Forma Padrão de um P.O.L.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Minimizar } f(x_1, \dots, x_n) = c_1.x_1 + \dots + c_n.x_n \\ \text{Sujeito a:} \\ \qquad a_{11}.x_1 + \dots + a_{1n}.x_n = b_1 \\ \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ \qquad a_{m1}.x_1 + \dots + a_{mn}.x_n = b_m \\ \qquad\quad x_1 \geq 0 , \dots , x_n \geq 0 \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{l} \text{Min } f = \underline{c}' . \underline{x} \\ \text{s.a.} \\ \qquad A_{[m \times n]} . \underline{x}_{[n]} = \underline{b}_{[m]} \\ \qquad \underline{x} \geq 0 \end{array}$$

Obs.:

- Problema de minimização
- Todas as restrições são de igualdade

↳Para converter inequações em equações:

$$\begin{cases} a.x \leq b \;\Rightarrow\; a.x + s = b & \text{(s : variável de folga ou } \textit{slack}\text{)} \\ a.x \geq b \;\Rightarrow\; a.x - s = b & \text{(s : variável de excesso ou } \textit{surplus}\text{)} \end{cases}$$

Forma Padrão de um P.O.L.

Solução Básica:

A partir da Forma Padrão, tomando-se m (no. de restrições) vetores coluna de A, define-se uma BASE (A^I), ou seja:

$$A.\underline{x} = \underline{b} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c:c} A^I & A^J \end{array}\right] \\ {\scriptstyle 1 \quad m \; m+1 \quad n} \end{array} \left(\begin{array}{c} \underline{x}_I \\ \hdashline \underline{x}_J \end{array}\right) \begin{array}{l} {\scriptstyle 1} \\ {\scriptstyle m} \\ {\scriptstyle m+1} \\ {\scriptstyle n} \end{array} = \underline{b}$$

ou:

$$A^I . \underline{x}_I + A^J . \underline{x}_J = \underline{b}$$

logo:

$$\underline{x}_I = (A^I)^{-1} . \underline{b} - (A^I)^{-1} .A^J . \underline{x}_J$$

Assim, uma Solução Básica I é obtida fazendo $\underline{x}_J = 0$.

Então: $\underline{x}_I = (A^I)^{-1} . b \Rightarrow$ Solução Básica do POL

Se ainda: $\underline{x}_I \geq 0 \Rightarrow$ Solução Básica Factível

Forma Padrão de um P.O.L.

No exemplo (das UGs)

Forma Geral

$$\text{Max } Z = 3.\mathbf{x_1} + 5.\mathbf{x_2}$$

s. a:

$$\begin{aligned} 2.x_1 \quad\quad & \leq 8 \\ \mathbf{x_2} & \leq 6 \\ 3\mathbf{x_1} + 2\mathbf{x_2} & \leq 18 \\ \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} & \geq 0 \end{aligned}$$

Forma Padrão

$$\text{Min } W = -3.\mathbf{x_1} - 5.\mathbf{x_2}$$

s. a:

$$\begin{aligned} 2.\mathbf{x_1} \quad\quad + \mathbf{s_1} &= 8 \\ \mathbf{x_2} + \mathbf{s_2} &= 6 \\ 3\mathbf{x_1} + 2\mathbf{x_2} + \mathbf{s_3} &= 18 \\ \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{s_1}, \mathbf{s_2}, \mathbf{s_3} &\geq 0 \end{aligned}$$

Forma Padrão de um P.O.L.

No exemplo (das UGs)

Forma Padrão

$$\text{Min } W = -3.\mathbf{x_1} - 5.\mathbf{x_2}$$

s. a:

$$\begin{aligned} 2.\mathbf{x_1} \quad\quad + s_1 &= 8 \\ \mathbf{x_2} + s_2 &= 6 \\ 3\mathbf{x_1} + 2\mathbf{x_2} + s_3 &= 18 \end{aligned}$$

$$\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{s_1}, \mathbf{s_2}, \mathbf{s_3} \geq 0$$

Matricialmente

$$\text{Min } \underbrace{[-3 \quad -5 \quad 0 \quad 0 \quad 0]}_{c} [\mathbf{x_1} \;\; \mathbf{x_2} \;\; \mathbf{s_1} \;\; \mathbf{s_2} \;\; \mathbf{s_3}]^t$$

s. a:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \\ \mathbf{s_1} \\ \mathbf{s_2} \\ \mathbf{s_3} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix}}_{b}$$

$$\underbrace{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{s_1}, \mathbf{s_2}, \mathbf{s_3}}_{x} \geq 0$$

Solução Básica de um P.O.L.

Assim, uma Solução Básica pode ser obtida fazendo a seguinte divisão:

$$\left(\underbrace{\begin{matrix}2&0&1\\0&1&0\\3&2&0\end{matrix}}_{A^I}\;\middle|\;\underbrace{\begin{matrix}0&0\\1&0\\0&1\end{matrix}}_{A^J}\right)\left(\begin{array}{c}\mathbf{x_1}\\ \mathbf{x_2}\\ \mathbf{s_1}\\ \hline \mathbf{s_2}\\ \mathbf{s_3}\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \underline{x}_I \\ \\ \\ \underline{x}_J \end{array} = \begin{pmatrix}8\\6\\18\end{pmatrix}$$

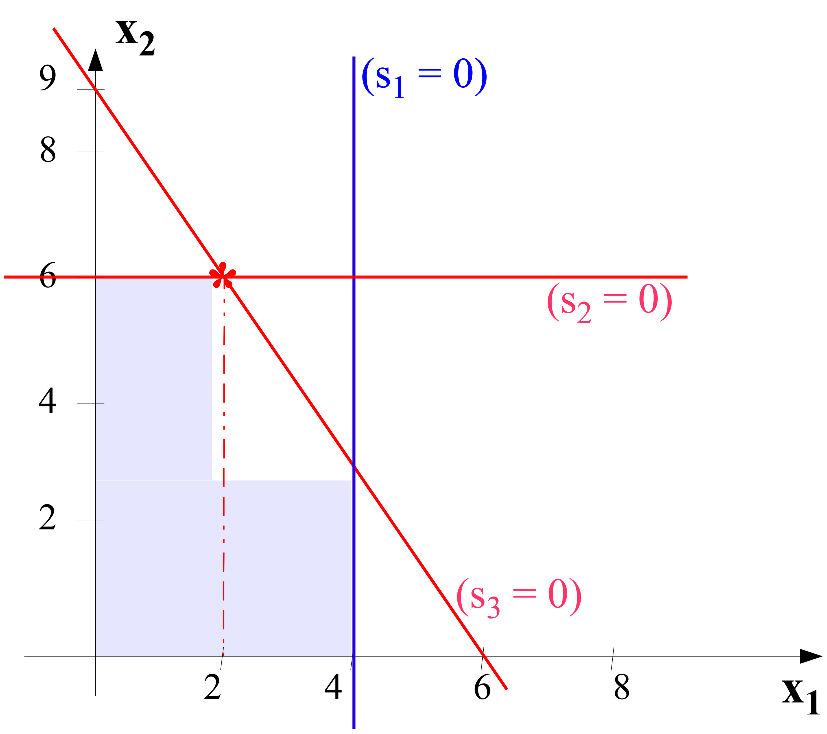
Logo, resolvendo para $\underline{x}_J = 0$:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{x_1}\\ \mathbf{x_2}\\ \mathbf{s_1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&0\\3&2&0\end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix}8\\6\\18\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\6\\4\end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow \text{Solução Básica Factível} \left\{\begin{array}{ll} x_1 = 2 & s_1 = 4 \\ x_2 = 6 & s_2 = 0 \\ & s_3 = 0 \end{array}\right.$$

$$\text{Para essa solução}\left\{\begin{array}{l} \text{Variáveis Básicas} = \{x_1, x_2, s_1\} = \underline{x}_I \\ \\ \text{Variáveis Não-Básicas} = \{s_2, s_3\} = \underline{x}_J \end{array}\right.$$

Solução Básica de um P.O.L.

Representação Gráfica:



Restrições :

$$
\begin{aligned}
2.\mathbf{x_1} \qquad\quad &+ \mathbf{s_1} = 8 \\
\mathbf{x_2} \quad &+ \mathbf{s_2} = 6 \\
3\mathbf{x_1} + 2\mathbf{x_2} \quad &+ \mathbf{s_3} = 18
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \mathbf{s_1}, \mathbf{s_2}, \mathbf{s_3} \geq 0$$

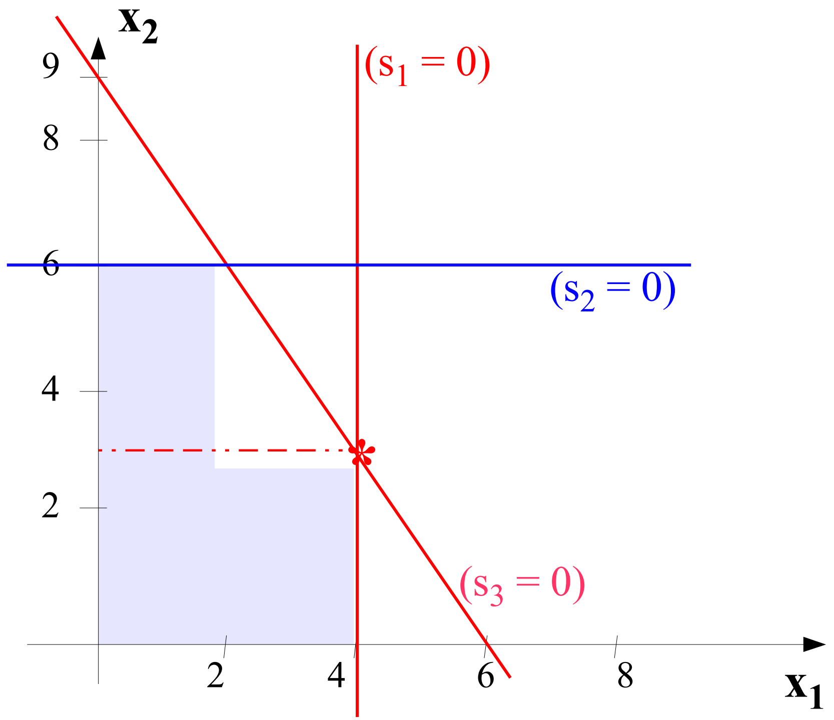
Solução Básica Factível $\begin{cases} x_1 = 2 & s_1 = 4 \\ x_2 = 6 & s_2 = 0 \\ & s_3 = 0 \end{cases}$

$\boxed{\text{Variável Não-Básica} \Rightarrow \text{Restrição Ativa}}$

Solução Básica de um P.O.L.

Escolhendo outras Bases:

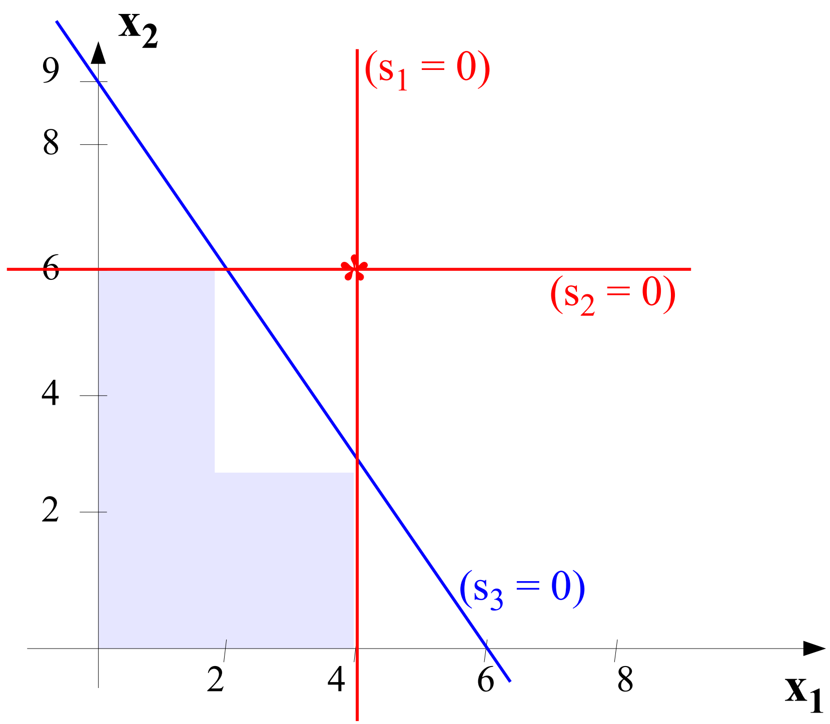
a) $\{x_1, x_2, s_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \\ \mathbf{s_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ **≥ 0** Solução Básica **Factível** $\begin{cases} x_1 = 4 & s_1 = 0 \\ x_2 = 3 & s_2 = 3 \\ & s_3 = 0 \end{cases}$



Solução Básica de um P.O.L.

Escolhendo outras Bases:

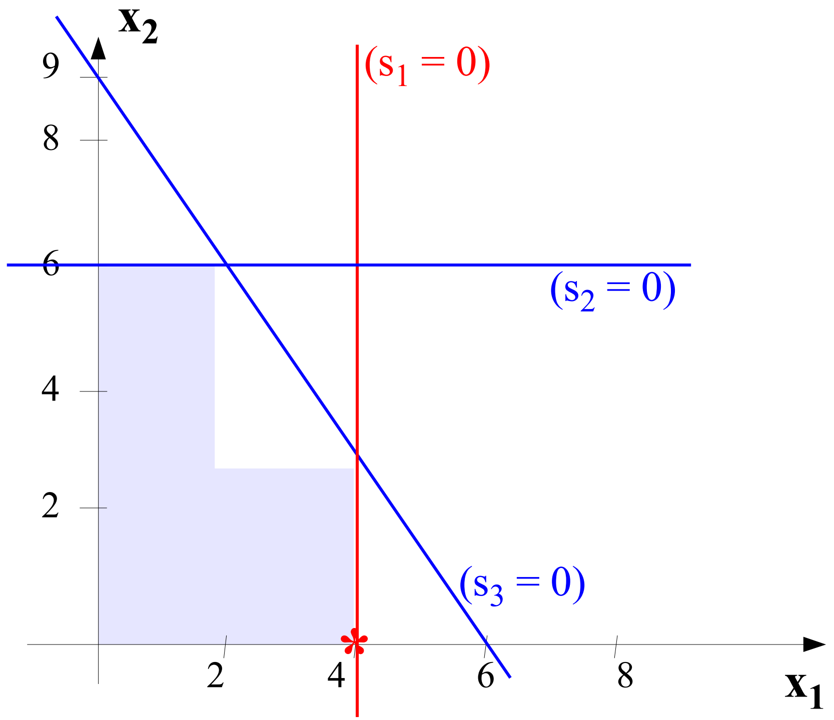
b) $\{x_1, x_2, s_3\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \\ \mathbf{s_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \mathbf{\not\geq 0}$ Solução Básica **Infactível** $\begin{cases} x_1 = 4 & s_1 = 0 \\ x_2 = 6 & s_2 = 0 \\ & s_3 = -6 \end{cases}$



Solução Básica de um P.O.L.

Escolhendo outras Bases:

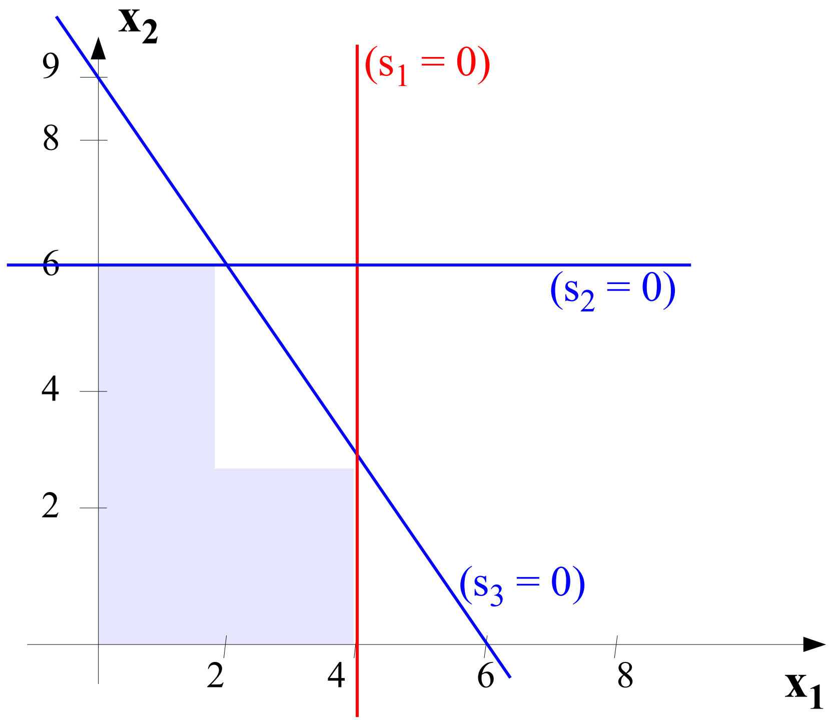
c) $\{x_1, s_2, s_3\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{s_2} \\ \mathbf{s_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ **≥ 0** Solução Básica **Factível** $\begin{cases} x_1 = 4 & s_1 = 0 \\ x_2 = 0 & s_2 = 6 \\ & s_3 = 6 \end{cases}$



Solução Básica de um P.O.L.

Escolhendo outras Bases:

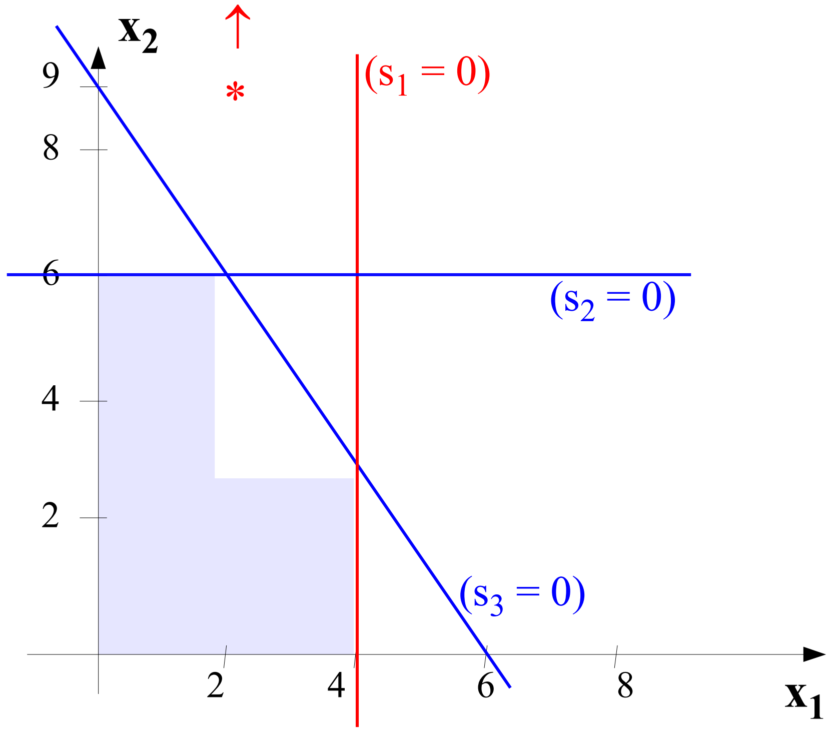
d) $\{x_2, s_2, s_3\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{x_2} \\ \mathbf{s_2} \\ \mathbf{s_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix}$



Solução Básica de um P.O.L.

Escolhendo outras Bases:

d) $\{x_2, s_2, s_3\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{x_2} \\ \mathbf{s_2} \\ \mathbf{s_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \rightarrow \infty$ Solução Básica **no infinito**



Método Simplista para resolver o P.O.L.

1) Listar todas as Soluções Básicas Factíveis (SBF);

2) Avaliar a Função Objetivo para cada uma das SBFs e escolher como ótima a que proporcionar o maior valor (considerando problema de maximização).

Problema: Como $A_{m \times n}$, o número de soluções básicas (vértices) possíveis é dado por:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

No exemplo:

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$$

Se:

$$C_{100}^{50} = \frac{100!}{50!\,50!} \approx 10^{29}$$

Caso cada solução básica demandar 1 μs, seriam necessários $\approx 3.10^{15}$ anos para avaliação completa !

(idade estimado do universo $\approx$ 14 .10^9 anos)