Exemplo de aplicação de Problema de Otimização

Um produtor independente de energia elétrica dispõe de duas unidades de geração (UG), que podem ser conectadas ao sistema elétrico em pontos distintos, para a venda do excedente de energia elétrica que são capazes de produzir. A UG1 tem capacidade de produção de 4MWh a um custo de 3 $/MWh, enquanto a UG2 tem capacidade de produção de 6MWh a um custo de 2 $/MWh. As tarifas para a venda de energia são distintos para os dois geradores, sendo de 6 $/MWh para a UG1 e de 7 $/MWh para a UG2.

O produtor deseja obter o máximo lucro com a venda de energia, seguindo, entretanto, seu plano de negócios, que não permite gastar acima de 18 $ para produção de energia.

Otimização Linear

Exemplo – *Tabela Resumo*

Restrições	*UG1*	*UG2*	*Quantidade Limite*
Capacidade da UG1	1	-	4 MWh
Capacidade da UG2	-	1	6 MWh
Custo de produção	3	2	18 $/MWh
Tarifa de Venda ($)	6	7	
Lucro ($)	3	5	

Variáveis de otimização:

- produção da UG1: $\mathbf{x_1}$
- produção da UG2: $\mathbf{x_2}$

Restrições:

i) $\mathbf{x_1} \leq 4$ (MWh)

ii) $\mathbf{x_2} \leq 6$ (MWh)

iii) $3\mathbf{x_1} + 2\mathbf{x_2} \leq 18$ ($/MWh)

Função Objetivo:

Maximizar $Z = 3.\mathbf{x_1} + 5.\mathbf{x_2}$

Otimização Linear

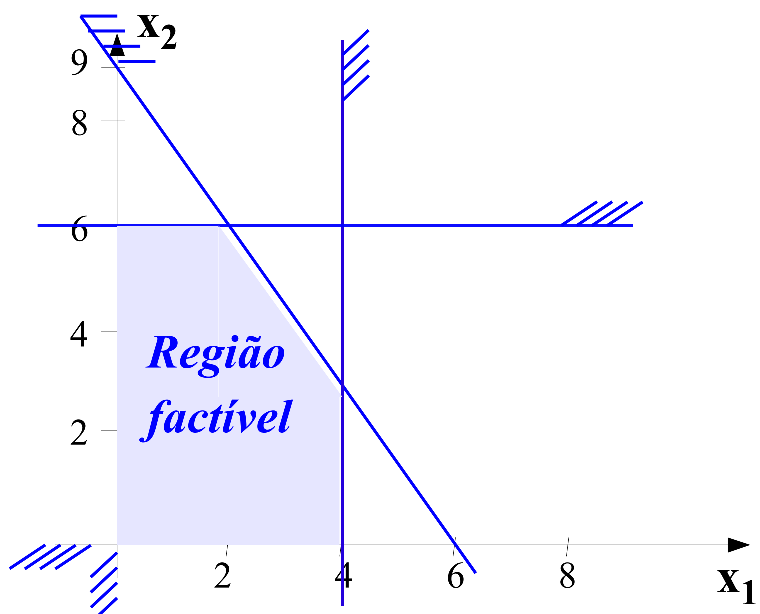
Exemplo – *Problema de Otimização*

Maximizar: $Z = 3.\mathbf{x_1} + 5.\mathbf{x_2}$ *(função objetivo)*

Sujeito a:

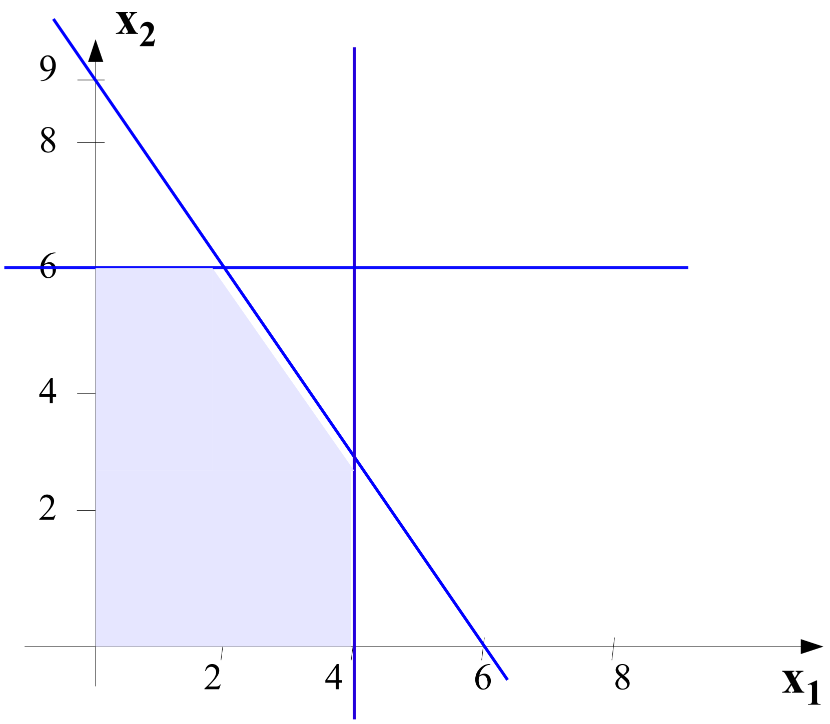
$$\left.\begin{array}{rl} x_1 & \leq 4 \\ \mathbf{x_2} & \leq 6 \\ 3\mathbf{x_1} + 2\mathbf{x_2} & \leq 18 \\ \mathbf{x_1} & \geq 0 \\ \mathbf{x_2} & \geq 0 \end{array}\right\} \textit{(restrições)}$$

Representação Gráfica:



Otimização Linear

Exemplo – *Representação Gráfica*



Função Objetivo:

$$Z = 3.\mathbf{x_1} + 5.\mathbf{x_2}$$

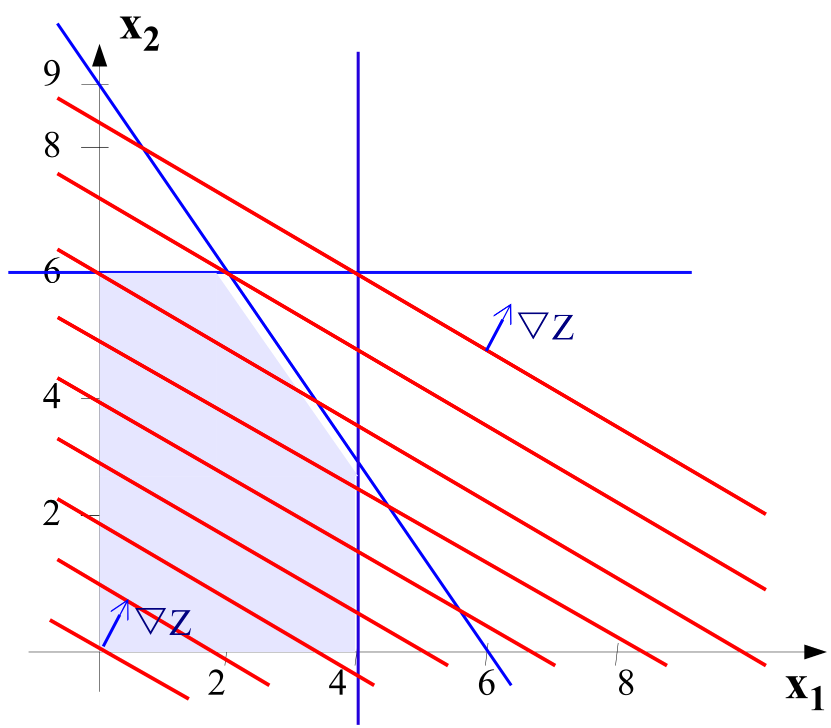
Na forma $y = ax + b$ tem-se:

$$\mathbf{x_2} = -(3/5)\ \mathbf{x_1} + Z/5$$

constante *variável*

Otimização Linear

Exemplo – *Representação Gráfica*



Função Objetivo:

$Z = 3.\mathbf{x_1} + 5.\mathbf{x_2}$

Na forma $y = ax + b$ tem-se:

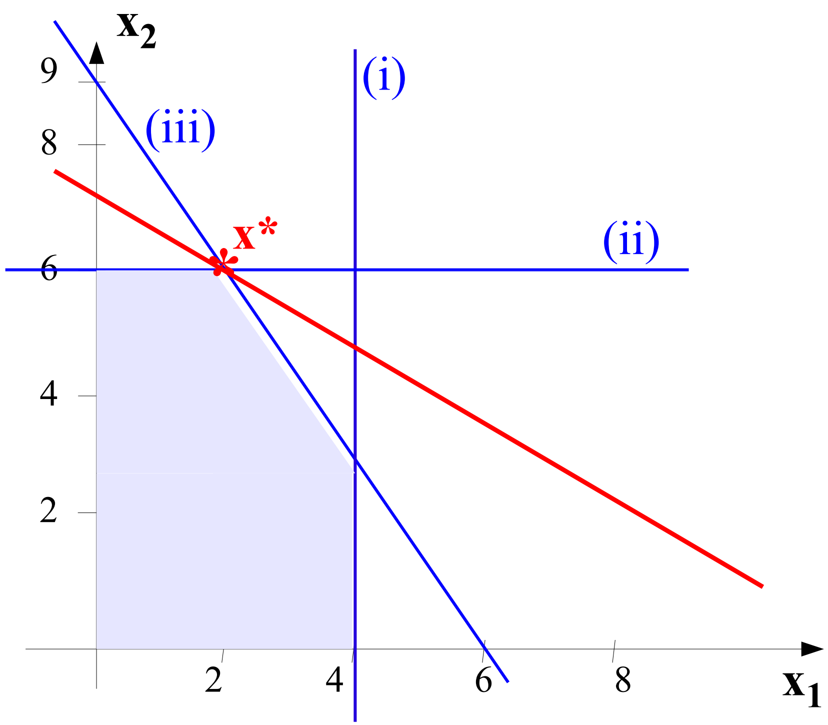
$\mathbf{x_2} = -(3/5)\ \mathbf{x_1} + Z/5$

- Curvas de nível ⇨ retas paralelas
- Gradiente da FO ⇨ perpendicular às curvas de nível

$\nabla Z = [3 \quad 5]$

Otimização Linear

Exemplo – *Representação Gráfica*



Solução Ótima:

➢ Curva de nível que apresenta o maior valor (p/ maximização) dentro da Região Factível.

$$\mathbf{x^*} = (2, 6) \quad \begin{cases} \mathbf{x_1^*} = 2 \\ \mathbf{x_2^*} = 6 \end{cases}$$

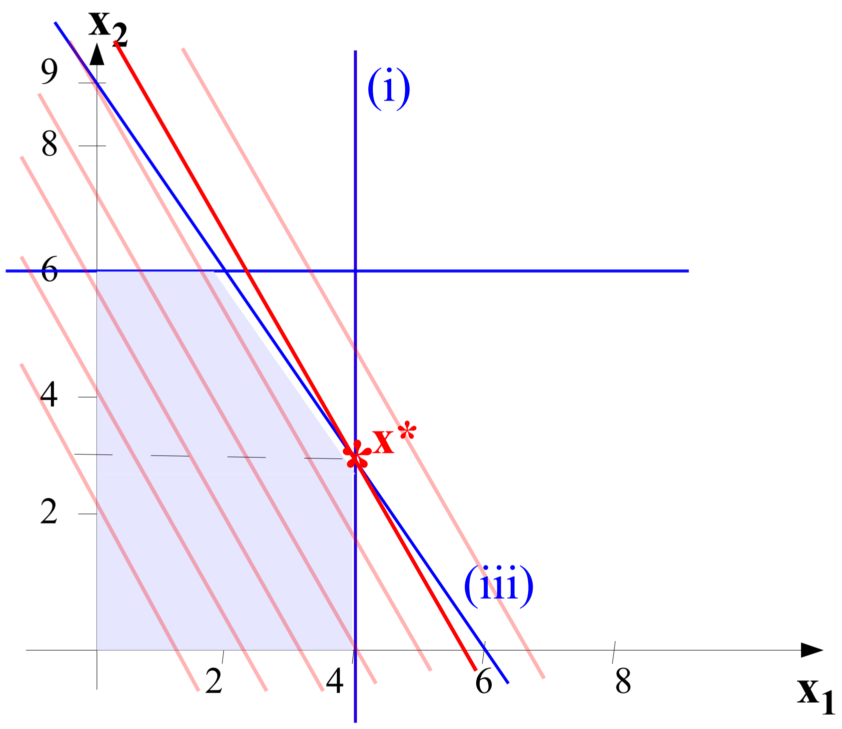
$$Z^* = 3.\mathbf{x_1^*} + 5.\mathbf{x_2^*} = \mathbf{36}$$

Obs.:
- (ii) e (iii) são restrições ativas

Otimização Linear

Exemplo – *Outras Situações*

Se (1): o lucro da UG1 triplicar, ou seja: $Z = 9.\mathbf{x_1} + 5.\mathbf{x_2}$



Nova Solução Ótima:

$$\mathbf{x^*} = (4, 3) \quad \begin{cases} \mathbf{x_1^*} = 4 \\ \mathbf{x_2^*} = 3 \end{cases}$$

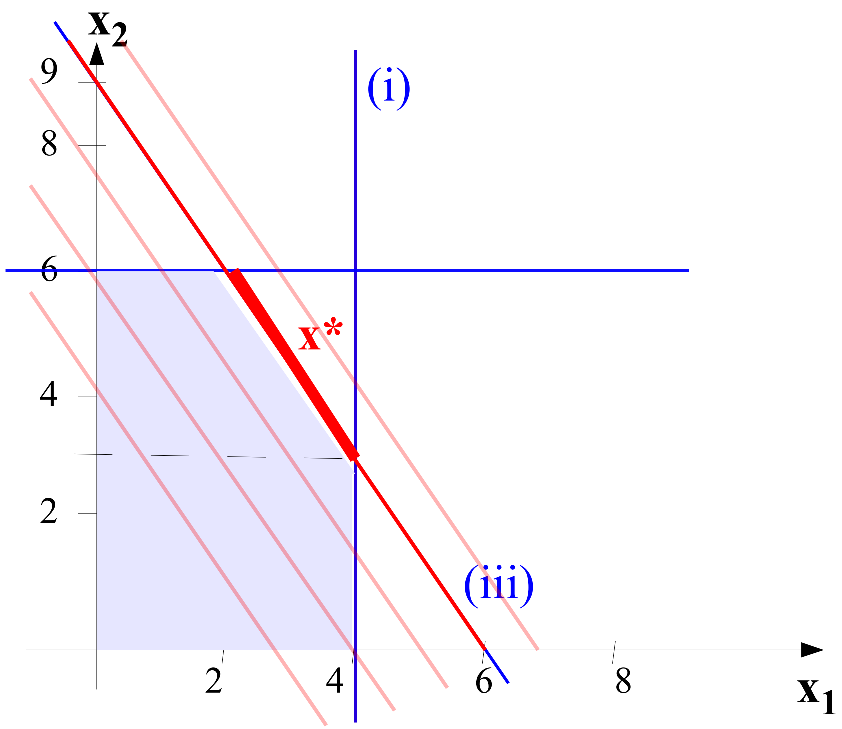
$Z^* = 9.\mathbf{x_1}^* + 5.\mathbf{x_2}^* = \mathbf{51}$

- (i) e (iii) são restrições ativas

Otimização Linear

Exemplo – *Outras Situações*

Se (2): o lucro da UG2 aumentar para \$6, ou seja: $Z = 9.\mathbf{x_1} + 6.\mathbf{x_2}$



<u>Multiplas (infinitas) Soluções Ótimas</u>:

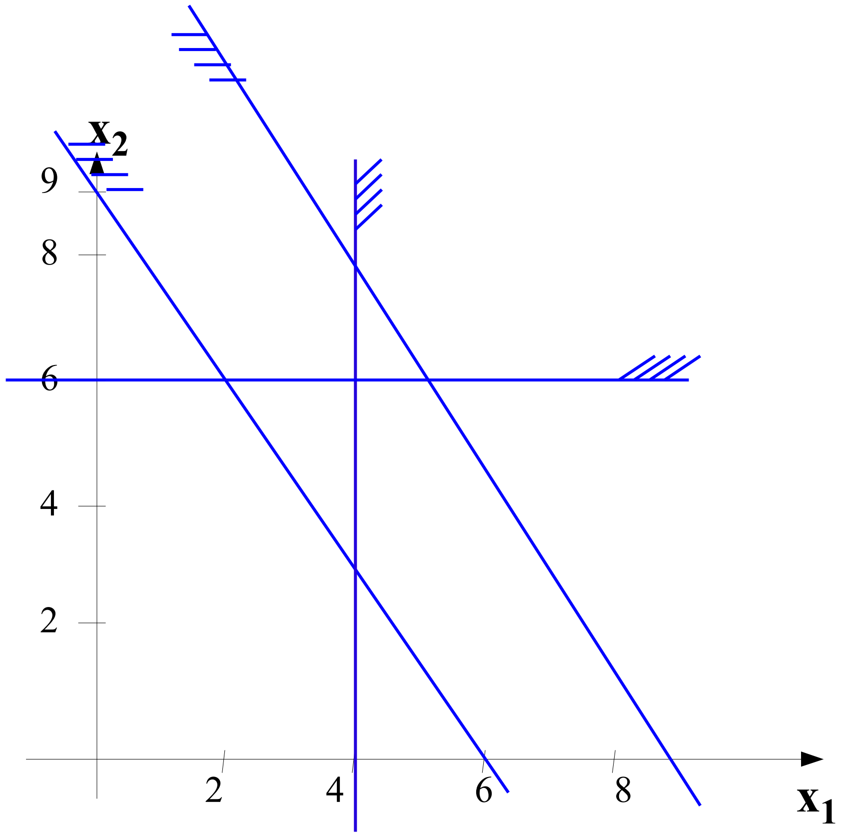
x* = todos os pontos sobre a restrição (iii) entre os pontos (2, 6) e (4, 3)

$Z^* = 9.\mathbf{x_1}^* + 6.\mathbf{x_2}^* = \mathbf{54}$

Otimização Linear

Exemplo – *Outras Situações*

Se (3): lucro mínimo deve ser \$80, ou seja: Nova restrição $9.\mathbf{x_1} + 6.\mathbf{x_2} \geq 80$



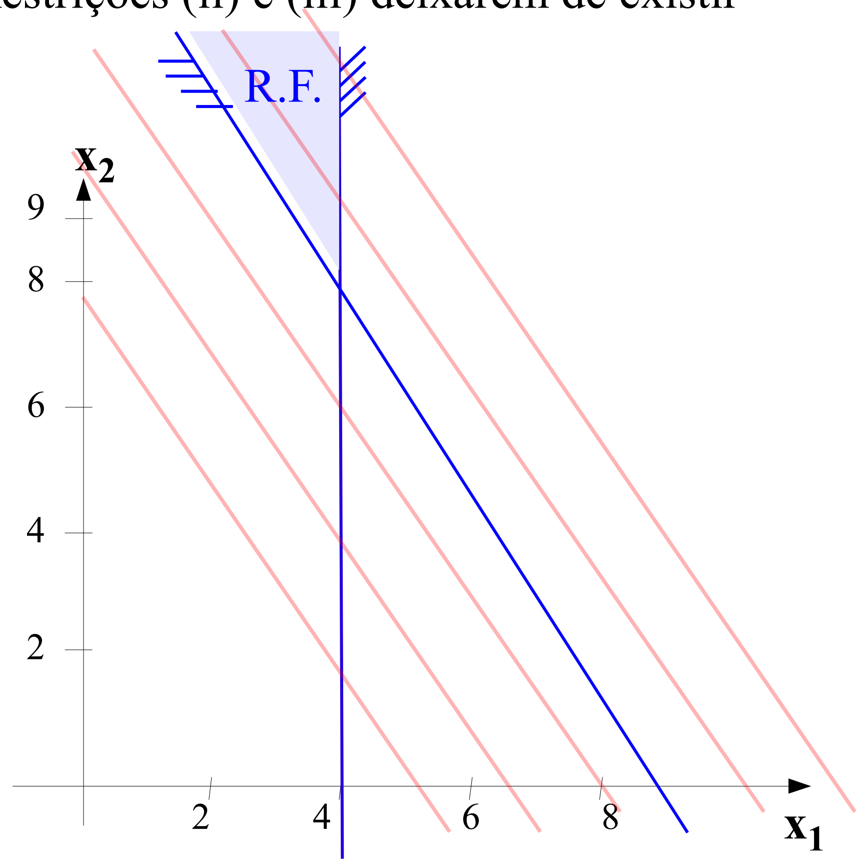
Região Factível Vazia:

$\mathbf{x^*} = \{ \ \}$

Otimização Linear

Exemplo – *Outras Situações*

Se (4): Restrições (ii) e (iii) deixarem de existir



Solução Ilimitada:

$\mathbf{x}^* = (4, \infty)$

$Z^* = \infty$

Otimização Linear

Generalizando a partir dos exemplos:

- Se existir uma solução ótima (finita), então existe pelo menos um Ponto Extremo (**vértice**) do conjunto de soluções factíveis que é Ótimo.

- O conjunto das soluções candidatas a ótimo de um Problema de Otimização Linear fica circunscrito a um **número finito** de pontos, ou seja, os vértices da Região Factível.