TÓPICO 2: EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES DE ORDEM n

QUALQUER EQUAÇÃO A SER ESTUDADA NO TÓPICO 2 PODE SER REESCRITA NA SEGUINTE FORMA GERAL:

$$\boxed{y^{(n)} + p_0(t)y + p_1(t)y' + \ldots + p_{n-1}(t)\,y^{(n-1)} = g(t)}$$

ONDE:

- t É A VARIÁVEL INDEPENDENTE;
- y É A VARIÁVEL DEPENDENTE.
- y' INDICA $\frac{d}{dt}y$, OU SEJA, A DERIVADA PRIMEIRA DA VARIÁVEL DEPENDENTE (y) EM RELAÇÃO À VARIÁVEL INDEPENDENTE (t);
- $y^{(n)}$ INDICA $\frac{d^n}{dt^n}y$, OU SEJA, A DERIVADA ENÉSIMA DA VAR. DEPENDENTE (y) EM RELAÇÃO À VAR. IND. (t);
- $p_0(t), p_1(t), \ldots, p_{n-1}(t)$ e $g(t)$ SÃO FUNÇÕES QUAISQUER DA VARIÁVEL INDEPENDENTE (t).

AS EQUAÇÕES DO TÓPICO 2 SÃO:

- DIFERENCIAIS, POIS ENVOLVEM (MANIPULAM) AS DERIVADAS DA VARIÁVEL DEPENDENTE EM RELAÇÃO À VARIÁVEL INDEPENDENTE;
- ORDINÁRIAS, POIS HÁ UMA ÚNICA VARIÁVEL INDEPENDENTE;
- LINEAR, POIS A VARIÁVEL DEPENDENTE (y) E SUAS DERIVADAS $(y', \ldots, y^{(n)})$ SE RELACIONAM DE FORMA LINEAR [POR EXEMPLO, NÃO HÁ PRODUTOS OU POTÊNCIAS ENVOLVENDO $(y, y', \ldots, y^{(n)})$];
- DE ORDEM n, POIS A MAIOR DAS DERIVADAS ENVOLVIDAS É A ENÉSIMA.

NO TÓPICO 2, NOSSO OBJETIVO CONTINUARÁ SENDO RESOLVER DOIS ENUNCIADOS:

ENUNCIADO 1: OBTER A SOLUÇÃO GERAL DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL. A SOLUÇÃO GERAL É A EXPRESSÃO MATEMÁTICA QUE CONTÉM TODAS AS INFINITAS SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL. NO TÓPICO 2, A SOLUÇÃO GERAL SEMPRE UTILIZARÁ EXATAMENTE n CONSTANTES ARBITRÁRIAS $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$. PARA QUALQUER COMBINAÇÃO DE VALORES NUMÉRICOS DESSAS CONSTANTES $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, TEM-SE UMA SOLUÇÃO PARA A EQUAÇÃO DIFERENCIAL. POR SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL, ENTENDE-SE UMA EQUAÇÃO ALGÉBRICA (OU SEJA, EQUAÇÃO SEM DERIVADA), QUE MANIPULE y E t, E QUE SATISFAÇA A IGUALDADE IMPOSTA PELA EQUAÇÃO DIFERENCIAL.

ENUNCIADO 2: OBTER A SOLUÇÃO ÚNICA DE UM PROBLEMA DE VALOR INICIAL (P.V.I). UM PVI SERÁ COMPOSTO DE UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL QUE SE ENQUADRA NO TÓPICO 2 E n CONDIÇÕES INICIAIS (C.I.). AS n C.I. SÃO CONDIÇÕES IMPOSTAS PARA UM DETERMINADO VALOR NUMÉRICO DA VARIÁVEL INDEPENDENTE, CHAMADO DE t_0. PORTANTO, AS n C.I. SERÃO OS VALORES NUMÉRICOS DE: $y(t_0)$, $y'(t_0)$, ..., $y^{(n-1)}(t_0)$.

PROCEDIMENTO PARA RESOLVER UM P.V.I:

(A) OBTER A SOLUÇÃO GERAL DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL PRESENTE NO ENUNCIADO.

(B) IMPOR AS n C.I. DADAS NO ENUNCIADO NA SOLUÇÃO GERAL OBTIDA NO PASSO (A). ISSO RESULTARÁ EM UM SISTEMA ALGÉBRICO LINEAR DE n EQUAÇÕES NAS n INCÓGNITAS QUE SÃO AS CONSTANTES ARBITRÁRIAS $(c_1, c_2, \ldots c_n)$. RESOLVER O SISTEMA ALGÉBRICO LINEAR $(Ax=b)$, OBTENDO OS VALORES DAS n CONSTANTES ARBITRÁRIAS. <u>IMPORTANTE</u>: O SISTEMA A SER RESOLVIDO NESSE PASSO (B) TEM SEMPRE [redacted] UMA E SOMENTE UMA SOLUÇÃO, OU SEJA, NO SISTEMA $(Ax=b)$ O DETERMINANTE DA MATRIZ A É SEMPRE DIFERENTE DE ZERO. PARA A RESOLUÇÃO DO SISTEMA ALGÉBRICO, EM TE315 SERÁ PERMITIDO O USO DE FERRAMENTAS COMPUTACIONAIS (CALCULADORA, MATLAB, PYTHON, ETC) OU CÁLCULOS ANALÍTICOS (ESCALONAMENTO, REGRA DE CRAMER, ETC).

(C) A SOLUÇÃO ÚNICA DO P.V.I. É A EXPRESSÃO DA SOLUÇÃO GERAL OBTIDA NO PASSO (A), ONDE AS n CONSTANTES ARBITRÁRIAS SÃO SUBSTITUÍDAS PELOS VALORES NUMÉRICOS OBTIDOS NO PASSO (B).

NÃO EXISTE UM MÉTODO QUE PERMITA OBTER A SOLUÇÃO GERAL DE QUALQUER EQUAÇÃO DIFERENCIAL QUE SE ENQUADRE NA FORMA GERAL DESTE TÓPICO 2. O QUE EXISTE SÃO MÉTODOS QUE PERMITEM OBTER A SOLUÇÃO GERAL DE DETERMINADOS SUBCONJUNTOS DESTAS EQUAÇÕES. NO TÓPICO 2, ESTUDAREMOS MÉTODOS PARA OBTER A SOLUÇÃO GERAL DE 3 SUBCONJUNTOS:

2.1. HOMOGÊNEAS COM COEFICIENTES CONSTANTES

2.2. NÃO HOMOGÊNEAS COM COEFICIENTES CONSTANTES

2.3. HOMOGÊNEAS COM COEFICIENTES VARIÁVEIS

2.1. HOMOGÊNEAS COM COEFICIENTES CONSTANTES: SÃO O SUBCONJUNTO DAS EQUAÇÕES DESTE TÓPICO 2 QUE PODEM SER REESCRITAS NA SEGUINTE FORMA: $\boxed{y^{(n)} + a_0 y + a_1 y' + \ldots + a_{n-1} y^{(n-1)} = 0}$, ONDE $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ INDICAM CONSTANTES REAIS QUE NÃO DEPENDEM NEM DE t E NEM DE y.

AS EQUAÇÕES 2.1 SÃO:

- HOMOGÊNEAS, POIS $g(t) = 0$;
- COM COEFICIENTES CONSTANTES, POIS AS FUNÇÕES $[p_0(t), p_1(t), \ldots, p_{n-1}(t)]$ NÃO DEPENDEM DE t E SÃO PORTANTO CONSTANTES REPRESENTADAS POR $[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}]$.

A SOLUÇÃO GERAL DAS EQUAÇÕES 2.1. É DADA PELA COMBINAÇÃO LINEAR DE n SOLUÇÕES LINEARMENTE INDEPENDENTES (l.i) ENTRE SI, OU SEJA: SOLUÇÃO GERAL $\Rightarrow$ $\boxed{y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \ldots + c_n y_n(t)}$, ONDE $[y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)]$ SÃO n SOLUÇÕES l.i. E $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ SÃO n CONSTANTES ARBITRÁRIAS.

INÍCIO DA DEDUÇÃO PARA OBTER 2 SOLUÇÕES l.i. PARA UMA EQUAÇÃO 2.1 DE SEGUNDA ORDEM, OU SEJA: $y'' + a_0 y + a_1 y' = 0$

PRIMEIRAMENTE VAMOS VERIFICAR PARA QUAIS VALORES DE r A EXPRESSÃO $\exp(rt)$ É SOLUÇÃO DA EQ. DIFERENCIAL. PARA ISSO:

$$y(t) = \exp(rt)$$

$$y'(t) = r\exp(rt) \quad \text{, ONDE } r \text{ É UMA CONSTANTE}$$

$$y''(t) = r^2 \exp(rt)$$

SUBSTITUINDO NA EQ. DIF: $y'' + a_0 y + a_1 y' = 0$

$$r^2 \cancel{\exp(rt)} + a_0 \cancel{\exp(rt)} + a_1 r \cancel{\exp(rt)} = 0 \Rightarrow r^2 + a_0 + a_1 r = 0$$

PORTANTO, A EXPRESSÃO $\boxed{\exp(rt)}$ É SOLUÇÃO SE E SOMENTE SE $\boxed{r}$ FOR RAÍZ DA EQUAÇÃO DE SEGUNDA ORDEM $\boxed{r^2 + a_0 + a_1 r = 0}$, ONDE a_0 e a_1 SÃO CONSTANTES REAIS PRESENTES NA EQ. DIFERENCIAL.

CONTINUAÇÃO DA DEDUÇÃO:

HÁ 3 CASOS PARA AS RAÍZES DE $r^2 + a_0 + a_1 r = 0$ $\begin{cases} \text{- 2 RAÍZES REAIS E DISTINTAS, SE } \Delta > 0 \\ \text{- 2 RAÍZES REAIS E IGUAIS, SE } \Delta = 0 \\ \text{- 2 RAÍZES COMPLEXAS CONJUGADAS, SE } \Delta < 0 \end{cases}$

VAMOS ENTÃO DIVIDIR A DEDUÇÃO EM 3 PARTES, SENDO CADA UMA DELAS VÁLIDA PARA UM CASO.

I SE $\Delta > 0$, ENTÃO HÁ 2 RAÍZES REAIS E DISTINTAS. CHAMANDO AS RAÍZES DE r_1 E r_2, TEM-SE AS SEGUINTES 2 SOLUÇÕES PARA A EQUAÇÃO DIFERENCIAL: $y_1(t) = \exp(r_1 t)$ e $y_2(t) = \exp(r_2 t)$

PARA FINALIZAR A DEDUÇÃO DESTE CASO I, BASTA PROVAR QUE $\exp(r_1 t)$ E $\exp(r_2 t)$ SÃO l.i. PODE-SE MOSTRAR QUE $y_1(t)$ E $y_2(t)$ SÃO l.i. SE, PARA QUALQUER VALOR DE t, O DETERMINANTE DE $\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{pmatrix}$, CHAMADA DE WRONSKIANO, FOR DIFERENTE DE ZERO.

IMPONDO $t=0$ EM $\begin{cases} y_1(t)\big|_{t=0} = \exp(r_1 \cdot 0) = 1 & y_2(t)\big|_{t=0} = \exp(r_2 \cdot 0) = 1 \\ y_1'(t)\big|_{t=0} = r_1 \exp(r_1 \cdot 0) = r_1 & y_2'(t)\big|_{t=0} = r_2 \exp(r_2 \cdot 0) = r_2 \end{cases}$

ENTÃO: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix}$, CUJO DETERMINANTE É $(r_2 - r_1)$. COMO $r_1 \neq r_2$, ENTÃO $\det \neq 0$ E PORTANTO $y_1(t)$ e $y_2(t)$, $y_1(t) = \exp(r_1 t)$ e $y_2(t) = \exp(r_2 t)$, SÃO l.i, FINALIZANDO A DEDUÇÃO PARA O CASO I.

II SE $\Delta = 0$, ENTÃO HÁ 2 RAÍZES REAIS E IGUAIS. CHAMANDO ESSA RAÍZ DE MULTIPLICIDADE 2 (OU SEJA, QUE SE REPETE 2 VEZES) DE r_1, TEM-SE A SEGUINTE SOLUÇÃO PARA A EQ. DIFERENCIAL: $y_1(t) = \exp(r_1 t)$.

DEVE-SE ENTÃO BUSCAR UMA SEGUNDA SOLUÇÃO. PARA ISSO, ASSUME-SE $y_2(t) = v(t) \cdot y_1(t)$ E BUSCA-SE OBTER UMA FUNÇÃO $v(t)$ QUE CUMPRA COM AS EXIGÊNCIAS PARA $y_2(t) = v(t) \cdot y_1(t)$ SER SOLUÇÃO DA EQ. DIFERENCIAL QUANDO $\Delta = 0$.

CONTINUAÇÃO DA DEDUÇÃO:

PARA ISSO: $y_2(t) = v(t)\exp(r_1 t)$

$$y_2'(t) = v'(t)\exp(r_1 t) + r_1 v(t)\exp(r_1 t)$$

$$y_2''(t) = v''(t)\exp(r_1 t) + r_1 v'(t)\exp(r_1 t) + r_1 v'(t)\exp(r_1 t) + r_1^2 v(t)\exp(r_1 t)$$

SUBSTITUINDO NA EQ. DIF: $y_2''(t) + a_0\, y_2(t) + a_1\, y_2'(t) = 0$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\cancel{\exp(r_1 t)}\left\{\left[v''(t) + 2r_1 v'(t) + r_1^2 v(t)\right] + a_0\left[\, v(t)\,\right] + a_1\left[v'(t) + r_1 v(t)\right]\right\} = 0 \cdot \cancel{\exp(r_1 t)}$$

Rearranjando:

$$v''(t)\left[1\right] + v'(t)\left[2r_1 + a_1\right] + v\left[\underbrace{r_1^2 + a_0 + a_1 r_1}_{\Downarrow}\right] = 0$$

COMO r_1 É RAÍZ DE $(r^2 + a_0 + a_1 r) = 0$, ENTÃO $(r_1^2 + a_0 + a_1 r_1) = 0$.

COMO $\Delta = 0$, ENTÃO $r_1 = \frac{-a_1}{2}$. PORTANTO, $2r_1 + a_1 = 2\left(\frac{-a_1}{2}\right) + a_1 = 0$.

ENTÃO SIMPLIFICA-SE PARA $\Rightarrow \boxed{v''(t) = 0}$. UMA SOLUÇÃO DE $\boxed{v''(t)=0}$ É $v(t) = t$, POIS $\begin{cases} v'(t) = \frac{d}{dt}(t) = 1 \\ v''(t) = \frac{d^2}{dt^2}(t) = 0 \end{cases}$

PORTANTO, UMA SEGUNDA SOLUÇÃO É: $y_2(t) = t\exp(r_1 t)$.

PARA FINALIZAR A DEDUÇÃO DESTE CASO II, BASTA PROVAR QUE $\exp(r_1 t)$ E $t\exp(r_1 t)$ SÃO l.i.

IMPONDO $t=0$, TEM-SE: $\begin{cases} y_1(t)\big|_{t=0} = \exp(r_1 \cdot 0) = 1 \\ y_1'(t)\big|_{t=0} = r_1 \exp(r_1 \cdot 0) = r_1 \end{cases}$ $\quad y_2(t)\big|_{t=0} = 0 \cdot \exp(r_1 \cdot 0) = 0$

$\quad y_2'(t)\big|_{t=0} = \exp(r_1 \cdot 0) + r_1 \cdot 0 \cdot \exp(r_1 \cdot 0) = 1$

CONTINUAÇÃO DA DEDUÇÃO

ENTÃO: $\begin{pmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r_1 & 1 \end{pmatrix}$, CUJO DETERMINANTE É SEMPRE 1. COMO $1 \neq 0$, ENTÃO $y_1(t) = \exp(r_1 t)$ E $y_2(t) = t\exp(r_1 t)$ SÃO l.i, FINALIZANDO A DEDUÇÃO PARA O CASO II.

III SE $\Delta < 0$, ENTÃO HÁ 2 RAÍZES COMPLEXAS CONJUGADAS. CHAMANDO ESSAS RAÍZES DE $(\lambda + j\mu)$ E $(\lambda - j\mu)$, ONDE $j = \sqrt{-1}$, TEM-SE AS SEGUINTES 2 SOLUÇÕES PARA A EQ. DIF: $y_1(t) = \exp[(\lambda + j\mu)t]$ E $y_2(t) = \exp[(\lambda - j\mu)t]$, QUE SÃO 2 SOLUÇÕES l.i.

APESAR DE $y_1(t)$ E $y_2(t)$ SEREM l.i., ELAS MANIPULAM EXPOENTES COMPLEXOS. DESSA FORMA, É MAIS USUAL CONTINUAR REALIZANDO MANIPULAÇÕES PARA OBTER NOVAS EXPRESSÕES PARA $y_1(t)$ E $y_2(t)$ QUE NÃO MANIPULEM O IMAGINÁRIO PURO (j). PARA ISSO, PARTE-SE DE $y_1(t)$:

$$\exp[(\lambda + j\mu)t] = \exp(\lambda t)\underbrace{\exp(j\mu t)}$$

$$\Downarrow \text{ FÓRMULA DE EULER}$$

$$= \exp(\lambda t)[\cos\mu t + j \operatorname{sen}\mu t] = \exp(\lambda t)\cos\mu t + j[\exp(\lambda t)\operatorname{sen}\mu t]$$

PODE-SE MOSTRAR QUE AS PARTES REAL $[\exp(\lambda t)\cos\mu t]$ E IMAGINÁRIA $[\exp(\lambda t)\operatorname{sen}\mu t]$ SÃO INDIVIDUALMENTE SOLUÇÕES l.i. DA EQ. DIFERENCIAL.

DESSA FORMA, AS 2 SOLUÇÕES l.i. PARA O CASO III QUE MANIPULAM APENAS OPERADORES REAIS É:

$\boxed{y_1(t) = \exp(\lambda t)\cos\mu t}$ E $\boxed{y_2(t) = \exp(\lambda t)\operatorname{sen}\mu t}$, FINALIZANDO A DEDUÇÃO.

<u>REGRA PRÁTICA</u>: A SOLUÇÃO GERAL DAS EQUAÇÕES 2.1 É: $\boxed{y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \dots + c_n y_n(t)}$, ONDE

$[y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]$ SÃO n SOLUÇÕES l.i. E $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ SÃO n CONSTANTES ARBITRÁRIAS.

PARA OBTER AS n SOLUÇÕES l.i., PRIMEIRAMENTE ENCONTRAR AS n RAÍZES DO POLINÔMIO CARACTERÍSTICO $\boxed{r^n + a_0 \cdot 1 + a_1 r + \dots + a_{n-1} r^{n-1} = 0}$. COMPARANDO O POLINÔMIO COM A EQ. DIF., VERIFICA-SE QUE O POLINÔMIO É OBTIDO SUBSTITUINDO-SE:

$$\begin{cases} y^{(n)} \rightarrow r^n \\ y^{(n-1)} \rightarrow r^{n-1} \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \\ y' \rightarrow r \\ y \rightarrow 1 \end{cases}$$

AS n SOLUÇÕES l.i SÃO OBTIDAS A PARTIR DAS n RAÍZES DO POLINÔMIO CARACTERÍSTICO, DA SEGUINTE FORMA:

→ CADA RAÍZ REAL DE MULTIPLICIDADE m (chamando essa raíz de r_2) CONTRIBUI COM AS SEGUINTES m SOLUÇÕES l.i: $\exp(r_2 t)$, $t\exp(r_2 t)$, $\dots$, $t^{m-1}\exp(r_2 t)$.

→ CADA PAR DE RAÍZES COMPLEXAS CONJUGADAS DE MULTIPLICIDADE m (chamando esse par de raízes de: $\lambda + j\mu$; $\lambda - j\mu$) CONTRIBUI COM AS SEGUINTES $2m$ SOLUÇÕES l.i: $\exp(\lambda t)\cos(\mu t)$, $\exp(\lambda t)\operatorname{sen}(\mu t)$, $t\exp(\lambda t)\cos(\mu t)$, $t\exp(\lambda t)\operatorname{sen}(\mu t)$, $\dots$, $t^{m-1}\exp(\lambda t)\cos(\mu t)$, $t^{m-1}\exp(\lambda t)\operatorname{sen}(\mu t)$.

Exemplo de utilização da regra prática: SUPONHA QUE HAJA UMA EQ. DIF DE 11ª ORDEM, CUJAS 11 RAÍZES DO SEU POLINÔMIO CARACTERÍSTICO SEJAM: $r_1 = 1$; $r_2 = -1$; $r_3 = -1$; $r_4 = -1$; $r_5 = -1$; $r_6 = 2+j$; $r_7 = 2-j$; $r_8 = 1+j$; $r_9 = 1-j$; $r_{10} = 1+j$; $r_{11} = 1-j$.

PELA REGRA PRÁTICA, AS 11 SOLUÇÕES l.i SÃO: $y_1 = \exp(1\cdot t)$; $y_2 = \exp(-1\cdot t)$; $y_3 = t\exp(-t)$; $y_4 = t^2\exp(-t)$; $y_5 = t^3\exp(-t)$; $y_6 = \exp(2t)\cos(t)$; $y_7 = \exp(2t)\operatorname{sen}(t)$; $y_8 = \exp(t)\cos(t)$; $y_9 = \exp(t)\operatorname{sen}(t)$; $y_{10} = t\exp(t)\cos(t)$; $y_{11} = t\exp(t)\operatorname{sen}(t)$

EXERCÍCIO 1: OBTER A SOLUÇÃO GERAL DE: $\boxed{y'' + 4y - 4y' = 0}$

SOLUÇÃO GERAL: $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$, ONDE c_1 e c_2 SÃO CONSTANTES ARBITRÁRIAS

PARA OBTER $y_1(t)$ E $y_2(t)$, PRIMEIRAMENTE ENCONTRAR AS RAÍZES DO POLINÔMIO CARACTERÍSTICO:

$$r^2 + 4 \cdot 1 - 4 \cdot r = 0 \Rightarrow \Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = \frac{+4 \pm \sqrt{0}}{2} = +2$$

$$\Uparrow \quad \Uparrow \quad \Uparrow$$

$$y'' + 4y - 4y' = 0$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a \cdot r^2 + br + c = 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac \quad r = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \end{array}}$$

A RAÍZ REAL $\boxed{+2}$ TEM MULTIPLICIDADE $m=2$ POIS ELA SE REPETE DUAS VEZES

PORTANTO, PELA REGRA PRÁTICA: $y_1(t) = \exp(2t)$; $y_2(t) = t\exp(2t)$

RESPOSTA: A SOLUÇÃO GERAL É: $\boxed{y(t) = c_1 \exp(2t) + c_2 t \exp(2t)}$, ONDE c_1 e c_2 SÃO CONSTANTES ARBITRÁRIAS

EXERCÍCIO 2: RESOLVER O PVI: $\begin{cases} y'' + 4y - 4y' = 0 \\ y(0) = 5 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

(A) A SOLUÇÃO GERAL DA EQ. DIF É (IDEM EXERCÍCIO ACIMA): $y(t) = c_1 \exp(2t) + c_2 t \exp(2t)$, com c_1 e c_2 constantes arbitr

(B) IMPONDO $y(0) = 5 = c_1 \exp(2 \cdot 0) + c_2 \cdot 0 \cdot \exp(2 \cdot 0) = c_1$ (1)

DERIVANDO A SOLUÇÃO GERAL: $y'(t) = 2c_1 \exp(2t) + c_2 \exp(2t) + 2c_2 t \exp(2t)$

IMPONDO $y'(0) = \quad = 2c_1 \cdot \exp(2 \cdot 0) + c_2 \cdot \exp(2 \cdot 0) + 2c_2 \cdot 0 \cdot \exp(2 \cdot 0) = 2c_1 + c_2$ (2)

Resolvendo o sistema 2x2 nas incógnitas c_1 e c_2 $\Rightarrow$

$$5 = c_1 \ (1) \qquad \Rightarrow \quad c_1 = 5$$

$$2 = 2c_1 + c_2 \ (2) \qquad c_2 = -8$$

(C) Resposta: $\boxed{y(t) = 5\exp(2t) - 8t\exp(2t)}$

2.2. NÃO HOMOGÊNEAS COM COEFICIENTES CONSTANTES: SÃO O SUBCONJUNTO DAS EQUAÇÕES DESTE TÓPICO 2 QUE PODEM SER REESCRITAS NA SEGUINTE FORMA: $\boxed{y^{(n)} + a_0 y + a_1 y' + \ldots + a_{n-1} y^{(n-1)} = g(t)}$, ONDE $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ INDICAM CONSTANTES REAIS QUE NÃO DEPENDEM NEM DE t E NEM DE y, E $g(t)$ É UMA FUNÇÃO QUE DEPENDE DE t.

AS EQUAÇÕES 2.2 SÃO:

- NÃO HOMOGÊNEAS, POIS $g(t) \neq 0$;
- COM COEFICIENTES CONSTANTES, POIS AS FUNÇÕES $[p_0(t), p_1(t), \ldots, p_{n-1}(t)]$ NÃO DEPENDEM DE t E SÃO PORTANTO CONSTANTES REPRESENTADAS POR $[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}]$.

A SOLUÇÃO GERAL DAS EQUAÇÕES 2.2 É DADA PELA SOMA DE 2 PARCELAS: $\boxed{\text{SOLUÇÃO GERAL} \Rightarrow y(t) = y_H(t) + y_P(t)}$ ONDE:

→ $y_H(t)$ É A SOLUÇÃO GERAL DA EQUAÇÃO HOMOGÊNEA ASSOCIADA. PARA OBTER $y_H(t)$, SUBSTITUIR $g(t)$ POR ZERO E ENTÃO USAR O CONTEÚDO VISTO NO TÓPICO 2.1. VALE RESSALTAR QUE $y_H(t)$ TERÁ n CONSTANTES ARBITRÁRIAS.

→ $y_P(t)$ É UMA SOLUÇÃO PARTICULAR DA EQUAÇÃO NÃO HOMOGÊNEA. POR SER UMA SOLUÇÃO PARTICULAR, $y_P(t)$ NÃO CONTERÁ NENHUMA CONSTANTE ARBITRÁRIA.

NA SEQUÊNCIA, SERÃO ABORDADAS 2 FORMAS DE OBTER $y_P(t)$:

2.2.1. MÉTODO DOS COEFICIENTES INDETERMINADOS (OU A DETERMINAR): PERMITE OBTER $y_P(t)$ PARA CASOS ONDE $g(t)$ É EXPONENCIAL, SENO, COSSENO, POLINÔMIO, OU SOMA OU PRODUTO DE TAIS FUNÇÕES. O PROCEDIMENTO CONSISTE EM:

A) ASSUME-SE QUE A DEPENDÊNCIA EM t DA SOLUÇÃO PARTICULAR $y_P(t)$ É CONHECIDA A PRIORI, A MENOS DOS VALORES NUMÉRICOS DE COEFICIENTES CONSTANTES AINDA A SEREM DETERMINADOS. O ANDAMENTO DE $y_P(t)$ EM FUNÇÃO DE t DEPENDE DE $g(t)$ E DA SOLUÇÃO GERAL DA EQ. HOMOGÊNEA ASSOCIADA $y_H(t)$. ESTUDAREMOS MAIS ADIANTE COMO OBTER A EXPRESSÃO CONHECIDA (A MENOS DOS VALORES NUMÉRICOS DOS COEFICIENTES A SEREM DETERMINADOS) PARA OS DIFERENTES CASOS DE $g(t)$ ONDE ESSE MÉTODO É VÁLIDO.

(B) SUBSTITUIR A EXPRESSÃO DE $y_p(t)$ OBTIDA NO PASSO (A), ASSIM COMO SUAS DERIVADAS $[y_p'(t), \ldots, y_p^{(n)}(t)]$, NA EQUAÇÃO NÃO HOMOGÊNEA E IMPOR QUE A IGUALDADE SEJA VÁLIDA PARA QUALQUER t. ISSO RESULTARÁ EM UM SISTEMA ALGÉBRICO LINEAR ONDE AS INCÓGNITAS SÃO OS COEFICIENTES A DETERMINAR PRESENTES NA EXPRESSÃO DE $y_p(t)$. SE A EXPRESSÃO DE $y_p(t)$ FOI OBTIDA CORRETAMENTE NO PASSO (A), ENTÃO ESTE SISTEMA ALGÉBRICO LINEAR TERÁ PELO MENOS 1 SOLUÇÃO (AQUI PODE SER 1 ÚNICA SOLUÇÃO OU INFINITAS SOLUÇÕES). SE NÃO HOUVER SOLUÇÃO PARA ESTE SISTEMA ALGÉBRICO LINEAR, CORRIGIR A EXPRESSÃO DE $y_p(t)$. SE HOUVER INFINITAS SOLUÇÕES, ESCOLHER 1 DELAS DE FORMA ARBITRÁRIA.

(C) A SOLUÇÃO $y_p(t)$ É DADA PELA EXPRESSÃO OBTIDA NO PASSO (A) ONDE OS COEFICIENTES SÃO SUBSTITUÍDOS PELOS VALORES NUMÉRICOS OBTIDOS NO PASSO (B).

DETALHANDO COMO OBTER A EXPRESSÃO DE $y_p(t)$, AINDA COM COEFICIENTES A DETERMINAR, PARA DIFERENTES CASOS DE $g(t)$ ONDE ESSE MÉTODO 2.2.1 É VÁLIDO:

(A1) SE $g(t)$ FOR DADA PELA SOMA DE m PARCELAS $[g(t) = g_1(t) + g_2(t) + \ldots + g_m(t)]$, DIVIDIR EM m SUBPROBLEMAS [SUBSTITUINDO $g(t)$ POR $g_m(t)$] E RESOLVER CADA SUBPROBLEMA SEPARADAMENTE. A SOLUÇÃO PARTICULAR $y_p(t)$ É DADA PELA SOMA DAS SOLUÇÕES PARTICULARES INDIVIDUAIS DOS m SUBPROBLEMAS $[y_p(t) = y_{p_1}(t) + y_{p_2}(t) + \ldots + y_{p_m}(t)]$.

(A2) SE $g_m(t) = N \operatorname{sen} \omega t$ OU $g_m(t) = N \cos \omega t$, ONDE N É QUALQUER NÚMERO CONHECIDO, ENTÃO
$y_{p_m}(t) = A t^q \operatorname{sen} \omega t + B t^q \cos \omega t$, ONDE q É O MENOR NÚMERO NATURAL (0, 1, 2, ...) QUE GARANTE QUE $t^q \operatorname{sen} t$ E $t^q \cos t$ NÃO SEJAM SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO HOMOGÊNEA ASSOCIADA, E ONDE <u>A</u> E <u>B</u> SÃO OS COEFICIENTES A DETERMINAR.

EXEMPLOS DE COMO USAR (A2): SEJA UMA EQ. DIF. ONDE A SOLUÇÃO GERAL DA HOMOGÊNEA ASSOCIADA É:

$y_H(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \operatorname{sen}(2t) + c_3 e^{-2t} \cos 3t + c_4 e^{-2t} \operatorname{sen} 3t$, ONDE c_1, c_2, c_3 e c_4 SÃO CONSTANTES ARBITRÁRIAS. SEJA $g(t) = g_1(t) + g_2(t) = 4 \operatorname{sen} 2t + 7 \cos 3t$. ENTÃO:

$\Rightarrow y_{p1}(t) = A_1 t \operatorname{sen}(2t) + B_1 t \cos(2t)$. EXPLICANDO $\Rightarrow \boxed{g_1(t) = 4 \operatorname{sen} 2t}$. O 4 QUE MULTIPLICA O SENO NÃO IMPORTA AQUI. O QUE IMPORTA É O 2 DENTRO DO SENO. AQUI TAMBÉM NÃO FAZ DIFERENÇA SE $g_1(t)$ ENVOLVE O SENO OU O COSSENO. COMEÇA-SE IMPONDO $\boxed{q=0}$. COM $q=0$, TERIA-SE $\operatorname{sen}(2t)$ E $\cos(2t)$. CONTUDO, $\cos(2t)$ E $\operatorname{sen}(2t)$ JÁ SÃO SOLUÇÕES DA EQ. HOMOGÊNEA ASSOCIADA. INCREMENTA-SE PARA $q=1$, RESULTANDO EM $t \operatorname{sen}(2t)$ E $t \cos(2t)$. COMO $t \operatorname{sen}(2t)$ E $t \cos(2t)$ NÃO SÃO SOLUÇÕES DA EQ. HOM. ASSOCIADA, USA-SE ENTÃO $q=1$.

$\Rightarrow y_{p2}(t) = A_2 \operatorname{sen}(3t) + B_2 \cos(3t)$. EXPLICANDO $\Rightarrow \boxed{g_2(t) = 7 \cos 3t}$. O 7 QUE MULTIPLICA O COSSENO NÃO IMPORTA AQUI. O QUE IMPORTA É O 3 DENTRO DO COSSENO. AQUI TAMBÉM NÃO FAZ DIFERENÇA SE $g_2(t)$ ENVOLVE O SENO OU O COSSENO. COMEÇA-SE IMPONDO $\boxed{q=0}$. COM $q=0$, TEM-SE $\operatorname{sen}(3t)$ E $\cos(2t)$. COMO $\operatorname{sen}(3t)$ E $\cos(3t)$ NÃO SÃO SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO HOMOGÊNEA ASSOCIADA, USA-SE ENTÃO $q=0$.

OS COEFICIENTES A DETERMINAR SÃO: A_1, B_1, A_2 e B_2

OBSERVAÇÃO:

$\operatorname{sen} 3t \neq e^{-2t} \operatorname{sen} 3t$

$\cos 3t \neq e^{-2} \cos 3t$

(A3) SE $g_m(t) = N \exp(\lambda t)$, ONDE N É QUALQUER NÚMERO CONHECIDO, ENTÃO $y_{p_m}(t) = A\, t^q \exp(\lambda t)$, ONDE q É O MENOR NÚMERO NATURAL $(0, 1, 2, \ldots)$ QUE GARANTE QUE $t^q \exp(\lambda t)$ NÃO SEJA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO HOMOGÊNEA ASSOCIADA, E ONDE <u>A</u> É O COEFICIENTE A DETERMINAR.

EXEMPLOS DE COMO USAR (A3): SEJA UMA EQ. DIF. ONDE A SOLUÇÃO GERAL DA HOMOGÊNEA ASSOCIADA É:

$y_H(t) = c_1 \exp(2t) + c_2 \exp(-2t) + c_3\, t \exp(-2t) + c_4\, t^2 \exp(-2t)$, ONDE c_1, c_2, c_3 e c_4 SÃO CONSTANTES ARBITRÁRIAS.

SEJA $g(t) = g_1(t) + g_2(t) + g_3(t) = -5\exp(3t) + 4\exp(2t) + 9\exp(-2t)$. ENTÃO:

$\Rightarrow y_{p_1}(t) = A_1 \exp(3t)$. EXPLICANDO $\Rightarrow g_1(t) = -5\exp(3t)$. O -5 QUE MULTIPLICA O EXPONENCIAL NÃO IMPORTA AQUI. O QUE IMPORTA É O (3) DENTRO DO EXPONENCIAL. COMEÇA-SE IMPONDO $q=0$. COM $q=0$, TEM-SE $\exp(3t)$. COMO $\exp(3t)$ NÃO É SOLUÇÃO DA EQ. HOM. ASSOCIADA, USA-SE ENTÃO $q=0$.

$\Rightarrow y_{p_2}(t) = A_2\, t \exp(2t)$. EXPLICANDO $\Rightarrow g_2(t) = 4\exp(2t)$. O 4 QUE MULTIPLICA O EXPONENCIAL NÃO IMPORTA AQUI. O QUE IMPORTA É O (2) DENTRO DO EXPONENCIAL. COMEÇA-SE IMPONDO $q=0$. COM $q=0$, TEM-SE $\exp(2t)$. CONTUDO, $\exp(2t)$ JÁ É SOLUÇÃO DA EQ. HOM. ASSOCIADA. INCREMENTA-SE PARA $q=1$, RESULTANDO EM $t\exp(2t)$. COMO $t\exp(2t)$ NÃO É SOLUÇÃO DA EQ. HOMOG. ASSOCIADA, USA-SE ENTÃO $q=1$.

$\Rightarrow y_{p_3}(t) = A_3\, t^3 \exp(-2t)$. EXPLICANDO $\Rightarrow g_3(t) = 9\exp(-2t)$. O 9 QUE MULTIPLICA O EXPONENCIAL NÃO IMPORTA AQUI. O QUE IMPORTA AQUI É O (-2) DENTRO DO EXPONENCIAL. COM $q=0$, OBTÉM-SE $\exp(-2t)$ QUE É SOLUÇÃO DA HOMOGÊNEA. COM $q=1$, OBTÉM-SE $t\exp(-2t)$ QUE É SOLUÇÃO DA HOMOGÊNEA. COM $q=2$, OBTÉM-SE $t^2\exp(-2t)$ QUE É SOLUÇÃO DA HOMOG. LOGO, DEVE-SE USAR $q=3$, OBTENDO $t^3\exp(-2t)$ QUE NÃO É SOLUÇÃO DA EQ. HOMOGÊNEA ASSOCIADA.

OS COEFICIENTES A DETERMINAR SÃO A_1, A_2 e A_3.

(A4) SE $g_m(t)$ = polinômio em t de ordem s, ENTÃO $y_{P_m}(t) = \left[A_s t^s + A_{s-1} t^{s-1} + \ldots + A_1 t + A_0\right] t^q$, ONDE q É O MENOR NÚMERO NATURAL (0, 1, 2, ...) QUE GARANTE QUE t^q NÃO SEJA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO HOMOGÊNEA ASSOCIADA, E ONDE $(A_s, A_{s-1}, \ldots, A_1, A_0)$ SÃO OS COEFICIENTES A DETERMINAR.

EXEMPLOS DE COMO USAR (A4): SEJA UMA EQ. DIF. ONDE A SOLUÇÃO GERAL DA EQ. HOMOGÊNEA ASSOCIADA É: $y_H(t) = c_1 \cdot 1 + c_2 t + c_3 e^{-2t}$, ONDE c_1, c_2 e c_3 SÃO CONSTANTES ARBITRÁRIAS. SEJA $g(t) = 5t^2 - 2$. ENTÃO:

$\Rightarrow y_P(t) = \left[A_2 t^2 + A_1 t + A_0\right] t^2 = A_2 t^4 + A_1 t^3 + A_0 t^2$. EXPLICANDO $\Rightarrow g(t) = 5t^2 - 2$. O QUE IMPORTA EM $g(t)$ É A MAIOR DAS POTÊNCIAS ENVOLVIDAS. NESSE CASO, $s = 2$. MESMO $g(t)$ NÃO ENVOLVENDO TODAS AS POTÊNCIAS, A PARCELA DE $y_P(t)$ DADA POR $\left[A_s t^s + A_{s-1} t^{s-1} + \ldots + A_1 t + A_0\right]$ ENVOLVERÁ TODAS AS POTÊNCIAS. COM $q = 0$, OBTÉM-SE $t^0 = 1$ QUE É SOLUÇÃO DA HOMOGÊNEA. COM $q = 1$, OBTÉM-SE $t^1 = t$ QUE É SOLUÇÃO DA HOMOGÊNEA. LOGO, DEVE-SE USAR $q = 2$, OBTENDO t^2 QUE NÃO É SOLUÇÃO DA HOMOGÊNEA ASSOCIADA. OS COEFICIENTES A DETERMINAR SÃO A_2, A_1 e A_0.

(A5) SE $g_m(t)$ É DADA PELO PRODUTO ENTRE EXPONENCIAL, SENO/COSSENO E/OU POLINÔMIO, $y_{P_m}(t)$ É OBTIDA MULTIPLICANDO-SE AS SOLUÇÕES PARTICULARES INDIVIDUAIS E MANTENDO A EXPRESSÃO LINEAR NOS COEFICIENTES A DETERMINAR (OU SEJA, SUBSTITUINDO-SE PRODUTOS ENTRE COEFICIENTES A DETERMINAR POR UM ÚNICO COEFICIENTE INDETERMINADO).

EXEMPLOS DE COMO USAR (A5):

$\Rightarrow$ se $g(t) = N\,\boxed{\exp(\lambda t)}\,\boxed{\mathrm{sen}(\omega t)} \Rightarrow y_{pm}(t) = A t^q \exp(\lambda t)\,\mathrm{sen}(\omega t) + B t^q \exp(\lambda t) \cos(\omega t)$

$$\underset{A_1 \exp(\lambda t)}{\Downarrow} \qquad \underset{A_2\,\mathrm{sen}(\omega t) + A_3 \cos(\omega t)}{\Downarrow} \Rightarrow \overbrace{A_1 A_2}^{=A} \exp(\lambda t)\,\mathrm{sen}(\omega t) + \overbrace{A_1 A_3}^{=B} \exp(\lambda t) \cos(\omega t)$$

ONDE q É O MENOR NÚMERO NATURAL QUE GARANTE QUE NENHUMA PARCELA DE $y_p(t)$ SEJA SOLUÇÃO DA EQ. HOMOGÊNEA ASSOCIADA.

$\Rightarrow$ se $g(t) = N \exp(\lambda t) \underbrace{\text{de ordem } s}_{}$ (polinômio de ordem s) $\Rightarrow y_{pm}(t) = \left[A_s t^s + A_{s-1} t^{s-1} + A_1 t + A_0\right] \exp(\lambda t) \cdot t^q$, ONDE q

É O MENOR NÚMERO NATURAL QUE GARANTE QUE NENHUMA PARCELA DE $y_{pm}(t)$ SEJA SOLUÇÃO DA EQ. HOMOGÊNEA ASSOCIADA.

$\Rightarrow$ SE $g(t) = N \cos(\omega t)\,\underbrace{\text{de ordem } s}_{}$ (polinômio de ordem s) $\Rightarrow y_{pm}(t) = t^q \left[A_{s,cos} t^s \cos\omega t + \ldots + A_{0,cos} \cos\omega t + A_{s,sen} t^s\,\mathrm{sen}\,\omega t + \ldots + A_{0,sen}\,\mathrm{sen}\,\omega t\right]$

ONDE OS COEFICIENTES A DETERMINAR SÃO $A_{s,cos}; \ldots A_{0,cos}; A_{s,sen}; \ldots \ldots A_{0,sen}$

$$\left(A_1 \cos\omega t + A_2\,\mathrm{sen}\,\omega t\right) \qquad \left(A_{3,s} t^s + A_{3,s-1} t^{s-1} + \ldots + A_{3,1} t + A_{3,0}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overbrace{A_1 A_{3,s}}^{=A_{s,cos}} t^s \cos\omega t + \ldots + \overbrace{A_1 A_{3,0}}^{=A_{0,cos}} \cos\omega t + \overbrace{A_2 \cdot A_{3,s}}^{=A_{s,sen}} t^s\,\mathrm{sen}\,\omega t + \ldots \overbrace{A_2 \cdot A_{3,0}}^{A_{0,sen}}\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

ONDE q É O MENOR NÚMERO NATURAL QUE GARANTE QUE NENHUMA PARCELA DE $y_{pm}(t)$ SEJA SOLUÇÃO DA EQ. HOMOGÊNEA

EXERCÍCIO 1: OBTER A SOLUÇÃO GERAL DE: $y'' + 4y - 4y' = 6\exp(2t) + 4t^2 + 2$

SOLUÇÃO GERAL: $y(t) = y_H(t) + y_P(t)$

$\Rightarrow y_H(t) \Rightarrow$ SOLUÇÃO GERAL DA HOMOGÊNEA ASSOCIADA [OBTIDA ZERANDO $g(t)$].

EQ. HOMOG. ASSOCIADA $\Rightarrow y_H'' + 4y_H - 4y_H' = 0 \Rightarrow$ SOLUÇÃO GERAL DA HOMOGÊNEA: $y_H(t) = c_1\exp(2t) + c_2 t\exp(2t)$

ONDE c_1 E c_2 SÃO CONSTANTES ARBITRÁRIAS (USANDO 2.1)

$\Rightarrow y_P(t) = y_{P_1}(t) + y_{P_2}(t)$

$y_{P_1}(t)$: usando $g_1(t) = 6\exp(2t)$

$y_{P_2}(t)$: usando $g_2(t) = 4t^2 + 2$

$\Rightarrow y_{P_1}(t)$ SE ENQUADRA EM $\boxed{2.2.1}$ CASO A3:

(A) $y_{P_1}(t) = \left[A\exp(2t)\right]t^2 = At^2\exp(2t)$, ONDE A É O COEFICIENTE A DETERMINAR

(B) $y_{P_1}'(t) = 2At\exp(2t) + 2At^2\exp(2t)$

$y_{P_1}''(t) = 2A\exp(2t) + 4At\exp(2t) + 4At\exp(2t) + 4At^2\exp(2t) = 2A\exp(2t) + 8At\exp(2t) + 4At^2\exp(2t)$

SUBSTITUINDO $y_{P_1}(t)$, $y_{P_1}'(t)$, $y_{P_1}''(t)$ EM: $y_{P_1}'' + 4y_{P_1} - 4y_{P_1}' = g_1(t) = 6\exp(2t)$

CONTINUAÇÃO DO EXERCÍCIO 1:

$$\underbrace{\left[2A\exp(2t)+8At\exp(2t)+4At^2\exp(2t)\right]}_{y_{p_1}''}\underbrace{+4}_{+4}\underbrace{\left[At^2\exp(2t)\right]}_{y_{p_1}}\underbrace{-4}_{-4}\underbrace{\left[2At\exp(2t)+2At^2\exp(2t)\right]}_{y_{p_1}'}\underbrace{=}_{=}\underbrace{6\exp(2t)}_{g_1(t)}$$

SEPARANDO AS DIFERENTES FUNÇÕES EM t:

$$\exp(2t)\left[2A\right]+t\exp(2t)\left[8A-8A\right]+t^2\exp(2t)\left[4A+4A-8A\right]=\exp(2t)\left[6\right]+t\exp(2t)\left[0\right]+t^2\exp(2t)\left[0\right]$$

IGUALANDO OS COEFICIENTES QUE MULTIPLICAM CADA FUNÇÃO DO LADO ESQUERDO E DO LADO DIREITO:

$$\begin{array}{l} \exp(2t) \Rightarrow \\ t\exp(2t) \Rightarrow \\ t^2\exp(2t) \Rightarrow \end{array}\left\{\begin{array}{ll} 2A=6 & (1) \\ 8A-8A=0 & (2) \\ 4A+4A-8A=0 & (3) \end{array}\right.$$

RESOLVENDO O SISTEMA ALGÉBRICO LINEAR NAS INCÓGNITAS QUE SÃO OS COEFICIENTES A DETERMINAR:

$$\left\{\begin{array}{ll} 2A=6 & (1) \\ 0=0 & (2) \\ 0=0 & (3) \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{A=3}$$

c) $y_{p_1}(t)=\left[3\exp(2t)\right]t^2=3t^2\exp(2t)$

CONTINUAÇÃO DO EXERCÍCIO 1:

$\Rightarrow y_{P2}(t)$ SE ENQUADRA EM $\boxed{2.2.1}$ CASO (A4), pois $g_2(t) = 4t^2 + 2$

(A) $y_{P2}(t) = A_2 t^2 + A_1 t + A_0$

(B) $y_{P2}'(t) = 2A_2 t + A_1$

$y_{P2}''(t) = 2A_2$

SUBSTITUINDO $y_{P2}(t)$, $y_{P2}'(t)$ e $y_{P2}''(t)$ EM: $y_{P2}'' + 4y_{P2} - 4y_{P2}' = g_2(t) = 4t^2 + 2$

$$\underbrace{[2A_2]}_{y_{P2}''} + 4\underbrace{[A_2 t^2 + A_1 t + A_0]}_{y_{P2}} - 4\underbrace{[2A_2 t + A_1]}_{y_{P2}'} = \underbrace{4t^2 + 2}_{g_2(t)}$$

SEPARANDO EM DIFERENTES FUNÇÕES EM t:

$$1[2A_2 + 4A_0 - 4A_1] + t[4A_1 - 8A_2] + t^2[4A_2] = 1[2] + t[0] + t^2[4]$$

IGUALANDO OS COEFICIENTES QUE MULTIPLICAM CADA FUNÇÃO DO LADO ESQUERDO E DO LADO DIREITO:

$$\begin{array}{ll} 1 \Rightarrow & \begin{cases} 2A_2 + 4A_0 - 4A_1 = 2 & (1) \\ 4A_1 - 8A_2 = 0 & (2) \end{cases} \\ t \Rightarrow & \\ t^2 \Rightarrow & \quad 4A_2 = 4 \qquad (3) \end{array}$$

RESOLVENDO O SISTEMA ALGÉBRICO LINEAR NAS INCÓGNITAS QUE SÃO OS COEFICIENTES A DETERMINAR:

$$\begin{cases} 2A_2 + 4A_0 - 4A_1 = 2 & (1) \\ 4A_1 - 8A_2 = 0 & (2) \\ 4A_2 = 4 & (3) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{DE } (3) \Rightarrow \boxed{A_2 = 1} \\ \text{DE } (2) \Rightarrow 4A_1 - 8\cdot 1 = 0 \Rightarrow \boxed{A_1 = 2} \\ \text{DE } (1) \Rightarrow 2\underbrace{A_2}_{=1} + 4A_0 - 4\cdot 2 = 2 \Rightarrow \boxed{A_0 = 2} \end{array}$$

C $y_{P_2}(t) = 1t^2 + 2t + 2$

Resposta Final: SOLUÇÃO GERAL: $y(t) = c_1 \exp(2t) + c_2 t \exp(2t) + 3t^2 \exp(2t) + t^2 + 2t + 2$, ONDE c_1 e c_2 SÃO CONSTANTES ARBITRÁRIAS.

EXERCÍCIO 2: RESOLVER O P.V.I.:
$$\begin{cases} y'' + 4y - 4y' = 6\exp(2t) + 4t^2 + 2 \\ y(0) = 3 \\ y'(0) = 7 \end{cases}$$

A A SOLUÇÃO GERAL DA EQ. DIF. É (IDEM EXERCÍCIO ANTERIOR): $y(t) = c_1 \exp(2t) + c_2 t \exp(2t) + 3t^2 \exp(2t) + t^2 + 2t + 2$, COM c_1 e c_2 SENDO CONSTANTES ARBITRÁRIAS.

B IMPONDO $y(0) = 3 = c_1 \exp(0) + c_2 \cdot 0 \cdot \exp(0) + 3\cdot 0^2 \cdot \exp(0) + 0^2 + 2\cdot 0 + 2 \Rightarrow \boxed{3 = c_1 + 2 \quad (1)}$

DERIVANDO $y(t) \Rightarrow y'(t) = 2c_1 \exp(2t) + c_2 \exp(2t) + 2c_2 t \exp(2t) + 6t\exp(2t) + 6t^2 \exp(2t) + 2t + 2$

IMPONDO $y'(0) = 7 = 2c_1 \cdot \exp(0) + c_2 \exp(0) + 2c_2 \cdot 0 \cdot \exp(0) + 6\cdot 0 \cdot \exp(0) + 6\cdot 0^2 \exp(0) + 2\cdot 0 + 2$

$$\boxed{7 = 2c_1 + c_2 + 2 \quad (2)}$$

CONTINUAÇÃO DO EXERCÍCIO 2:

RESOLVENDO O SISTEMA ALGÉBRICO LINEAR NAS INCÓGNITAS QUE SÃO AS CONSTANTES ARBITRÁRIAS C_1 E C_2:

$$\begin{cases} 3 = C_1 + 2 \quad (1) \\ 7 = 2C_1 + C_2 + 2 \quad (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{DE } (1) \Rightarrow \boxed{C_1 = 1} \\ \text{DE } (2) \Rightarrow 7 = 2 \cdot 1 + C_2 + 2 \Rightarrow \boxed{C_2 = 3} \end{array}$$

Ⓒ RESPOSTA FINAL: A SOLUÇÃO ÚNICA DO P.V.I É:

$$\boxed{y(t) = 1 \cdot \exp(2t) + 3t\exp(2t) + 3t^2\exp(2t) + t^2 + 2t + 2}$$

2.2.2. VARIAÇÃO DE PARÂMETROS: PERMITE OBTER $y_p(t)$ PARA QUALQUER $g(t)$. ESSE MÉTODO NECESSITA DA REALIZAÇÃO DE INTEGRAIS E, DEPENDENDO DE $g(t)$, A RESOLUÇÃO TORNA-SE COMPLICADA DEVIDO À INTEGRAÇÃO. EM TE315, NOS LIMITAREMOS A UTILIZAR O MÉTODO $\boxed{2.2.2}$ PARA EQUAÇÕES DE SEGUNDA ORDEM, ONDE AS INTEGRAIS ENVOLVIDAS PODEM SER RESOLVIDAS USANDO INTEGRAÇÃO POR PARTES E/OU SUBSTITUIÇÃO.

DEDUÇÃO PARA 2ª ORDEM:

SEJA UMA EQUAÇÃO 2.2 ONDE A SOLUÇÃO GERAL DA HOMOGÊNEA ASSOCIADA É: $y_H(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$, ONDE c_1 E c_2 SÃO CONSTANTES ARBITRÁRIAS. PARA QUALQUER COMBINAÇÃO DE VALORES NUMÉRICOS PARA c_1 E c_2, RESULTARÁ SEMPRE EM ZERO A EXPRESSÃO: $\boxed{y_H''(t) + a_0 y_H(t) + a_1 y_H'(t)}$

O RACIOCÍNIO DESTE MÉTODO $\boxed{2.2.2}$ É SUBSTITUIR c_1 E c_2 POR FUNÇÕES QUE VARIAM COM t [POR EXEMPLO, $u_1(t)$ E $u_2(t)$] DE TAL MODO QUE A EXPRESSÃO $\boxed{u_1(t) y_1(t) + u_2(t) y_2(t) = y_p(t)}$ SEJA SOLUÇÃO PARTICULAR DA EQUAÇÃO NÃO HOMOGÊNEA. EM OUTRAS PALAVRAS, SUBSTITUINDO NA EQ. NÃO HOMOGÊNEA TENHA-SE:

$$y_p''(t) + a_0 y_p(t) + a_1 y_p'(t) = g(t).$$

DERIVANDO: $\boxed{y_p'(t) = u_1'(t)\, y_1(t) + u_1(t) y_1'(t) + u_2'(t) y_2(t) + u_2(t) y_2'(t)}$

UMA PRIMEIRA CONDIÇÃO A SER OBEDECIDA POR $u_1(t)$ E $u_2(t)$ É: $\boxed{u_1'(t) y_1(t) + u_2'(t) y_2(t) = 0}$ (I)

$y_p'(t)$ SIMPLIFICA-SE PARA: $y_p'(t) = u_1(t) y_1'(t) + u_2(t) y_2'(t)$

DERIVANDO NOVAMENTE: $y_p''(t) = u_1'(t) y_1'(t) + u_1(t) y_1''(t) + u_2'(t) y_2'(t) + u_2(t) y_2''(t)$

IMPONDO QUE $y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$ SEJA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO NÃO HOMOGÊNEA:

$$\left[u_1'(t)y_1'(t) + u_1(t)y_1''(t) + u_2'(t)y_2'(t) + u_2(t)y_2''(t)\right] + a_0\left[u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)\right] + a_1\left[u_1(t)y_1'(t) + u_2(t)y_2'(t)\right] = g(t)$$

REARRANJANDO (E OMITINDO O (t) POR SIMPLICIDADE DE NOTAÇÃO):

$$u_1\left[\underbrace{y_1'' + a_0y_1 + a_1y_1'}_{\substack{=0 \\ \text{pois } y_1 \text{ é solução} \\ \text{da homogênea}}}\right] + u_2\left[\underbrace{y_2'' + a_0y_2 + a_1y_2'}_{\substack{=0 \\ \text{pois } y_2 \text{ é solução} \\ \text{da homogênea}}}\right] + \left[u_1'y_1' + u_2'y_2'\right] = g \Rightarrow$$

A SEGUNDA CONDIÇÃO A SER OBEDECIDA POR $u_1(t)$ E $u_2(t)$ É:

$$\boxed{u_1'(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2'(t) = g(t)} \quad (II)$$

AS 2 CONDIÇÕES FORMAM UM SISTEMA ALGÉBRICO LINEAR NAS 2 INCÓGNITAS $u_1'(t)$ E $u_2'(t)$:

$$\begin{cases} u_1'(t)y_1(t) + u_2'(t)y_2(t) = 0 & (I) \\ u_1'(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2'(t) = g(t) & (II) \end{cases}$$

RESOLVENDO O SISTEMA 2x2:

MULTIPLICAR (II) POR $\frac{y_1}{y_1'}$ E SUBTRAIR (I) DO RESULTADO ANTERIOR:

$$u_1'(t)\left[\underbrace{\frac{y_1(t)}{y_1'(t)}y_1'(t) - y_1(t)}_{=0}\right] + u_2'(t)\left[\frac{y_1(t)y_2'(t)}{y_1'(t)} - y_2(t)\right] = g(t)\frac{y_1(t)}{y_1'(t)}$$

$$u_2'(t)\left[\frac{y_1(t)y_2'(t)-y_2(t)y_1'(t)}{\cancel{y_1'(t)}}\right]=g(t)\frac{y_1(t)}{\cancel{y_1'(t)}} \Rightarrow u_2'(t)=\frac{g(t)\,y_1(t)}{y_1(t)y_2'(t)-y_2(t)y_1'(t)}=\frac{g(t)\,y_1(t)}{W(y_1,y_2)}$$

ONDE $W(y_1,y_2)=\det\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t)\end{pmatrix}$

DA EQUAÇÃO (I): $u_1'(t)=\dfrac{-u_2'(t)\,y_2(t)}{y_1(t)} \underset{u_2'(t)}{\overset{\text{SUBST.}}{\Longrightarrow}} u_1'(t)=\dfrac{-g(t)\,y_1(t)}{W(y_1,y_2)}\cdot\dfrac{y_2(t)}{y_1(t)}=\dfrac{-g(t)\,y_2(t)}{W(y_1,y_2)}$

FINALIZANDO A DEDUÇÃO, AS FUNÇÕES $u_1(t)$ e $u_2(t)$ SÃO DADAS POR: $u_1(t)=\int u_1'(t)\,dt$ e $u_2(t)=\int u_2'(t)\,dt$

REGRA PRÁTICA PARA 2ª ORDEM:

A SOLUÇÃO PARTICULAR USANDO MÉTODO 2.2.2 É: $y_p(t)=u_1(t)\,y_1(t)+u_2(t)\,y_2(t)$, ONDE:

→ $y_1(t)$ E $y_2(t)$ SÃO AS DUAS SOLUÇÕES L.I. DA EQUAÇÃO HOMOGÊNEA ASSOCIADA;

→ $u_1(t)=-\displaystyle\int\frac{y_2(t)\,g(t)}{W(y_1,y_2)}\,dt$ → $u_2(t)=\displaystyle\int\frac{y_1(t)\,g(t)}{W(y_1,y_2)}\,dt$

→ $W(y_1,y_2)=\det\begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t)\end{pmatrix}$

EXERCÍCIO: OBTER A SOLUÇÃO GERAL DE: $y'' + 4y - 4y' = 6e^{2t} + 2$

A SOLUÇÃO GERAL É: $y(t) = y_H(t) + y_P(t)$

$y_H(t) \Rightarrow$ SOLUÇÃO GERAL DE $y_H'' + 4y_H - 4y_H' = 0 \Rightarrow y_H(t) = c_1 \exp(2t) + c_2 t \exp(2t)$, com c_1 e c_2 constantes arbitrárias

PARA OBTER $y_P(t)$, É POSSÍVEL USAR AMBOS 2.2.1 E $\boxed{2.2.2}$. AQUI VOU USAR $\boxed{2.2.2}$.

$y_P(t) = u_1(t)\, y_1(t) + u_2(t)\, y_2(t)$, onde: $y_1(t) = \exp(2t)$ $\quad y_2(t) = t\exp(2t)$

$$W(y_1,y_2) = \det\begin{pmatrix} \exp(2t) & t\exp(2t) \\ 2\exp(2t) & \exp(2t) + 2t\exp(2t) \end{pmatrix} = \exp(4t) + \cancel{2t\exp(4t)} - \cancel{2t\exp(4t)} = \exp(4t)$$

$$u_1(t) = -\int \frac{y_2(t)\, g(t)}{W(y_1,y_2)}\, dt = -\int \frac{t\exp(2t)\left[6\exp(2t) + 2\right]}{\exp(4t)}\, dt = -6\int t\, dt - 2\int t\exp(-2t)\, dt$$

INTEGRAÇÃO POR PARTES: $\displaystyle\int t\exp(-2t)\, dt = \frac{t\exp(-2t)}{-2} - \int \frac{\exp(-2t)}{-2} \cdot 1 \cdot dt = -\frac{t\exp(-2t)}{2} - \frac{\exp(-2t)}{4}$

$u = t \Rightarrow du = 1$ $\qquad \int u\,dv = uv - \int v\,du$

$dv = \exp(-2t)$

$v = \dfrac{\exp(-2t)}{-2}$

CONFERINDO: $\dfrac{d}{dt}\left[-\dfrac{t\exp(-2t)}{2} - \dfrac{\exp(-2t)}{4}\right] = \cancel{-\dfrac{\exp(-2t)}{2}} + t\exp(2t) + \cancel{\dfrac{1}{2}\exp(-2t)} = t\exp(2t)$

$$u_1(t) = -\frac{6t^2}{2} - 2\left[\frac{-t\,\exp(-2t)}{2} - \frac{\exp(-2t)}{4}\right] + \underbrace{\cancel{c}^{\,0}}_{} = -3t^2 + t\exp(-2t) + \frac{1}{2}\exp(-2t)$$

COMO QUER-SE
APENAS 1 SOLUÇÃO PARTICULAR, SIMPLIFICA-SE FAZENDO C=0

$$u_2(t) = +\int \frac{y_1(t)\,g(t)}{W(y_1,y_2)}\,dt = \int \frac{\exp(2t)\,[6\exp(2t)+2]}{\exp(4t)}\,dt = 6\int 1\cdot dt + 2\int \exp(-2t)\,dt$$

$$u_2(t) = 6t - \exp(-2t) + \cancel{c}^{\,0} = 6t - \exp(-2t)$$

$$y_p(t) = \underbrace{\left[-3t^2 + t\exp(-2t) + \frac{1}{2}\exp(-2t)\right]}_{u_1(t)}\underbrace{\exp(2t)}_{y_1(t)} + \underbrace{\left[6t - \exp(-2t)\right]}_{u_2(t)}\underbrace{t\exp(+2t)}_{y_2(t)}$$

$$y_p(t) = -3t^2\exp(2t) + t + \frac{1}{2} + 6t^2\exp(2t) - t = 3t^2\exp(2t) + \frac{1}{2}$$

RESPOSTA: $\boxed{\text{SOLUÇÃO GERAL: } y(t) = c_1\exp(2t) + c_2\,t\exp(2t) + 3t^2\exp(2t) + \frac{1}{2}}$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias

EXERCÍCIO: RESOLVER O P.V.I: $\begin{cases} y'' + 4y - 4y' = 6\exp(2t) + 2 \\ y(0) = 6 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$

Ⓐ SOLUÇÃO GERAL DA EQ. DIF (IDEM EXERCÍCIO ANTERIOR): $y(t) = c_1 \exp(2t) + c_2 t \exp(2t) + 3t^2 \exp(2t) + \frac{1}{2}$

ONDE c_1 e c_2 SÃO CONSTANTES ARBITRÁRIAS.

Ⓑ IMPONDO $y(0) = 6 = c_1 \exp(0) + c_2 \cdot 0 \cdot \exp(0) + 3 \cdot 0^2 \exp(0) + \frac{1}{2} = c_1 + \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{6 = c_1 + \frac{1}{2} \quad (1)}$

DERIVANDO $y(t) \Rightarrow y'(t) = 2c_1 \exp(2t) + c_2 \exp(2t) + 2c_2 t \exp(2t) + 6t \exp(2t) + 6t^2 \exp(2t)$

IMPONDO $y'(0) = 4 = 2c_1 \cdot \exp(0) + c_2 \exp(0) + 2 \cdot c_2 \cdot 0 \exp(0) + 6 \cdot 0 \cdot \exp(0) + 6 \cdot 0^2 \cdot \exp(0)$

$$\boxed{4 = 2c_1 + c_2 \quad (2)}$$

$$\begin{cases} 6 = c_1 + \frac{1}{2} & (1) \\ 4 = 2c_1 + c_2 & (2) \end{cases} \xrightarrow[\text{SISTEMA ALGÉBRICO}]{\text{RESOLVENDO O}} \begin{matrix} c_1 = \frac{11}{2} \\ c_2 = -7 \end{matrix}$$

Ⓒ A SOLUÇÃO ÚNICA DO P.V.I É: $\boxed{y(t) = \frac{11}{2} \exp(2t) - 7t \exp(2t) + 3t^2 \exp(2t) + \frac{1}{2}}$

2.3 HOMOGÊNEAS COM COEFICIENTES VARIÁVEIS: SÃO O SUBCONJUNTO DAS EQUAÇÕES DO TÓPICO 2 QUE PODEM SER REESCRITAS NA SEGUINTE FORMA: $\boxed{y^{(n)} + p_0(t)y + p_1(t)y' + \ldots + p_{n-1}(t)\,y^{(n-1)} = 0}$

AS EQUAÇÕES 2.3 SÃO HOMOGÊNEAS, POIS $g(t) = 0$.

EM TE315, NOS LIMITAREMOS A EQUAÇÕES 2.3 QUE SÃO:

- DE SEGUNDA ORDEM, OU SEJA, $\boxed{y'' + p_0(t)y + p_1(t)y' = 0}$;
- COMPOSTAS POR $p_0(t)$ E $p_1(t)$ DESCRITOS POR POLINÔMIOS EM t.

ALÉM DISSO, PARA EQUAÇÕES 2.3, NOSSO ÚNICO OBJETIVO EM TE315 SERÁ OBTER A SOLUÇÃO GERAL DA EQ. DIFERENCIAL.

PORTANTO, A SOLUÇÃO GERAL DAS EQUAÇÕES 2.3 ESTUDADAS EM TE315 É DADA POR: $\boxed{y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (t - t_0)^i}$

NO ENUNCIADO, SERÁ INDICADO QUAL O VALOR NUMÉRICO DE $\boxed{t_0}$ A PARTIR DO QUAL DEVE SER FEITA A EXPANSÃO EM SÉRIE DE POTÊNCIAS (DE ORDEM INFINITA).

O PROCEDIMENTO DE RESOLUÇÃO DO ENUNCIADO CONSISTE EM OBTER AS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS QUE RELACIONAM OS INFINITOS COEFICIENTES a_i (COM $i = 0, 1, 2, \ldots, \infty$), PRESENTES DENTRO DA SOMATÓRIA, EM FUNÇÃO DAS 2 CONSTANTES ARBITRÁRIAS (c_1 e c_2).

PODE-SE MOSTRAR QUE SE $p_0(t)$ E $p_1(t)$ FOREM FUNÇÕES ANALÍTICAS EM t_0, A SOLUÇÃO GERAL DA EQUAÇÃO 2.3 PODE SER REPRESENTADA POR UMA SÉRIE DE POTÊNCIA COM INFINITOS TERMOS.

FUNÇÕES ANALÍTICAS EM t_0 SÃO FUNÇÕES QUE PODEM SER INFINITAMENTE DIFERENCIÁVEIS EM $\boxed{t_0}$ E CUJA SÉRIE DE TAYLOR DE ORDEM INFINITA EM TORNO DE $\boxed{t_0}$ COINCIDE COM A PRÓPRIA FUNÇÃO EM $\boxed{t_0}$.

POLINÔMIOS SÃO ANALÍTICOS PARA QUALQUER VALOR DA VARIÁVEL INDEPENDENTE.

NÃO IREMOS RESOLVER, EM TE315, P.V.I QUE CONTENHAM EQUAÇÕES 2.3

EXERCÍCIO: OBTER A SOLUÇÃO GERAL, EM TORNO DE $\boxed{t_0 = 1}$, DA EQUAÇÃO: $\boxed{y'' + 3t\,y + (t+2)^2 y' = 0}$

RESOLUÇÃO:

COMPARANDO COM FORMA GERAL, OBTÉM-SE: $\boxed{p_0(t) = 3t}$; $\boxed{p_1(t) = (t+2)^2}$

OS POLINÔMIOS $p_0(t)$ E $p_1(t)$ SÃO ENTÃO REARRANJADOS EM FUNÇÃO DE $(t-t_0)$:

$p_0(t) = 3t = 3(t+1-1) = 3[(t-1)+1] \Rightarrow$ PORTANTO: $p_0[t-1] = 3(t-1)+3$

$p_1(t) = (t+2)^2 = (t-1+1+2)^2 = [(t-1)+3]^2 = (t-1)^2 + 6(t-1) + 9 \Rightarrow$ PORTANTO: $p_1(t-1) = (t-1)^2 + 6(t-1) + 9$

SUBSTITUINDO NA EQ. DIF.

$$y'' + [3(t-1)+3]\,y + [(t-1)^2 + 6(t-1) + 9]\,y' = 0$$

SABE-SE QUE: $y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (t-t_0)^i = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (t-1)^i = a_0 (t-1)^0 + a_1 (t-1)^1 + a_2 (t-1)^2 + \dots + a_\infty (t-1)^\infty$

DERIVANDO $y(t)$:

$$y'(t) = 0 + a_1 \cdot 1 \cdot (t-1)^{1-1} + a_2 \cdot 2 \cdot (t-1)^{2-1} + \dots + a_\infty \cdot \infty\,(t-1)^{\infty-1} = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot a_i (t-1)^{i-1}$$

DERIVANDO $y'(t)$:

$$y''(t) = 0 + 0 + a_2 \cdot 2 \cdot 1\,(t-1)^{2-1-1} + \dots + a_\infty \cdot \infty \cdot (\infty-1)\,(t-1)^{\infty-1-1} = \sum_{i=2}^{\infty} a_i\, i\,(i-1)(t-1)^{i-2}$$

SUBSTITUINDO $y(t)$, $y'(t)$ e $y''(t)$ NA EQ. DIFERENCIAL:

$$\sum_{i=2}^{\infty} a_i\, i\,(i-1)(t-1)^{i-2} + \left[3(t-1)+3\right]\sum_{i=0}^{\infty} a_i (t-1)^i + \left[(t-1)^2 + 6(t-1) + 9\right]\sum_{i=1}^{\infty} i\, a_i\, (t-1)^{i-1} = 0$$

OBSERVE QUE, NA EXPRESSÃO ACIMA, A DEPENDÊNCIA EM t É SEMPRE (DENTRO E FORA DA SOMATÓRIA) NA FORMA $(t-t_0)$.
REALIZANDO A DISTRIBUTIVA:

$$\underbrace{\sum_{i=2}^{\infty} a_i\, i\,(i-1)(t-1)^{i-2}}_{\text{PARCELA 1}} + \underbrace{3(t-1)\sum_{i=0}^{\infty} a_i (t-1)^i}_{\text{PARCELA 2}} + \underbrace{3\sum_{i=0}^{\infty} a_i (t-1)^i}_{\text{PARCELA 3}} + \underbrace{(t-1)^2\sum_{i=1}^{\infty} i\, a_i (t-1)^{i-1}}_{\text{PARCELA 4}} + \underbrace{6(t-1)\sum_{i=1}^{\infty} i\, a_i (t-1)^{i-1}}_{\text{PARCELA 5}} + \underbrace{9\sum_{i=1}^{\infty} i\, a_i (t-1)^{i-1}}_{\text{PARCELA 6}} = 0$$

TEM-SE ENTÃO A SOMA DE 6 PARCELAS. OBTENDO OS PRIMEIROS TERMOS DE CADA PARCELA:

PARCELA 1: $\sum_{i=2}^{\infty} a_i\, i\,(i-1)(t-1)^{i-2} = 2\cdot 1\cdot a_2 (t-1)^0 + 3\cdot 2\cdot a_3 \cdot (t-1)^1 + \boxed{4\cdot 3\cdot a_4 (t-1)^2} + 5\cdot 4\cdot a_5 (t-1)^3 + \dots$

PARCELA 2: $3(t-1)\sum_{i=0}^{\infty} a_i (t-1)^i = 3a_0 (t-1)^{1+0} + \boxed{3a_1 (t-1)^2} + 3a_2 (t-1)^3 + \dots$

PARCELA 3: $3\sum_{i=0}^{\infty} a_i (t-1)^i = 3a_0 (t-1)^0 + 3a_1 (t-1)^1 + \boxed{3a_2 (t-1)^2} + 3a_3 (t-1)^3 + \dots$

PARCELA 4: $(t-1)^2\sum_{i=1}^{\infty} i\, a_i (t-1)^{i-1} = \boxed{1 a_1 (t-1)^{2+0}} + 2a_2 (t-1)^3 + \dots$

PARCELA 5: $6(t-1)\sum_{i=1}^{\infty} i\, a_i (t-1)^{i-1} = 6\cdot 1\cdot a_1 (t-1)^{1+0} + \boxed{6\cdot 2\cdot a_2 (t-1)^2} + 6\cdot 3\cdot a_3 (t-1)^3 + \dots$

PARCELA 6: $9\sum_{i=1}^{\infty} i\, a_i (t-1)^{i-1} = 9\cdot 1\cdot a_1 (t-1)^0 + 9\cdot 2\cdot a_2 (t-1)^1 + \boxed{9\cdot 3\cdot a_3 (t-1)^2} + 9\cdot 4\cdot a_4 (t-1)^3 + \dots$

VAMOS IDENTIFICAR QUAL É A MENOR POTÊNCIA DE $(t-1)$ QUE ESTÁ PRESENTE EM TODAS AS 6 PARCELAS:

$(t-1)^0 \Rightarrow$ não está presente nas parcelas 2, 4 e 5;

$(t-1)^1 \Rightarrow$ não está presente na parcela 4;

$(t-1)^2 \Rightarrow$ está presente em todas as parcelas.

VAMOS ENTÃO INCLUIR TODAS AS 6 PARCELAS EM UMA MESMA SOMATÓRIA QUE GERE TODOS OS TERMOS COM POTÊNCIAS DE $(t-1)$ IGUAIS OU MAIORES QUE 2:

$$\sum_{m=2}^{\infty} (t-1)^m \left[(m+2)(m+1)a_{m+2} + 3a_{m-1} + 3a_m + (m-1)a_{m-1} + 6(m)a_m + 9(m+1)a_{m+1} \right]$$

VOLTA-SE ENTÃO A EQ. DIF., USANDO A SOMATÓRIA ACIMA, E ~~[illegible]~~ AGRUPANDO OS TERMOS FORA DA SOMATÓRIA:

$$(t-1)^0\left[2a_2 + 3a_0 + 9a_1\right] + (t-1)^1\left[6a_3 + 3a_0 + 3a_1 + 6a_1 + 18a_2\right] + \sum_{m=2}^{\infty}(t-1)^m\left[(m+2)(m+1)a_{m+2} + 3a_{m-1} + 3a_m + (m-1)a_{m-1} + 6ma_m + 9(m+1)a_{m+1}\right]$$

$$= 0\cdot(t-1)^0 + 0(t-1)^1 + \sum_{m=2}^{\infty} 0(t-1)^m$$

PARA QUE A IGUALDADE IMPOSTA PELA EQ. DIF. SEJA VÁLIDA P/ QUALQUER t, ENTÃO OS COEFICIENTES QUE MULTIPLICAM UMA DETERMINADA POTÊNCIA DE $(t-1)$ DEVEM SER OS MESMOS DO LADO ESQUERDO E DO LADO DIREITO, OU SEJA:

$(t-1)^0 \Rightarrow \boxed{2a_2 + 3a_0 + 9a_1 = 0}$

$(t-1)^1 \Rightarrow \boxed{6a_3 + 3a_0 + 9a_1 + 18a_2 = 0}$

$(t-1)^m \Rightarrow \boxed{(m+2)(m-1)a_{m+2} + 9(m+1)a_{m+1} + \left[3 + 6(m)\right]a_m + \left[3 + (m-1)\right]a_{m-1} = 0}$ p/ $m = 2, 3, \ldots, \infty$

AQUI TEM-SE UM SISTEMA ALGÉBRICO LINEAR DE INFINITAS EQUAÇÕES NAS INFINITAS INCÓGNITAS a_i COM $i=0,1,\dots,\infty$. SABE-SE QUE ESSE SISTEMA TEM SEMPRE INFINITAS SOLUÇÕES, POSSUINDO 2 GRAUS DE LIBERDADE QUE SÃO AS 2 CONSTANTES ARBITRÁRIAS (c_1 E c_2).

RESOLVENDO O SISTEMA $\infty \times \infty$:

$\Rightarrow$ PARTE-SE DA EQUAÇÃO $\Rightarrow$ $\boxed{2a_2 + 3a_0 + 9a_1 = 0}$ CHAMANDO $\boxed{a_0 = c_1}$ E $\boxed{a_1 = c_2}$, OU SEJA, USANDO OS 2 GRAUS DE LIBERDADE, TEM-SE $a_2 = \dfrac{-3c_1 - 9c_2}{2}$

DA EQUAÇÃO $\boxed{6a_3 + 3a_0 + 9a_1 + 18a_2 = 0}$, OBTÉM-SE a_3 $\Rightarrow$ $\boxed{a_3 = \dfrac{-3c_1 - 9c_2 - 18\left(\dfrac{-3c_1 - 9c_2}{2}\right)}{6}}$

OU SEJA, a_3 É FUNÇÃO DE c_1 E c_2.

P/ OBTER OS DEMAIS COEFICIENTES $(a_4, a_5, \dots, a_\infty)$, ISOLAR O COEFICIENTE DE MAIOR ÍNDICE NA EQUAÇÃO P/ $m = 2, 3, \dots, \infty$, OU SEJA:

$$a_{m+2} = \frac{-\left\{+9(m+1)\,a_{m+1} + [3 + 6(m)]\,a_m + [3 + (m-1)]\,a_{m-1}\right\}}{(m+2)(m+1)} \quad \text{p/ } m = 2, 3, \dots, \infty$$

DAQUI É POSSÍVEL OBTER TODOS OS DEMAIS COEFICIENTES $a_4, a_5, \dots, a_\infty$ EM FUNÇÃO DE c_1 E c_2.

Resposta: A SOLUÇÃO GERAL É: $y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i (t-1)^i$

ONDE: $a_0 = c_1$

$a_1 = c_2$

$a_2 = \dfrac{-3c_1 - 9c_2}{2}$

$a_3 = \dfrac{-18a_2 - 9a_1 - 3a_0}{6}$

$$a_{m+2} = \frac{-\left\{9(m+1)a_{m+1} + [3+6(m)]a_m + [3+(m-1)]a_{m-1}\right\}}{(m+2)(m+1)}, \text{ p/ } m = 2, 3, \ldots, \infty$$

SENDO c_1 e c_2 CONSTANTES ARBITRÁRIAS