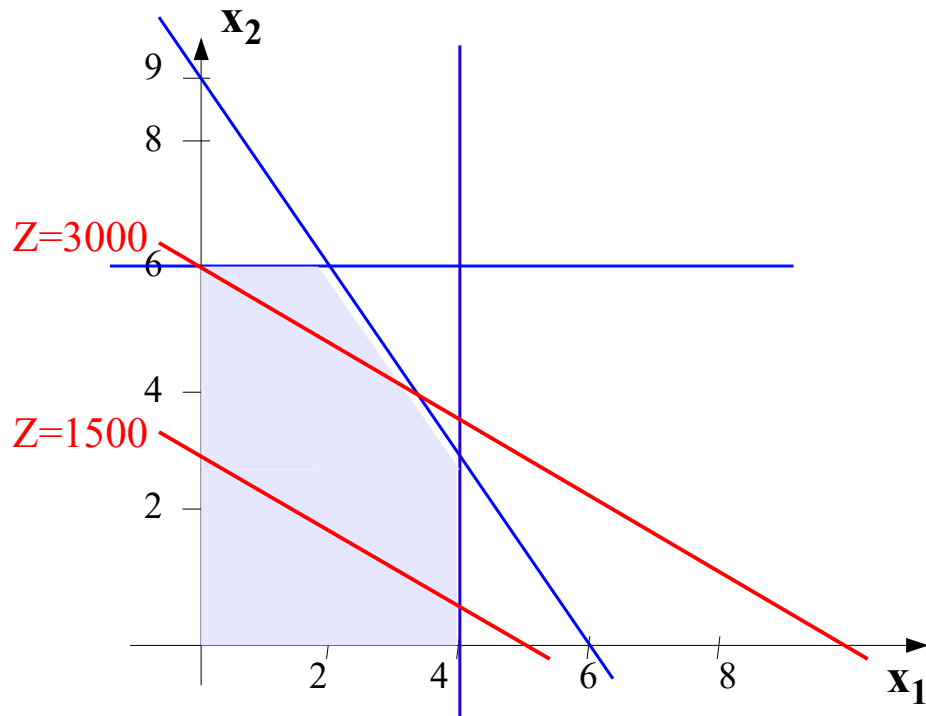
$$x_2 = -\underbrace{(300/500)}_{\text{constante}} x_1 + \underbrace{Z/500}_{\text{variável}}$$

ex.:

$$\text{p/ } Z=1500 \rightarrow x_2 = -\frac{3}{5} x_1 + 3$$

Otimização Linear

Exemplo – *Representação Gráfica*



Função Objetivo:

$$Z = 300.x_1 + 500.x_2$$

Na forma $y = ax + b$ tem-se:

$$x_2 = -(300/500) x_1 + Z/500$$

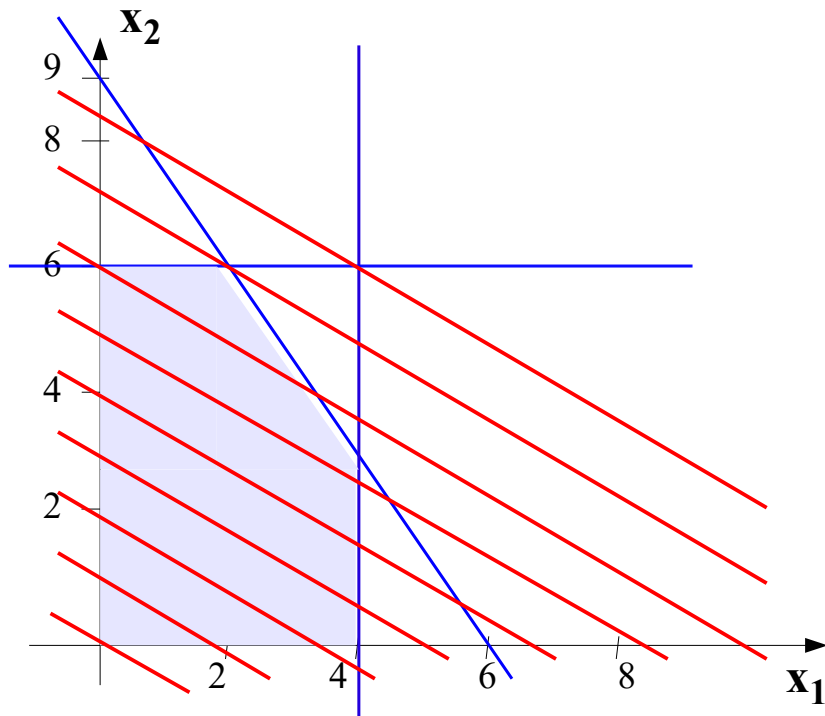
ex.:

$$p/ Z=1500 \rightarrow x_2 = -(3/5) x_1 + 3$$

$$p/ Z=3000 \rightarrow x_2 = -(3/5) x_1 + 6$$

Otimização Linear

Exemplo – *Representação Gráfica*



Função Objetivo:

$$Z = 300 \cdot x_1 + 500 \cdot x_2$$

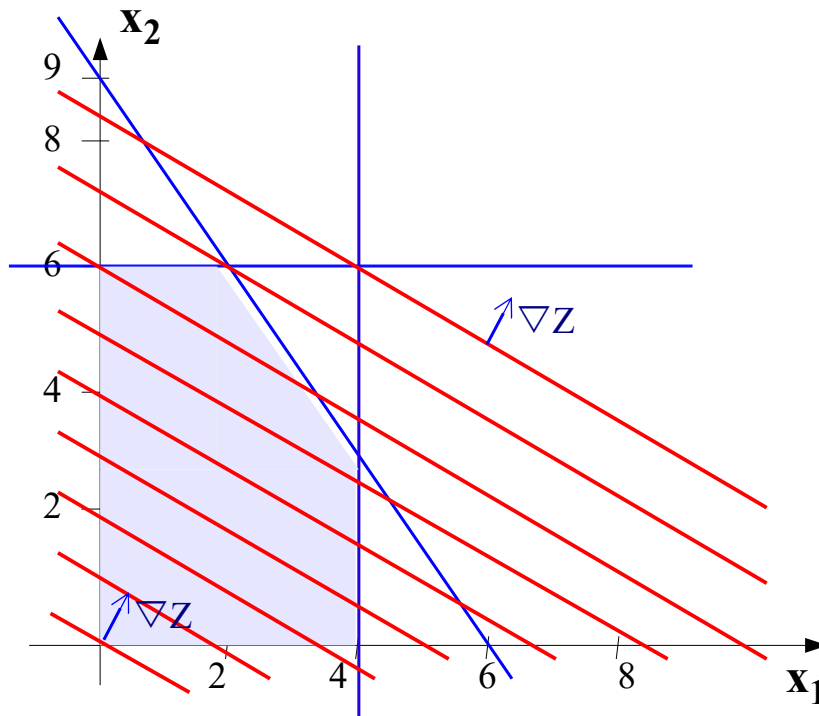
Na forma $y = ax + b$ tem-se:

$$x_2 = -(300/500) x_1 + Z/500$$

➤ Curvas de nível \Leftrightarrow retas paralelas

Otimização Linear

Exemplo – Representação Gráfica



Função Objetivo:

$$Z = 300 \cdot x_1 + 500 \cdot x_2$$

Na forma $y = ax + b$ tem-se:

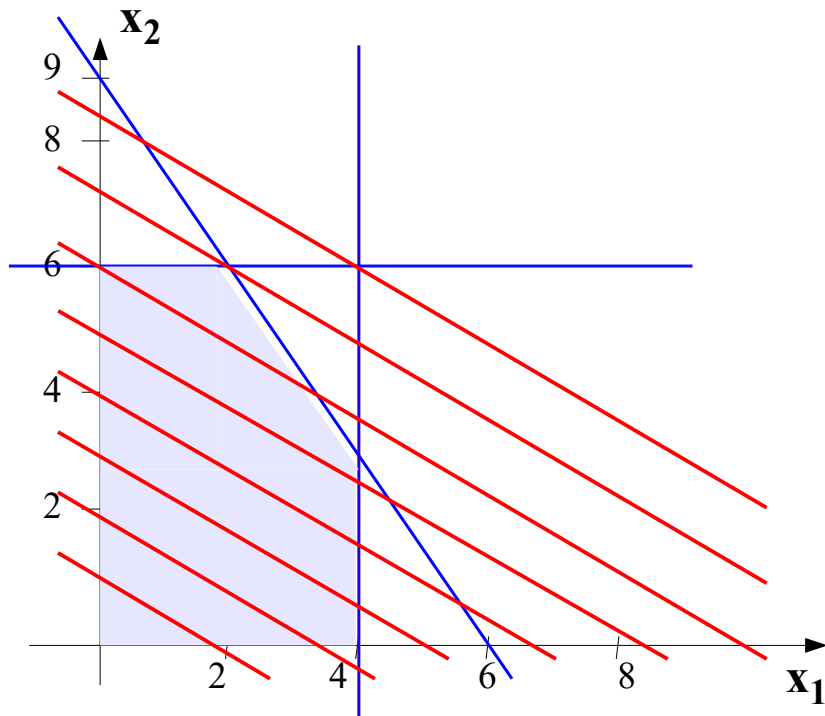
$$x_2 = -(300/500) x_1 + Z/500$$

- Curvas de nível \Leftrightarrow retas paralelas
- Gradiente da FO \Leftrightarrow perpendicular às curvas de nível

$$\nabla Z = [300 \quad 500]$$

Otimização Linear

Exemplo – *Representação Gráfica*

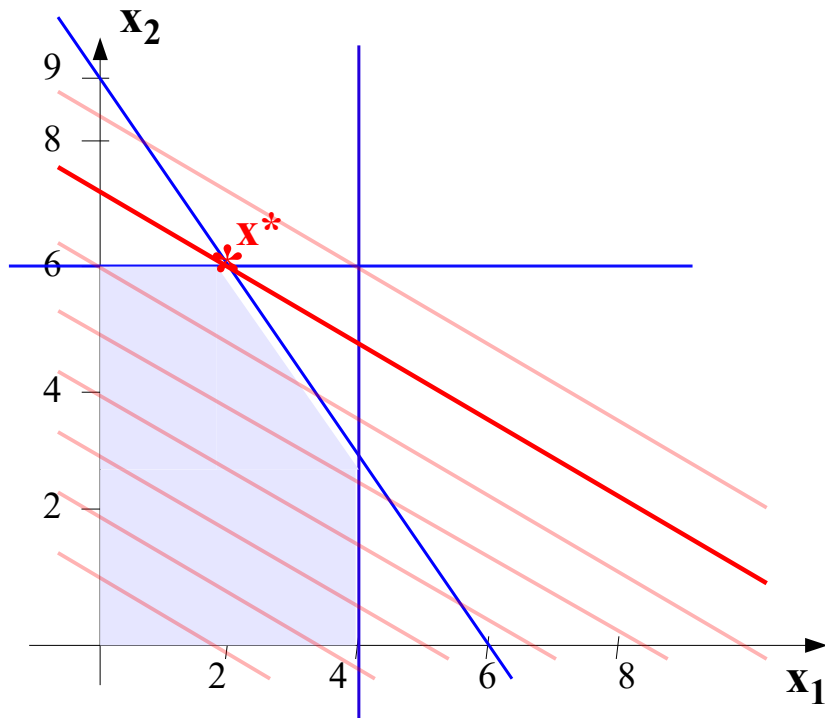


Solução Ótima:

- Curva de nível que apresenta o maior valor (p/ maximização) dentro da Região Factível.

Otimização Linear

Exemplo – *Representação Gráfica*

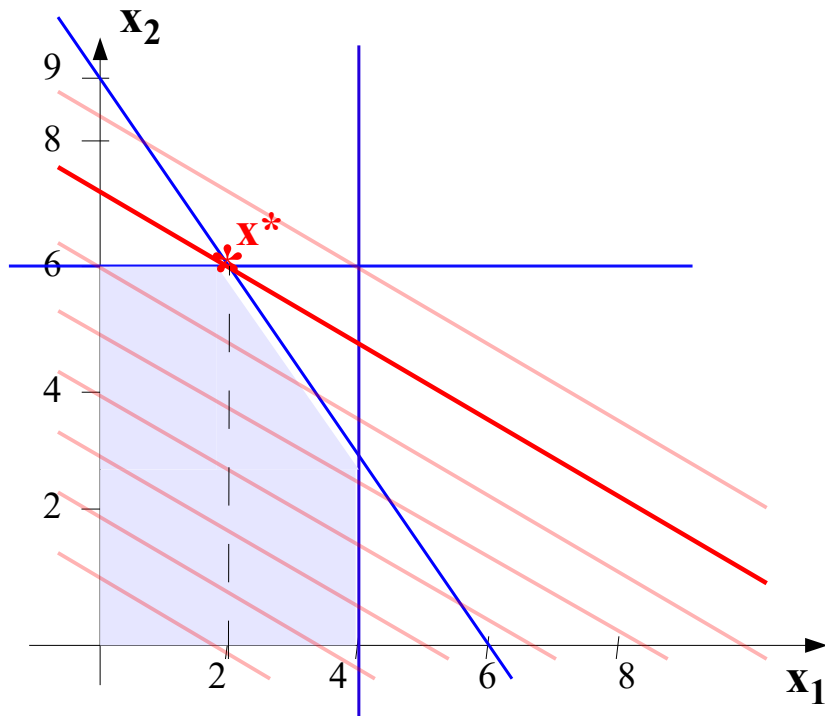


Solução Ótima:

- Curva de nível que apresenta o maior valor (p/ maximização) dentro da Região Factível.

Otimização Linear

Exemplo – *Representação Gráfica*



Solução Ótima:

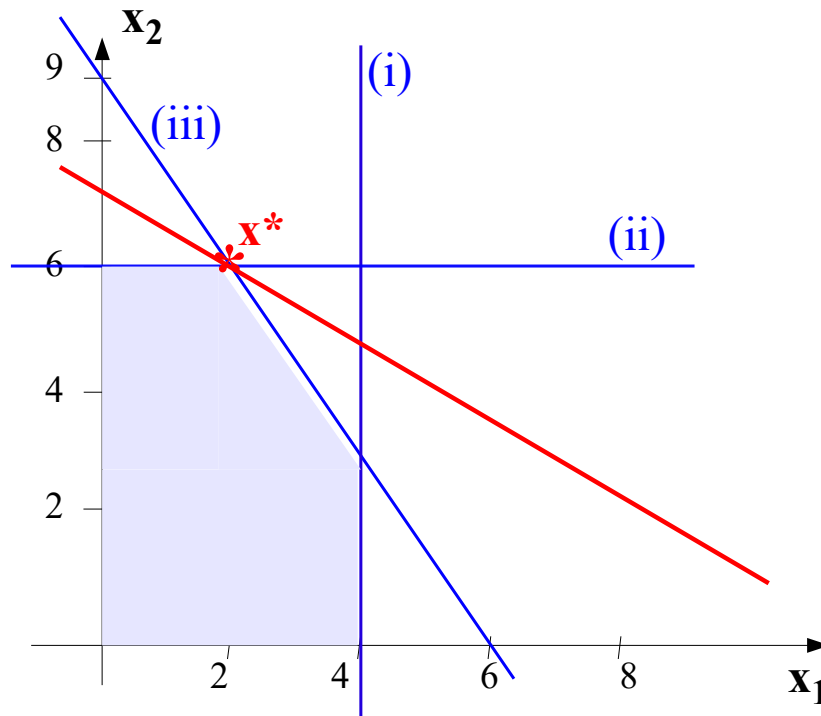
➤ Curva de nível que apresenta o maior valor (p/ maximização) dentro da Região Factível.

$$x^* = (2, 6) \quad \begin{cases} x_1^* = 2 \\ x_2^* = 6 \end{cases}$$

$$Z^* = 300 \cdot x_1^* + 500 \cdot x_2^* = \mathbf{3600}$$

Otimização Linear

Exemplo – *Representação Gráfica*



Solução Ótima:

➤ Curva de nível que apresenta o maior valor (p/ maximização) dentro da Região Factível.

$$x^* = (2, 6) \quad \begin{cases} x_1^* = 2 \\ x_2^* = 6 \end{cases}$$

$$Z^* = 300 \cdot x_1^* + 500 \cdot x_2^* = \mathbf{3600}$$

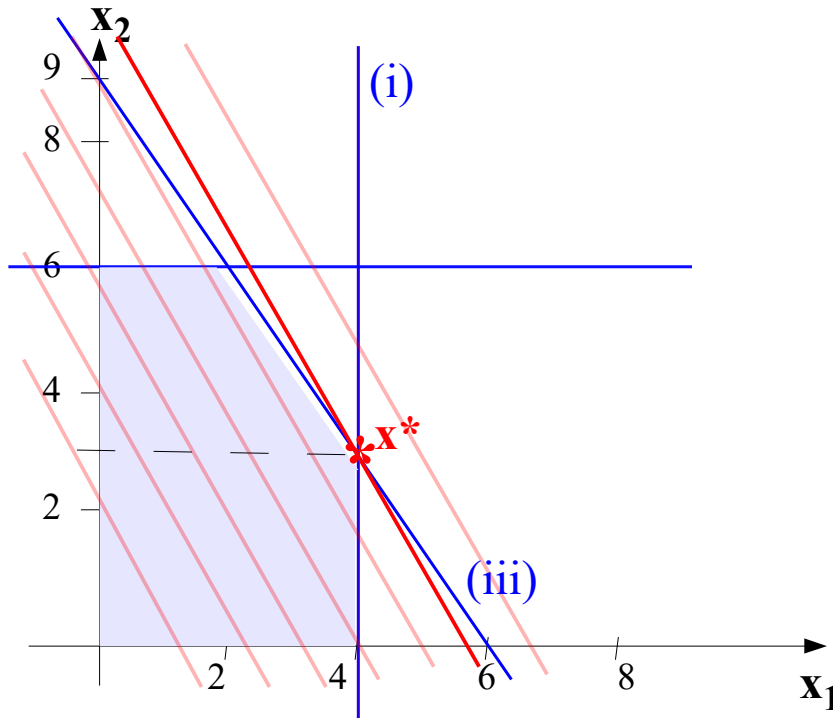
Obs.:

- (ii) e (iii) são restrições ativas

Otimização Linear

Exemplo – *Outras Situações*

Se (1): o lucro c/ móvel de madeira triplicar, ou seja: $Z = 900.x_1 + 500.x_2$



Nova Solução Ótima:

$$x^* = (4, 3) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1^* = 4 \\ x_2^* = 3 \end{array} \right.$$

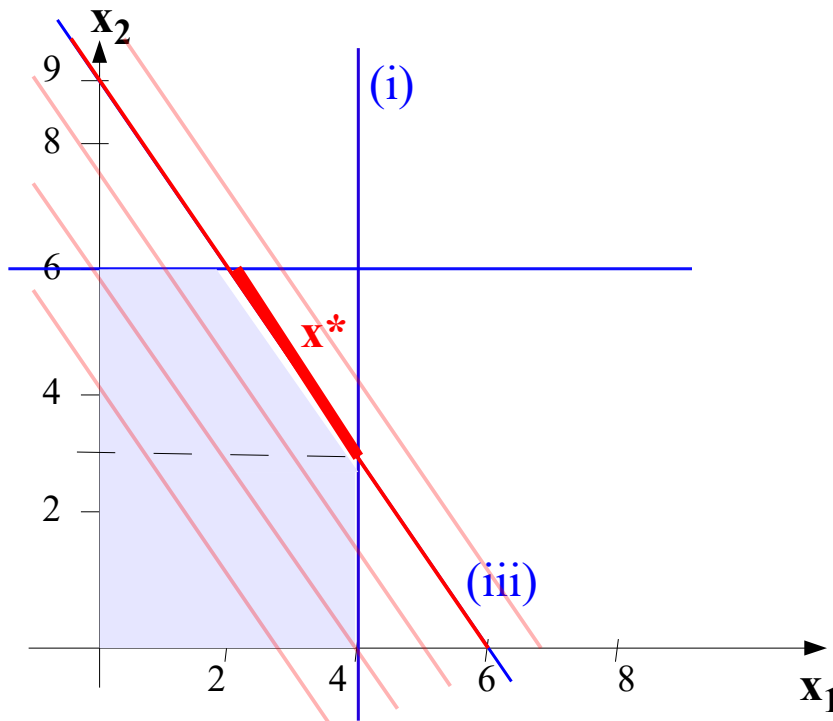
$$Z^* = 900.x_1^* + 500.x_2^* = \mathbf{5100}$$

➤ (i) e (iii) são restrições ativas

Otimização Linear

Exemplo – *Outras Situações*

Se (2): o lucro c/ móvel de metal aumentar para \$600, ou seja: $Z = 900.x_1 + 600.x_2$



Multiplas (infinitas) Soluções Ótimas:

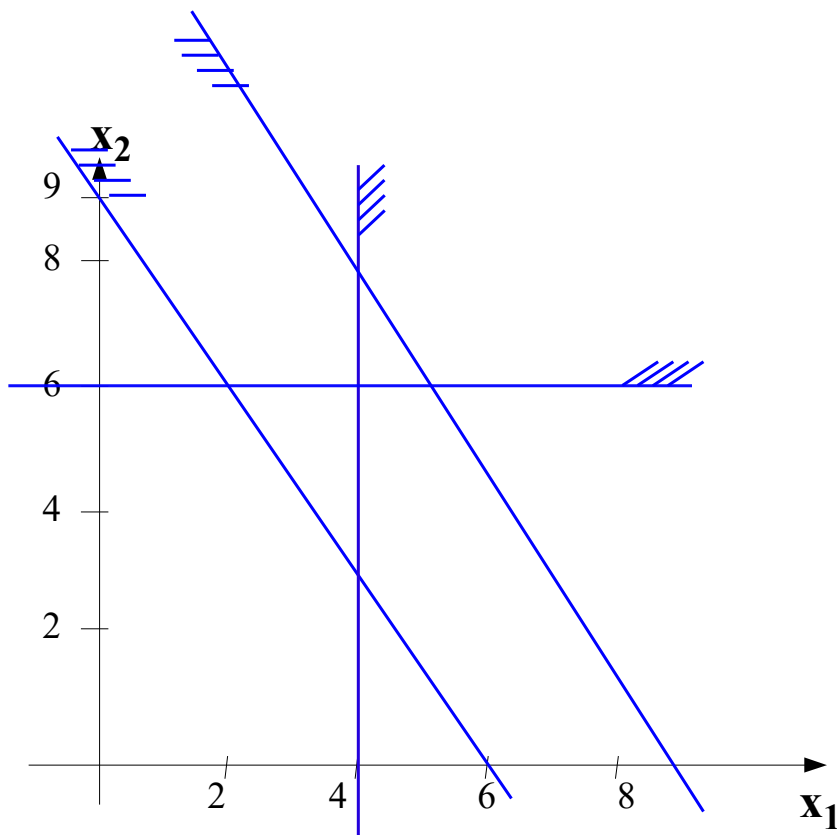
x^* = todos os pontos sobre a restrição (iii)
entre os pontos (2, 6) e (4, 3)

$$Z^* = 900.x_1^* + 600.x_2^* = \mathbf{5400}$$

Otimização Linear

Exemplo – *Outras Situações*

Se (3): lucro mínimo deve ser \$8000, ou seja: Nova restrição $900.x_1 + 600.x_2 \geq 8000$



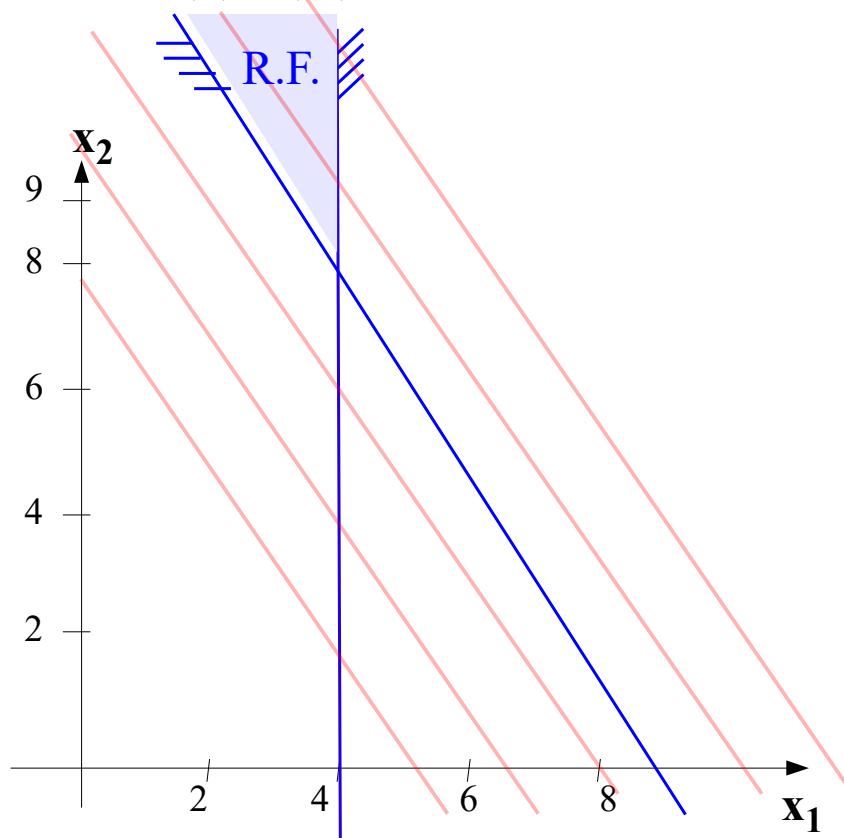
Região Factível Vazia:

$$\mathbf{x}^* = \{ \}$$

Otimização Linear

Exemplo – *Outras Situações*

Se (4): Restrições (ii) e (iii) deixarem de existir



Solução Ilimitada:

$$\mathbf{x}^* = (4, \infty)$$

$$Z^* = \infty$$

Otimização Linear

Generalizando a partir dos exemplos:

- Se existir uma solução ótima (finita), então existe pelo menos um Ponto Extremo (**vértice**) do conjunto de soluções factíveis que é Ótimo.
- O conjunto das soluções candidatas a ótimo de um Problema de Otimização Linear fica circunscrito a um **número finito** de pontos, ou seja, os vértices da Região Factível.

Exemplo proposto:

Um produtor independente de energia elétrica dispõe de duas unidades de geração, que podem ser conectadas ao sistema elétrico em pontos distintos, para a venda do excedente de energia elétrica que são capazes de produzir. Tanto os custos de produção quanto as tarifas para a venda de energia são distintos para os dois geradores. O produtor deseja vender o máximo possível de energia, seguindo, entretanto, seu plano de negócios, que não permite gastar acima de um valor pré-estabelecido para a produção de energia elétrica.

Os dados do problema estão na tabela abaixo:

	Gerador 1	Gerador 2
Capacidade de Produção (MWh)	5.000	7.000
Custo de Produção (\$/MWh)	50	100
Tarifa de venda (\$/MWh)	90	120
Máximo custo de produção total (\$)	800.000	

- i) Monte o Problema de Otimização Linear e determine a solução ótima do problema;
- ii) Determine a nova solução ótima do problema, caso:
 - a. o máximo custo de produção total caia para \$ 750.000.
 - b. a máxima capacidade de produção do Gerador 1 suba para 5.200 MWh.