AUTOVALORES E AUTOVETORES

SEJA $\underline{\underline{A}}$ UMA MATRIZ $n \times n$ CUJOS ELEMENTOS SÃO NÚMEROS REAIS CONHECIDOS.

AUTOVALORES DA MATRIZ $\underline{\underline{A}}$ SÃO OS VALORES DE λ QUE SATISFAZEM $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = \underline{0}$, ONDE det INDICA O DETERMINANTE, $\underline{\underline{I}}$ É A MATRIZ IDENTIDADE DE ORDEM n $\left[\underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}\right]$, E λ SÃO ESCALARES (ELEMENTOS DE DIMENSÃO 1×1)

AUTOVALORES SÃO, PORTANTO, AS RAÍZES DE UM POLINÔMIO DE ORDEM n. PARA UM POLINÔMIO DE ORDEM n, HÁ SEMPRE n RAÍZES, QUE PODEM SER IGUAIS OU REPETIDAS. EM TE315 ENCONTRAREMOS AUTOVALORES DE MATRIZES DE ATÉ ORDEM $3 = n$, ONDE OS AUTOVALORES SE REPETEM NO MÁXIMO 2 VEZES.

EXEMPLO 1: OBTER OS AUTOVALORES DA MATRIZ $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 0-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 0-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (-\lambda)^3 + 1 + 1 - (-\lambda) - (-\lambda) - (-\lambda) = \boxed{-\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0}$$

AS 3 RAÍZES DO POLINÔMIO $\boxed{-\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0}$ SÃO: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = -1$

PORTANTO, A MATRIZ $\underline{\underline{A}}$ DO EXEMPLO 1 TEM UM AUTOVALOR IGUAL A 2 DE MULTIPLICIDADE 1, OU SEJA, O AUTOVALOR 2 NÃO SE REPETE, E UM AUTOVALOR IGUAL A -1 DE MULTIPLICIDADE 2, OU SEJA, O AUTOVALOR -1 SE REPETE 2 VEZES.

AUTOVETORES $\underset{\sim}{\xi}_i$ DA MATRIZ $\underline{\underline{A}}$, ASSOCIADOS AO AUTOVALOR λ_i, SÃO AS SOLUÇÕES NÃO TRIVIAIS (OU SEJA, SOLUÇÕES ONDE PELO MENOS UM ELEMENTO DO VETOR $\underset{\sim}{\xi}_i$ É DIFERENTE DE ZERO) DO SISTEMA ALGÉBRICO LINEAR HOMOGÊNEO: $\underline{\underline{A}}\,\underset{\sim}{\xi}_i = \lambda_i\,\underset{\sim}{\xi}_i$ $\left[\text{ou } \left(\underline{\underline{A}} - \lambda_i \underline{\underline{I}}\right)\underset{\sim}{\xi}_i = \underline{0}\right]$, ONDE $\underline{0}$ É UM VETOR nx1 COMPOSTO POR ZEROS $\left[\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right]$ E $\underline{\underline{I}}$ É A MATRIZ IDENTIDADE DE ORDEM n.

PARA AUTOVALORES λ_i QUE NÃO SE REPETEM, HÁ INFINITOS AUTOVETORES ASSOCIADOS A ELE, PORÉM TODOS ESSES AUTOVELORES SÃO LINEARMENTE DEPENDENTES ENTRE SI. PORTANTO, AUTOVALORES DE MULTIPLICIDADE 1 POSSUEM APENAS 1 AUTOVETOR LINEARMENTE INDEPENDENTE (l.i.).

DICA: USANDO ESCALONAMENTO PARA RESOLVER O SISTEMA ALGÉBRICO LINEAR HOMOGÊNEO QUE FORNECE OS AUTOVETORES ASSOCIADOS A UM AUTOVALOR DE MULTIPLICIDADE 1, HAVERÁ SEMPRE UMA E SOMENTE UMA LINHA COMPOSTA POR SOMENTE ZEROS AO FINAL DO ESCALONAMENTO E PORTANTO SOMENTE UM GRAU DE LIBERDADE.

EXEMPLO 2: OBTER OS AUTOVETORES ASSOCIADOS AO AUTOVALOR DE MULTIPLICIDADE 1 DO EXEMPLO 1:

AQUI $\Rightarrow \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ E $\lambda_i = 2$. PORTANTO $= \left(\underline{\underline{A}} - \lambda_i \underline{\underline{I}}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

O SIST. ALG. LINEAR HOMOGÊNEO A SER RESOLVIDO É: $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ONDE $\underset{\sim}{\xi}_i = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$

RESOLVENDO O SISTEMA POR ESCALONAMENTO:

MATRIZ AUMENTADA: $\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]$. PARA ZERAR OS ELEMENTOS DA PRIMEIRA COLUNA ABAIXO DA DIAGONAL PRINCIPAL:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & -2 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3 = 2\ell_3 + \ell_1]{\ell_1 = \ell_1,\ \ell_2 = 2\ell_2 + \ell_1} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & 0 \\ 0 & 3 & -3 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3 = \ell_3 + \ell_2]{\ell_1 = \ell_1,\ \ell_2 = \ell_2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -3 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

linha 3 substituída por 2 x linha 3 + linha 1

FIM DO ESCALONAMENTO

CONFORME ESPERADO, AO FINAL DO ESCALONAMENTO SOMENTE A ÚLTIMA LINHA É COMPOSTO POR TUDO ZERO. ISSO INDICA QUE A LINHA 3 É SEMPRE SATISFEITA (OU SEJA, A EQUAÇÃO ASSOCIADA A ESSA LINHA É SEMPRE SATISFEITA). TEM-SE PORTANTO 3 INCÓGNITAS (ξ_1, ξ_2, ξ_3) PARA SATISFAZER SOMENTE 2 EQUAÇÕES. HÁ UM GRAU DE LIBERDADE (Nº DE INCÓGNITAS - Nº DE EQUAÇÕES A SEREM SATISFEITAS AO FINAL DO ESCALONAMENTO).

DA $\ell_2 \Rightarrow 0 \cdot \xi_1 - 3\xi_2 + 3\xi_3 = 0 \Rightarrow$ IMPONDO $\xi_3 = \alpha$ TEM-SE $\xi_2 = \alpha$

SUBSTITUINDO $\xi_3 = \alpha$ e $\xi_2 = \alpha$ NA ℓ_1: $-2\xi_1 + 1 \cdot \xi_2 + 1 \cdot \xi_3 = 0 \Rightarrow \xi_1 = \alpha$

PORTANTO: $\xi_i = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, p/ $\forall \alpha \neq 0$ [PARA QUALQUER α DIFERENTE DE ZERO, POIS SE $\alpha = 0$ REDUZ-SE A SOLUÇÃO TRIVIAL]

COMO α PODE ASSUMIR INFINITOS VALORES, HÁ INFINITOS AUTOVETORES ASSOCIADOS AO AUTOVALOR 2.

PARA ESCOLHER 1 AUTOVETOR L.I., BASTA SUBSTITUIR α POR QUALQUER VALOR NUMÉRICO DIFERENTE DE ZERO.

POR EXEMPLO, IMPONDO $\alpha = 1$, TEM-SE O AUTOVETOR L.I. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ASSOCIADO AO AUTOVALOR 2 DA MATRIZ $\underline{\underline{A}}$.

PARA AUTOVALORES λ_i QUE SE REPETEM 2 VEZES, HÁ 2 CASOS POSSÍVEIS:

→ TODOS OS INFINITOS AUTOVETORES SÃO LINEARMENTE DEPENDENTES ENTRE SI, OU SEJA, HÁ APENAS 1 AUTOVETOR l.i. ASSOCIADO A ESSE AUTOVALOR DE MULTIPLICIDADE 2. DICA: QUANDO ESSE FOR O CASO, AO FINAL DO ESCALONAMENTO HAVERÁ UMA E SOMENTE UMA LINHA COMPOSTA POR SOMENTE ZEROS E PORTANTO SOMENTE UM GRAU DE LIBERDADE.

→ ENTRE OS INFINITOS AUTOVETORES, É POSSÍVEL ENCONTRAR 2 AUTOVETORES l.i. ASSOCIADOS A ESSE AUTOVALOR DE MULTIPLICIDADE 2. DICA: QUANDO ESSE FOR O CASO, AO FINAL DO ESCALONAMENTO HAVERÁ EXATAMENTE DUAS LINHAS COMPOSTAS POR SOMENTE ZEROS E PORTANTO HAVERÁ 2 GRAUS DE LIBERDADE.

EXEMPLO 3: OBTER OS AUTOVETORES ASSOCIADOS AO AUTOVALOR DE MULTIPLICIDADE 2 DO EXEMPLO 1:

AQUI $\Rightarrow \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ E $\lambda_i = -1$. PORTANTO $\Rightarrow (\underline{\underline{A}} - \lambda_i \underline{\underline{I}}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - (-1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

O SISTEMA ALG. LINEAR A SER RESOLVIDO É: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ONDE $\xi_i = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{matrix} l_1 = l_1 \\ l_2 = l_2 - l_1 \\ l_3 = l_3 - l_1 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ COMO HÁ 2 LINHAS COMPOSTAS POR SOMENTE ZERO, HÁ 2 EQUAÇÕES ASSOCIADAS A ESSAS LINHAS QUE SÃO SEMPRE SATISFEITAS E PORTANTO TEM-SE 2 GRAUS DE LIBERDADE.

IMPONDO $\xi_3 = \alpha$ E $\xi_2 = \beta$, DA LINHA 1 TEM-SE: $1 \cdot \xi_1 + 1 \cdot \xi_2 + 1 \cdot \xi_3 = 0 \Rightarrow \xi_1 = -\alpha - \beta$

PORTANTO: $\xi_i = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha - \beta \\ \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, p/ $\forall\alpha$ E $\forall\beta$ DESDE QUE α E β SEJAM SIMULTANEAMENTE ZEROS.

CONTINUAÇÃO DO EXEMPLO 3:

COMO α E β PODEM ASSUMIR INFINITOS VALORES, HÁ INFINITOS AUTOVETORES ASSOCIADOS AO AUTOVALOR -1. COMO HÁ 2 GRAUS DE LIBERDADE (α E β), PARA ESCOLHER 2 AUTOVETORES l.i, BASTA ZERAR UM DESSES GRAUS DE LIBERDADE, MANTENDO O OUTRO DIFERENTE DE ZERO, E VICE-VERSA.

POR EXEMPLO:

- UM AUTOVETOR l.i. É OBTIDO IMPONDO $\alpha=1$ E $\beta=0$, RESULTANDO EM: $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- O OUTRO AUTOVETOR l.i. É OBTIDO IMPONDO $\alpha=0$ E $\beta=1$, RESULTANDO EM: $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

EXEMPLO 4: OBTER OS AUTOVALORES E AUTOVETORES DA MATRIZ $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

AUTOVALORES: $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = 0 \Rightarrow \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (-1-\lambda)(3-\lambda) - (-2)2 = 0$

$-3 + \lambda - 3\lambda + \lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0}$. AS RAÍZES DO POLINÔMIO SÃO: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

PORTANTO A MATRIZ POSSUI O AUTOVALOR 1 DE MULTIPLICIDADE 2.

PARA OBTER OS AUTOVETORES ASSOCIADOS AO AUTOVALOR 1, O SISTEMA ALG. LINEAR HOMOGÊNEO A SER RESOLVIDO É: $\begin{pmatrix} -1(-1) & 2 \\ -2 & 3-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ONDE $\underline{\xi_i} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$

CONTINUAÇÃO DO EXEMPLO 4:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} l_1 = l_1 \\ \longrightarrow \\ l_2 = l_2 - l_1 \end{array} \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

HÁ SOMENTE 1 LINHA COM SOMENTE ZEROS E PORTANTO HÁ SOMENTE 1 GRAU DE LIBERDADE

IMPONDO $\xi_2 = \alpha$ E SUBSTITUINDO NA LINHA 1: $-2\xi_1 + 2\xi_2 = 0 \Rightarrow \xi_1 = \alpha$

PORTANTO $\underline{\xi}_i = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, p/ $\forall \alpha \neq 0$

COMO α PODE ASSUMIR INFINITOS VALORES, HÁ INFINITOS AUTOVETORES ASSOCIADOS AO AUTOVALOR 1. COMO HÁ SOMENTE 1 GRAU DE LIBERDADE (α), PARA ESCOLHER 1 AUTOVETOR l.i. BASTA SUBSTITUIR α POR QUALQUER VALOR NUMÉRICO DIFERENTE DE ZERO.

POR EXEMPLO, IMPONDO $\alpha = 1$, TEM-SE O [redacted] AUTOVETOR l.i. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ASSOCIADO AO AUTOVALOR 1.

AUTOVETOR GENERALIZADO: QUANDO A MATRIZ $\underline{\underline{A}}$ POSSUI UM AUTOVALOR λ_i DE MULTIPLICIDADE 2 COM APENAS 1 AUTOVETOR l.i ASSOCIADO $(\underline{\xi}_i)$, EXISTEM AUTOVETORES GENERALIZADOS $\underline{\eta}_i$ QUE SÃO AS SOLUÇÕES NÃO TRIVIAIS DO SISTEMA ALGÉBRICO LINEAR NÃO HOMOGÊNEO:

$$\boxed{\left(\underline{\underline{A}} - \lambda_i \underline{\underline{I}}\right) \underline{\eta}_i = \underline{\xi}_i}$$

EXEMPLO 5: OBTER OS AUTOVETORES GENERALIZADOS ASSOCIADOS AO AUTOVALOR DE MULTIPLICIDADE 2 COM APENAS 1 AUTOVETOR L.I. DO EXEMPLO 4.

AQUI TEM-SE: $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; $\lambda_1 = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ $\quad \xi_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

PORTANTO: $\left(\underline{\underline{A}} - \lambda_i \underline{\underline{I}}\right)\eta_i = \xi_i \Rightarrow \begin{pmatrix} -1-1 & 2 \\ -2 & 3-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

RESOLVENDO O SIST. ALG. LINEAR NÃO HOMOGÊNEO:

$$\left[\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 = l_2 - l_1]{l_1 = l_1} \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow 1 \text{ GRAU DE LIBERDADE}$$

IMPONDO $\eta_2 = \alpha$, DA LINHA 1 TEM-SE:

$$-2\eta_1 + 2\eta_2 = 1$$
$$\eta_1 = \alpha - \frac{1}{2}$$

PORTANTO: $\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - \frac{1}{2} \\ \alpha \end{pmatrix}$

$$\eta = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{p/ } \forall \alpha$$

COMO α PODE ASSUMIR INFINITOS VALORES, HÁ INFINITOS AUTOVETORES GENERALIZADOS ASSOCIADOS AO AUTOVALOR 1 E AO AUTOVETOR $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

PARA ESCOLHER APENAS 1 AUTOVETOR GENERALIZADO, BASTA SUBSTITUIR α POR QUALQUER VALOR NUMÉRICO. POR EXEMPLO, IMPONDO $\alpha = 0$, TEM-SE O AUTOVETOR GENERALIZADO $\begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ASSOCIADO AO AUTOVALOR 1 E AO AUTOVETOR $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

TÓPICO 3: SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES DE 1ª ORDEM

QUALQUER SISTEMA DE EQUAÇÕES A SER ESTUDADO NO TÓPICO 3 PODE SER REESCRITO NA SEGUINTE FORMA GERAL:

$$\underline{X}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{g}(t)$$

ONDE:

→ $\underline{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$ É O VETOR CONTENDO AS n VARIÁVEIS DEPENDENTES $(x_1, x_2, \dots, x_n)$

→ $\underline{X}' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}_{n\times 1}$ É O VETOR CONTENDO AS DERIVADAS PRIMEIRAS DE CADA UMA DAS VARIÁVEIS DEPENDENTES EM RELAÇÃO À ÚNICA VARIÁVEL INDEPENDENTE (t), OU SEJA, $x_i' = \frac{dx_i}{dt}$ PARA $i = 1, 2, \dots, n$.

→ $\underline{\underline{A}}$ É UMA MATRIZ $n \times n$, $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, ONDE OS COEFICIENTES a_{ij} $(i = 1, 2, \dots, n)$ E $(j = 1, 2, \dots, n)$ SÃO CONSTANTES REAIS CONHECIDAS.

→ $\underline{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}_{n\times 1}$ É UM VETOR CONTENDO n FUNÇÕES $[g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)]$ QUE DEPENDEM DA VAR. IND. t.

OS SISTEMAS DO TÓPICO 3 SÃO:

- DIFERENCIAIS, POIS ENVOLVEM AS DERIVADAS DAS VAR. DEP. EM RELAÇÃO À ÚNICA VAR. INDEPENDENTE;
- ORDINÁRIAS, POIS HÁ UMA ÚNICA VARIÁVEL INDEPENDENTE;
- LINEARES, POIS AS VAR. DEPENDENTES E SUAS DERIVADAS PRIMEIRAS SE RELACIONAM DE FORMA LINEAR [POR EXEMPLO, NÃO HÁ PRODUTOS OU POTÊNCIAS ENVOLVENDO $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ E $(x_1', x_2', \dots, x_n')$];
- DE 1ª ORDEM, POIS A MAIOR DAS DERIVADAS ENVOLVIDAS É A PRIMEIRA;
- É UM SISTEMA, POIS ENVOLVE n EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EM n VARIÁVEIS DEPENDENTES.

NO TÓPICO 3, NOSSO OBJETIVO CONTINUARÁ SENDO RESOLVER DOIS ENUNCIADOS:

ENUNCIADO 1 OBTER A SOLUÇÃO GERAL DO SISTEMA. A SOLUÇÃO GERAL É DADA POR UM CONJUNTO DE n EXPRESSÕES MATEMÁTICAS QUE CONTÉM TODAS AS INFINITAS SOLUÇÕES DE CADA UMA DAS n EQUAÇÕES DIFERENCIAIS QUE COMPÕEM O SISTEMA. NO TÓPICO 3, A SOLUÇÃO GERAL SEMPRE UTILIZARÁ EXATAMENTE n CONSTANTES ARBITRÁRIAS $(C_1, \cdots, C_n)$. PARA QUALQUER COMBINAÇÃO DE VALORES NUMÉRICOS DESSAS CONSTANTES $(C_1, \cdots, C_n)$, TEM-SE UMA SOLUÇÃO PARA O SISTEMA. POR SOLUÇÃO DO SISTEMA, ENTENDE-SE UM CONJUNTO DE n EQUAÇÕES ALGÉBRICAS (OU SEJA, EQUAÇÕES SEM DERIVADA), QUE MANIPULEM AS n VAR. DEPENDENTES $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ E A ÚNICA VAR. INDEPENDENTE t, E QUE SATISFAÇA A IGUALDADE IMPOSTA PELO SISTEMA.

ENUNCIADO 2 OBTER A SOLUÇÃO ÚNICA DE UM PROBLEMA DE VALOR INICIAL (P.V.I). UM PVI SERÁ COMPOSTO DE UM SISTEMA QUE SE ENQUADRA NO TÓPICO 3 E n CONDIÇÕES INICIAIS (C.I). AS n CIs SÃO CONDIÇÕES IMPOSTAS PARA UM DETERMINADO VALOR NUMÉRICO DA VARIÁVEL INDEPENDENTE, CHAMADO DE t_0. PORTANTO, AS n C.Is SERÃO OS VALORES NUMÉRICOS DE: $x_1(t_0), x_2(t_0), \cdots, x_n(t_0)$.

O PROCEDIMENTO PARA RESOLVER UM P.V.I. É O MESMO DO PROCEDIMENTO USADO NO TÓPICO 2, OU SEJA:

Ⓐ OBTER A SOLUÇÃO GERAL DO SISTEMA PRESENTE NO ENUNCIADO.

Ⓑ IMPOR AS n C.Is DADAS NA SOLUÇÃO GERAL OBTIDA NO PASSO Ⓐ. ISSO RESULTARÁ EM UM SISTEMA ALGÉBRICO LINEAR DE n EQUAÇÕES NAS n INCÓGNITAS QUE SÃO AS CONSTANTES ARBITRÁRIAS $(C_1, C_2 \cdots, C_n)$. RESOLVER ESSE SISTEMA QUE SEMPRE TERÁ UMA E SOMENTE UMA SOLUÇÃO (O DETERMINANTE DA MATRIZ É DIFERENTE DE ZERO).

Ⓒ A SOLUÇÃO ÚNICA DO PVI É A EXPRESSÃO DO PASSO Ⓐ, COM AS CONSTANTES ARB. SUBSTITUÍDAS PELOS VALORES OBTIDOS NO PASSO Ⓑ.

NÃO EXISTE UM MÉTODO QUE PERMITA OBTER A SOLUÇÃO GERAL DE QUALQUER SISTEMA QUE SE ENQUADRE NA FORMA GERAL DESTE TÓPICO 3. O QUE EXISTEM SÃO MÉTODOS QUE PERMITEM OBTER A SOLUÇÃO DE DETERMINADOS SUBCONJUNTOS DESTES SISTEMAS. NO TÓPICO 3, ESTUDAREMOS MÉTODOS PARA OBTER A SOLUÇÃO GERAL DE 2 SUBCONJUNTOS:

3.1. HOMOGÊNEOS

3.2. NÃO HOMOGÊNEOS

3.1. HOMOGÊNEOS: SÃO O SUBCONJUNTO DOS SISTEMAS DESTE TÓPICO 3 QUE PODEM SER REESCRITOS NA SEGUINTE FORMA: $\underline{x}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}$

OS SISTEMAS 3.1 SÃO HOMOGÊNEOS, POIS TODOS OS ELEMENTOS DO VETOR $\underline{0}$ SÃO NULOS.

A SOLUÇÃO GERAL DOS SISTEMAS 3.1 É DADA PELA COMBINAÇÃO GERAL DE n SOLUÇÕES l.i.

INÍCIO DA DEDUÇÃO PARA OBTER n SOLUÇÕES l.i. (SERÁ SIMPLIFICADA, JÁ VALENDO COMO REGRA PRÁTICA)

PRIMEIRAMENTE, VAMOS VERIFICAR PARA QUAIS VALORES DE r (ONDE r É UM ESCALAR, OU SEJA, DE DIMENSÃO 1x1) E DE $\underline{\xi}$ (ONDE $\underline{\xi}$ É UM VETOR DE DIMENSÃO nx1) A EXPRESSÃO $\underline{\xi}\exp(rt)$ É SOLUÇÃO DO SISTEMA

PARA ISSO: $\underline{x} = \underline{\xi}\exp(rt)$, ONDE r e $\underline{\xi}$ SÃO CONSTANTES

$\underline{x}' = r\underline{\xi}\exp(rt)$

SUBSTITUINDO NO SISTEMA: $\underline{x}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}$

$$r\underline{\xi}\exp(rt) = \underline{\underline{A}}\,\underline{\xi}\exp(rt) \Rightarrow r\underline{\xi} = \underline{\underline{A}}\,\underline{\xi} \Rightarrow \left(\underline{\underline{A}} - r\underline{\underline{I}}\right)\underline{\xi} = 0$$

ONDE $\underline{\underline{I}}$ É A MATRIZ IDENTIDADE DE ORDEM n.

PORTANTO, A EXPRESSÃO $\underline{\xi}\exp(rt)$ É SOLUÇÃO SE E SOMENTE SE r FOR AUTOVALOR DA MATRIZ $\underline{\underline{A}}$ E $\underline{\xi}$ FOR AUTOVETOR ASSOCIADO AO AUTOVALOR r DA MATRIZ $\underline{\underline{A}}$

HÁ 3 CASOS:
- TODOS OS AUTOVALORES SÃO REAIS E DIFERENTES ENTRE SI
- ALGUNS AUTOVALORES SE REPETEM
- ALGUNS AUTOVALORES SÃO COMPLEXOS CONJUGADOS

CONTINUAÇÃO DA DEDUÇÃO:

VAMOS ENTÃO DIVIDIR A DEDUÇÃO EM 3 PARTES, SENDO CADA UMA DELAS VÁLIDA PARA UM CASO

(I) TODOS OS AUTOVALORES SÃO REAIS E DIFERENTES ENTRE SI: ISSO SIGNIFICA QUE A MATRIZ $\underline{\underline{A}}$ POSSUI n AUTOVALORES DE MULTIPLICIDADE 1. CADA AUTOVALOR DE MULTIPLICIDADE 1 CONTRIBUI COM 1 SOLUÇÃO l.i. NA FORMA: $\xi_i \exp(\lambda_i t)$, ONDE ξ_i É UM AUTOVETOR ASSOCIADO AO AUTOVALOR λ_i.

PODE-SE MOSTRAR QUE AS SOLUÇÕES FORNECIDAS POR AUTOVALORES DIFERENTES SÃO l.i. ENTRE SI

(II) ALGUNS AUTOVALORES SE REPETEM: EM TE3J5 NOS LIMITAREMOS A RESOLVER SISTEMAS ONDE A MATRIZ $\underline{\underline{A}}$ POSSUI AUTOVALORES QUE SE REPETEM NO MÁXIMO 2 VEZES. HÁ 2 POSSIBILIDADES:

(II.A) SE HOUVER 2 AUTOVETORES l.i. ASSOCIADOS AO AUTOVALOR DE MULTIPLICIDADE 2, ENTÃO AS 2 SOLUÇÕES l.i. GERADAS PELO AUTOVALOR EM QUESTÃO SÃO: $\xi_j \exp(\lambda_j t)$ E $\xi_k \exp(\lambda_j t)$, ONDE ξ_j E ξ_k SÃO 2 AUTOVETORES l.i. ASSOCIADOS AO AUTOVALOR DE MULTIPLICIDADE 2 CHAMADO DE λ_j.

(II.B) SE HOUVER APENAS UM AUTOVETOR l.i. ASSOCIADO AO AUTOVALOR DE MULTIPLICIDADE 2, ENTÃO AS 2 SOLUÇÕES l.i. GERADAS PELO AUTOVALOR EM QUESTÃO SÃO: $\xi_m \exp(\lambda_m t)$ E $\left[\xi_m t \exp(\lambda_m t) + \eta_m \exp(\lambda_m t)\right]$,

ONDE ξ_m É UM AUTOVETOR ASSOCIADO AO AUTOVALOR DE MULTIPLICIDADE 2 CHAMADO DE λ_m E η_m É UM AUTOVETOR GENERALIZADO ASSOCIADO AO AUTOVETOR ξ_m E AO AUTOVALOR λ_m.

(III) ALGUNS AUTOVALORES SÃO COMPLEXOS CONJUGADOS: NESTE CASO, PODE-SE MOSTRAR QUE OS AUTOVETORES ASSOCIADOS A AUTOVALORES QUE SÃO COMPLEXOS CONJUGADOS SÃO TAMBÉM COMPLEXOS CONJUGADOS ENTRE SI. CHAMANDO OS AUTOVALORES DE $\lambda_1 = r_1$ E $\lambda_2 = \bar{r}_1$, ONDE $\bar{r}_1$ É O COMPLEXO CONJUGADO DE r_1, ENTÃO: $\underline{\xi}_1$ (AUTOVETOR ASSOCIADO A λ_1) E $\underline{\xi}_2$ (AUTOVETOR ASSOCIADO A λ_2) SE RELACIONAM POR: $\underline{\xi}_2 = \bar{\underline{\xi}}_1$ ONDE $\bar{\underline{\xi}}_1$ É O COMPLEXO CONJUGADO DE $\underline{\xi}_1$.

CADA PAR DE AUTOVALORES COMPLEXOS CONJUGADOS CONTRIBUEM COM 2 SEGUINTES 2 SOLUÇÕES l.i:

$$\underline{\xi}_1 \exp(r_1 t) \quad \text{E} \quad \bar{\underline{\xi}}_1 \exp(\bar{r}_1 t)$$

EM TEIJS NOS LIMITAREMOS A RESOLVER SISTEMAS ONDE A MATRIZ $\underline{\underline{A}}$ NÃO POSSUI AUTOVALORES COMPLEXOS CONJUGADOS QUE SE REPETEM. EM OUTRAS PALAVRAS, AUTOVALORES COMPLEXOS CONJUGADOS TERÃO SEMPRE MULTIPLICIDADE 1.

COMO $\underline{\xi}_1 \exp(r_1 t)$ E $\bar{\underline{\xi}}_1 \exp(\bar{r}_1 t)$ MANIPULAM NÚMEROS COMPLEXOS, É MAIS USUAL CONTINUAR REALIZANDO MANIPULAÇÕES PARA OBTER 2 SOLUÇÕES l.i. QUE NÃO MANIPULEM NÚMEROS COMPLEXOS.

PODE-SE MOSTRAR QUE AS PARTES REAL E IMAGINÁRIA DE $\left[\underline{\xi}_1 \exp(r_1 t)\right]$ FORMAM UM CONJUNTO DE 2 SOLUÇÕES l.i.

FIM DA DEDUÇÃO SIMPLIFICADA, JÁ VALENDO COMO REGRA PRÁTICA

EXERCÍCIO 1: OBTER A SOLUÇÃO GERAL DE : $\underline{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{X}$

PRIMEIRO OBTENDO OS AUTOVALORES DA MATRIZ $\underline{\underline{A}}$ (isso já foi feito no Exemplo 1 DE AUTOVALORES) : $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -1$

PARA O AUTOVALOR DE MULTIPLICIDADE 1, OBTER 1 AUTOVETOR l.i.
(isso já foi feito no Exemplo 2 DE AUTOVETORES) : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ É AUTOVETOR ASSOCIADO AO AUTOVALOR 2 DA MATRIZ $\underline{\underline{A}}$.

LOGO, O AUTOVALOR 2 (DE MULTIPLICIDADE 1) CONTRIBUI COM A SEGUINTE SOLUÇÃO l.i : $\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(2t)}$

PARA O AUTOVALOR DE MULTIPLICIDADE 2, OBTER 1 (ou 2) AUTOVETORES l.i.
(isso já foi feito no Exemplo 3 DE AUTOVETORES) : NESTE CASO, HÁ 2 AUTOVETORES l.i., QUE SÃO $\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ E } \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$,

ASSOCIADOS AO AUTOVALOR -1 DA MATRIZ $\underline{\underline{A}}$.

LOGO, O AUTOVALOR -1 (DE MULTIPLICIDADE 2) CONTRIBUI COM AS SEGUINTES 2 SOLUÇÕES l.i :

$\boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(-t)}$ E $\boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(-t)}$

RESPOSTA: SOLUÇÃO GERAL $\Rightarrow \underline{X} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(2t) + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(-t) + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(-t)$,

ONDE C_1, C_2, C_3 SÃO CONSTANTES ARBITRÁRIAS

EXERCÍCIO 2: OBTER A SOLUÇÃO GERAL DE : $\underline{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \underline{x}$

PRIMEIRO OBTENDO OS AUTOVALORES DA MATRIZ $\underline{A}$ (isso já foi feito no Exemplo 4 DE AUTOVALORES): $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

PARA O AUTOVALOR DE MULTIPLICIDADE 2, OBTER 1 (ou 2) AUTOVETORES l.i.
(Isso já foi feito no Exemplo 4 de autovalores/autovetores). NESTE CASO, HÁ SOMENTE 1 AUTOVETOR l.i.: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

SERÁ ENTÃO NECESSÁRIO OBTER O AUTOVETOR GENERALIZADO ASSOCIADO AO AUTOVETOR $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ E AUTOVALOR 1
(Isso já foi feito no Exemplo 5 de autovetor generalizado). NESTE CASO, $\eta = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

LOGO, O AUTOVALOR 1 (DE MULTIPLICIDADE 2) CONTRIBUI COM AS SEGUINTES 2 SOLUÇÕES l.i:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(t) \quad \text{E} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t \exp(t) + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(t)$$

Resposta: SOLUÇÃO GERAL $\Rightarrow \underline{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(t) + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t \exp(t) + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \exp(t) \right]$,

ONDE c_1 e c_2 são constantes arbitrárias

EXERCÍCIO 3: OBTER A SOLUÇÃO GERAL DE: $\underline{X}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \underline{X}$

OBTENDO OS AUTOVALORES DA MATRIZ $\underline{\underline{A}}$: $\det\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}-\lambda & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2}-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}-\lambda\right)^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda + \frac{5}{4} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{1}{2} + j \\ \lambda_2 = -\frac{1}{2} - j \end{cases}$

OBTENDO OS AUTOVETORES ASSOCIADOS A λ_1:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}+j\right) & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}+j\right) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -j & 1 \\ -1 & -j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -j & 1 & 0 \\ -1 & -j & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 = l_2 - \frac{1}{j} l_1]{l_1 = l_1} \left[\begin{array}{cc|c} -j & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow 1 \text{ GRAU DE LIBERDADE}$$

IMPONDO $\xi_2 = \alpha$, ENTÃO $-j\xi_1 + \xi_2 = 0$

$$\xi_1 = \frac{\alpha}{j} = -j\alpha$$

PORTANTO: $\xi = \begin{pmatrix} -j\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -j \\ 1 \end{pmatrix}$ p/ $\forall \alpha \neq 0$

IMPONDO $\alpha = 1$, ENTÃO: $\begin{pmatrix} -j \\ 1 \end{pmatrix}$

O COMPLEXO CONJUGADO DE $\begin{pmatrix} -j \\ 1 \end{pmatrix}$ É:

$$\begin{pmatrix} 0 - j1 \\ 1 + 0j \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 + j \\ 1 - j0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j \\ 1 \end{pmatrix}$$

$()^*$ = mantém parte real e troca sinal da parte imaginária

A PRIMEIRA FORMA DE OBTER A SOLUÇÃO GERAL É:

$$C_1\left\{\begin{pmatrix} -j \\ 1 \end{pmatrix} \exp\left[\left(-\frac{1}{2}+j\right)t\right]\right\} + C_2\left\{\begin{pmatrix} j \\ 1 \end{pmatrix} \exp\left(-\frac{1}{2}-j\right)t\right\}$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.

CONTINUAÇÃO DO EXERCÍCIO 3:

A OUTRA FORMA DE OBTER A SOLUÇÃO GERAL É USANDO AS PARTES REAL E IMAGINÁRIA DE: $\begin{pmatrix} -j \\ j \end{pmatrix} \exp\left[\left(\frac{-1}{2}+j\right)t\right]$

$$\begin{pmatrix} -j \\ j \end{pmatrix}\left\{\left[\cos(t)+j\,\mathrm{sen}(t)\right]\exp\left(\frac{-1}{2}t\right)\right\} = \begin{bmatrix} -j\left[\cos(t)+j\,\mathrm{sen}(t)\right]\exp\left(\frac{-1}{2}t\right) \\ j\left[\cos(t)+j\,\mathrm{sen}(t)\right]\exp\left(\frac{-1}{2}t\right) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathrm{sen}(t)\exp\left(\frac{-1}{2}t\right) - j\cos(t)\exp\left(\frac{-1}{2}t\right) \\ \cos(t)\exp\left(\frac{-1}{2}t\right) + j\,\mathrm{sen}(t)\exp\left(\frac{-1}{2}t\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{sen}(t)\exp\left(\frac{-1}{2}t\right) \\ \cos(t)\exp\left(\frac{-1}{2}t\right) \end{bmatrix} + j\begin{bmatrix} -\cos(t)\exp\left(\frac{-1}{2}t\right) \\ \mathrm{sen}(t)\exp\left(\frac{-1}{2}t\right) \end{bmatrix} =$$

$$= \underbrace{\exp\left(\frac{-1}{2}t\right)\begin{pmatrix} \mathrm{sen}(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}}_{\text{PARTE REAL}} + j\underbrace{\exp\left(\frac{-1}{2}t\right)\begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \mathrm{sen}(t) \end{pmatrix}}_{\text{PARTE IMAGINÁRIA}}$$

RESPOSTA: SOLUÇÃO GERAL $\Rightarrow \underline{X} = C_1\left\{\exp\left(\frac{-1}{2}t\right)\begin{pmatrix} \mathrm{sen}(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}\right\} + C_2\left\{\exp\left(\frac{-1}{2}t\right)\begin{pmatrix} -\cos(t) \\ \mathrm{sen}(t) \end{pmatrix}\right\}$,

ONDE C_1 e C_2 são constantes arbitrárias

EXERCÍCIO 4 : RESOLVER O P.V.I: $\begin{cases} \underline{X}' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\underline{X} \\ \underline{X}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$

(A) SOLUÇÃO GERAL (JÁ FEITO NO EXERCÍCIO 2) $\Rightarrow \underline{X} = c_1 \exp(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t\exp(t) + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}\exp(t)\right\}$,

ONDE c_1 E c_2 SÃO CONSTANTES ARBITRÁRIAS

(B) $\underline{X}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = c_1 \exp(0)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} 0\cdot\exp(0) + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}\exp(0)\right\}$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2 = c_1\cdot 1 + c_2\cdot(-1/2) \\ -1 = c_1\cdot 1 + c_2\cdot 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 - \frac{1}{2}c_2 = 2 \\ \boxed{c_1 = -1} \end{cases}$$

SUBSTITUINDO: $c_1 - \frac{1}{2}c_2 = 2 \Rightarrow -1 - \frac{1}{2}c_2 = 2 \Rightarrow \boxed{c_2 = -6}$

(C) A SOLUÇÃO ÚNICA DO P.V.I. É: $\boxed{\underline{X} = (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\exp(t) + (-6)\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t\exp(t) + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}\exp(t)\right\}}$

OU SIMPLIFICANDO: $\boxed{\underline{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\exp(t) + \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix} t\exp(t)}$

3.2. NÃO HOMOGÊNEOS: SÃO O SUBCONJUNTO DOS SISTEMAS DESTE TÓPICO 3 QUE PODEM SER REESCRITOS NA SEGUINTE FORMA GERAL: $\underline{x}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{x} + \underline{g}(t)$

OS SISTEMAS 3.2 SÃO NÃO HOMOGÊNEOS, POIS PELO MENOS 1 ELEMENTO DO VETOR $\underline{g}(t)$ É DIFERENTE DE ZERO

A SOLUÇÃO GERAL DOS SISTEMAS 3.2 É DADA PELA SOMA DE 2 PARCELAS: SOLUÇÃO GERAL $\Rightarrow \underline{x}(t) = \underline{x}_H(t) + \underline{x}_p(t)$

ONDE:

→ $\underline{x}_H(t)$ É A SOLUÇÃO GERAL DO SISTEMA HOMOGÊNEO ASSOCIADO. PARA OBTER $\underline{x}_H$, SUBSTITUIR $\underline{g}(t)$ POR ZERO E ENTÃO USAR O CONTEÚDO VISTO NO TÓPICO 3.1. VALE RESSALTAR QUE $\underline{x}_H$ TERÁ n CONSTANTES ARBITRÁRIAS.

→ $\underline{x}_p(t)$ É UMA SOLUÇÃO PARTICULAR DO SISTEMA NÃO HOMOGÊNEO. POR SER UMA SOLUÇÃO PARTICULAR, $\underline{x}_p$ NÃO CONTERÁ NENHUMA CONSTANTE ARBITRÁRIA.

NA SEQUÊNCIA, SERÃO ABORDADAS 2 FORMAS DE OBTER $\underline{x}_p$:

3.2.1. MÉTODO DOS COEFICIENTES INDETERMINADOS (OU A DETERMINAR): PERMITE OBTER $\underline{x}_p$ PARA CASOS ONDE $\underline{g}(t)$ É EXPONENCIAL, SENO, COSSENO, POLINÔMIO, OU SOMA OU PRODUTO DE TAIS FUNÇÕES.

O PROCEDIMENTO É ESSENCIALMENTE O MESMO DO TÓPICO 2.2.1. NA SEQUÊNCIA SÃO DISCUTIDAS APENAS AS DIFERENÇAS:

→ EM 3.2.1, MULTIPLICANDO AS FUNÇÕES TEMOS VETORES (DE DIMENSÃO $n \times 1$) CUJOS ELEMENTOS SÃO COEFICIENTES A DETERMINAR.

→ CASO HAJA NECESSIDADE DE MULTIPLICAR A FUNÇÃO POR "t", A FUNÇÃO ORIGINAL (SEM O PRODUTO POR "t") DEVE SER MANTIDA. EXEMPLOS:

(A) SE $\underline{g}(t) = \underline{u}\exp(\lambda t)$, ONDE λ É AUTOVALOR DA MATRIZ $\underline{\underline{A}}$, EM VEZ DE SUPOR UMA $\underline{x}_p(t)$ DA FORMA $\underline{a}\,t\exp(\lambda t)$, É PRECISO SUPOR UMA $\underline{x}_p(t)$ DA FORMA $\underline{a}\,t\exp(\lambda t) + \underline{b}\exp(\lambda t)$, ONDE $\underline{a}$ E $\underline{b}$ SÃO VETORES DE DIMENSÃO $n \times 1$ CUJOS ELEMENTOS SÃO COEFICIENTES A DETERMINAR.

(B) SE $\underline{g}(t) = \underline{u}\,t$ E $\lambda = 0$ FOR AUTOVALOR DA MATRIZ $\underline{\underline{A}}$, EM VEZ DE SUPOR UMA $\underline{X}_p(t)$ DA FORMA $(\underline{a}t + \underline{b})t$, É PRECISO SUPOR UMA $\underline{X}_p(t)$ DA FORMA $\underline{a}t^2 + \underline{b}t + \underline{c}$, ONDE $\underline{a}$, $\underline{b}$ E $\underline{c}$ SÃO VETORES DE DIMENSÃO $n \times 1$ CUJOS ELEMENTOS SÃO COEFICIENTES A DETERMINAR.

(C) SE $\underline{g}(t) = \underline{u}\cos(\beta t)$ E $\lambda = j\beta$ FOR AUTOVALOR DA MATRIZ $\underline{\underline{A}}$, EM VEZ DE SUPOR UMA $\underline{X}_p(t)$ DA FORMA $[\underline{a}\,\mathrm{sen}(\beta t) + \underline{b}\cos(\beta t)]t$, É PRECISO SUPOR UMA $\underline{X}_p(t)$ DA FORMA $[\underline{a}t\,\mathrm{sen}(\beta t) + \underline{b}t\cos(\beta t) + \underline{c}\,\mathrm{sen}(\beta t) + \underline{d}\cos(\beta t)]$, ONDE $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ E $\underline{d}$ SÃO VETORES DE DIMENSÃO $n \times 1$ CUJOS ELEMENTOS SÃO COEFICIENTES A DETERMINAR.

EXERCÍCIO: OBTER A SOLUÇÃO GERAL DE: $\underline{X}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\underline{X} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix}$

OBTENDO $\underline{X}_H \Rightarrow X_H' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\underline{X}_H$ (USANDO TÓPICO 3.1)

AUTOVALORES DA MATRIZ $\underline{\underline{A}}$: $\det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (-2-\lambda)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$ $\begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -3 \end{cases}$

AUTOVETORES ASSOCIADOS AO AUTOVALOR -1:

$$\begin{pmatrix} -2-(-1) & 1 \\ 1 & -2-(-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 = l_2 + l_1]{l_1 = l_1} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow 1 \text{ GRAU DE LIBERDADE}$$

IMPONDO: $\xi_2 = \alpha$, ENTÃO $\xi_1 = \alpha$. LOGO $\underline{\xi} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, p/ $\forall \alpha \neq 0$

FAZENDO $\alpha = 1$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ É AUTOVETOR ASSOCIADO AO AUTOVALOR -1.

PORTANTO, 1 SOLUÇÃO L.I. É: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\exp(-t)$

CONTINUAÇÃO DO EXERCÍCIO:

AUTOVETORES ASSOCIADOS AO AUTOVALOR -3:

$$\begin{pmatrix} -2-(-3) & 1 \\ 1 & -2-(-3) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[l_2 = l_2 - l_1]{l_1 = l_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow 1 \text{ GRAU DE LIBERDADE}$$

IMPONDO $\xi_2 = \alpha$, ENTÃO: $1\xi_1 + 1\xi_2 = 0 \Rightarrow \xi_1 = -\alpha$

LOGO, $\underline{\xi} = \alpha\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, p/ $\forall \alpha \neq 0$

FAZENDO $\alpha = 1$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ É AUTOVETOR ASSOCIADO AO AUTOVALOR -3.

PORTANTO, 1 SOLUÇÃO L.I. É: $\boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(-3t)}$

A SOLUÇÃO GERAL DO SISTEMA HOMOGÊNEO ASSOCIADO É:

$$\underline{X}_H(t) = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\exp(-t) + C_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\exp(-3t),$$

ONDE C_1 E C_2 SÃO CONSTANTES ARBITRÁRIAS

CONTINUAÇÃO DO EXERCÍCIO:

OBTENDO $\underline{X}_p$ USANDO [3.2.1]

$$\underline{g}(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{g}_1(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 3t \end{pmatrix}}_{\underline{g}_2(t)} = \underbrace{e^{-t}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\underline{g}_1(t)} + \underbrace{t\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\underline{g}_2(t)}$$

$$\underline{g}(t) = \underline{g}_1(t) + \underline{g}_2(t) = \underline{g}_1(t) + \underline{g}_2(t)$$

$\underline{X}_p = \underline{X}_{p1} + \underline{X}_{p2}$, ONDE $\underline{X}_{p1}$ É SOLUÇÃO PARTICULAR DE: $\underline{X}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{X} + \underline{g}_1(t)$ E $\underline{X}_{p2}$ É SOLUÇÃO PARTICULAR DE $\underline{X}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{X} + \underline{g}_2(t)$

OBTENDO $\underline{X}_{p1}$ ⇒ PARTINDO DO [A3] DE [2.2.1]

$\underline{X}_{p1} = \underline{a}te^{-t} + \underline{b}\,e^{-t}$, ONDE $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ E $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ SÃO OS VETORES DE COEFICIENTES A DETERMINAR.

EXPLICANDO: O VETOR $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ QUE MULTIPLICA O EXPONENCIAL EM $\underline{g}_1(t)$ NÃO IMPORTA AQUI. O QUE IMPORTA É O EXPOENTE (-1). COMO [e^{-t}] JÁ ESTÁ PRESENTE NA SOLUÇÃO DO SISTEMA HOMOGÊNEO (POIS [-1] É AUTOVALOR DA MATRIZ $\underline{\underline{A}}$) É NECESSÁRIO MULTIPLICAR (e^{-t}) POR (t), RESULTANDO EM [te^{-t}]. OBSERVE QUE [te^{-t}] NÃO ESTÁ PRESENTE NA SOLUÇÃO DO SISTEMA HOMOGÊNEO (POIS [-1] É AUTOVALOR DE MULTIPLICIDADE 1). POR [2.2.1] BASTARIA USAR [te^{-t}], MAS EM [3.2.1] É NECESSÁRIO MANTER O [e^{-t}], E CADA FUNÇÃO EM t É MULTIPLICADA POR UM VETOR DE COEFICIENTES A DETERMINAR.

CONTINUAÇÃO DO EXERCÍCIO:

$$\underline{X}_{p_1} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} t e^{-t} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$\underline{X}_{p_1}' = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix} t e^{-t} + \begin{pmatrix} -b_1 \\ -b_2 \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix} t e^{-t}$$

SUBSTITUINDO $\underline{X}_{p_1}$ E $\underline{X}_{p_1}'$ EM: $\underline{X}_{p_1}' = \underline{\underline{A}}\,\underline{X}_{p_1} + \underline{g}_1(t)$

$$\left[\begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix} t e^{-t} \right] = \left[\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} t e^{-t} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} e^{-t} \right] + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} \right.$$

SEPARANDO AS DIFERENTES FUNÇÕES DE t:

$$e^{-t} \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \end{pmatrix} + t e^{-t} \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} -2b_1 + b_2 + 2 \\ b_1 - 2b_2 \end{pmatrix} + t e^{-t} \begin{pmatrix} -2a_1 + a_2 \\ a_1 - 2a_2 \end{pmatrix}$$

IGUALANDO OS COEFICIENTES QUE MULTIPLICAM CADA FUNÇÃO DO LADO ESQUERDO E DO LADO DIREITO:

$$e^{-t} \Rightarrow \begin{cases} \text{linha 1}: a_1 - b_1 = -2b_1 + b_2 + 2 \quad (1) \\ \text{linha 2}: a_2 - b_2 = b_1 - 2b_2 \quad (2) \end{cases}$$

$$t e^{-t} \Rightarrow \begin{cases} \text{linha 1}: -a_1 = -2a_1 + a_2 \quad (3) \\ \text{linha 2}: -a_2 = a_1 - 2a_2 \quad (4) \end{cases}$$

CONTINUAÇÃO DO EXERCÍCIO:

RESOLVENDO O SISTEMA ALGÉBRICO LINEAR:

$$\left\{\begin{array}{lll} 1\,a_1 + 0\,a_2 + 1\,b_1 + (-1)\,b_2 = 2 & (1) \\ 0\,a_1 + 1\,a_2 + (-1)\,b_1 + (+1)\,b_2 = 0 & (2) \\ (-1)\,a_1 + 1\,a_2 + 0\,b_1 + 0\,b_2 = 0 & (3) \\ 1\,a_1 + (-1\,a_2) + 0\,b_1 + 0\,b_2 = 0 & (4) \end{array}\right\} \text{ESSE SISTEMA POSSUI INFINITAS SOLUÇÕES } [\det = 0]$$

AS EQUAÇÕES (3) E (4) SÃO IDÊNTICAS.

SOMANDO AS EQUAÇÕES (1) E (2), OBTÉM-SE: $a_1 + a_2 = 2$

RESOLVENDO: $\left.\begin{array}{l} (3)=(4) \Rightarrow -a_1 + a_2 = 0 \\ (1)+(2) \Rightarrow \;\; a_1 + a_2 = 2 \end{array}\right\}$ OBTÉM-SE: $\boxed{a_1 = a_2 = 1}$

SUBSTITUINDO $a_1 = 1$ E $a_2 = 1$ EM (1) OU EM (2) $\Rightarrow \boxed{b_1 - b_2 = 1}$

IMPONDO ARBITRARIAMENTE $b_1 = \alpha$, ENTÃO $b_2 = -1 + \alpha$, p/ $\forall \alpha$. FIXANDO, ARBITRARIAMENTE $\alpha = 0$, ENTÃO: $\begin{cases} b_1 = 0 \\ b_2 = -1 \end{cases}$

PORTANTO: $\underline{X}_{P_1} = \underline{a}\,t\,e^{-t} + \underline{b}\,e^{-t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t\,e^{-t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$

CONTINUAÇÃO DO EXERCÍCIO:

OBTENDO $\underline{X}_{p2}$ ⇒ PARTINDO DE (A4) DE [2.2.1]

$\underline{X}_{p2} = \underline{e}\,t + \underline{d}\,t^0$, ONDE $\underline{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$ E $\underline{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ SÃO OS VETORES DE COEFICIENTES A DETERMINAR.

EXPLICANDO: O QUE IMPORTA EM $g_2(t)$ É A MAIOR DAS POTÊNCIAS ENVOLVIDAS, NESSE CASO [$s=1$]. COMO 0 NÃO É AUTOVALOR DA MATRIZ $\underline{\underline{A}}$, t^0 NÃO FAZ PARTE DA SOLUÇÃO DO HOMOGÊNEO, ENTÃO NÃO HÁ NECESSIDADE DE MULTIPLICAR POR t [$q=0$ NESSE CASO]

$\underline{X}'_{p2} = \underline{e}\,t^0$

SUBSTITUINDO $\underline{X}_{p2}$ E $\underline{X}_{p2}'$ EM: $\underline{X}'_{p2} = \underline{\underline{A}}\,\underline{X}_{p2} + \underline{g}_2(t)$

$$\left[\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \cdot t^0\right] = \left\{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} t^0\right] + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} t\right.$$

SEPARANDO AS DIFERENTES FUNÇÕES DE t:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} t^1 + \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} t^0 = \begin{pmatrix} -2e_1 + e_2 \\ e_1 - 2e_2 + 3 \end{pmatrix} t^1 + \begin{pmatrix} -2d_1 + d_2 \\ d_1 - 2d_2 \end{pmatrix} t^0$$

IGUALANDO OS COEFICIENTES QUE MULTIPLICAM CADA FUNÇÃO DO LADO ESQUERDO E DO LADO DIREITO:

$$t^1 \Rightarrow \begin{cases} \text{linha 1: } 0 = -2e_1 + e_2 & (1) \\ \text{linha 2: } 0 = e_1 - 2e_2 + 3 & (2) \end{cases} \quad ; \quad t^0 \begin{cases} \text{linha 1: } e_1 = -2d_1 + d_2 & (3) \\ \text{linha 2: } e_2 = d_1 - 2d_2 & (4) \end{cases}$$

CONTINUAÇÃO DO EXERCÍCIO:

RESOLVENDO O SISTEMA ALGÉBRICO LINEAR:

$$\begin{cases} (-2)\,e_1 + (1)\,e_2 + (0)\,d_1 + (0)\,d_2 = 0 & (1) \\ (1)\,e_1 + (-2)\,e_2 + (0)\,d_1 + (0)\,d_2 = -3 & (2) \\ (1)\,e_1 + (0)\,e_2 + (2)\,d_1 + (-1)\,d_2 = 0 & (3) \\ (0)\,e_1 + (1)\,e_2 + (-1)\,d_1 + (2)\,d_2 = 0 & (4) \end{cases}$$

ESSE SISTEMA POSSUI SOLUÇÃO ÚNICA [det ≠ 0]

AS EQUAÇÕES (1) E (2) MANIPULAM APENAS e_1 E e_2. RESOLVENDO:

$$\begin{cases} -2e_1 + e_2 = 0 \\ e_1 - 2e_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} e_1 = 1 \\ e_2 = 2 \end{matrix}$$

SUBSTITUINDO $e_1 = 1$ E $e_2 = 2$ EM (3) E (4)

$$\begin{cases} 2d_1 - d_2 = -1 & (3) \\ -d_1 + 2d_2 = -2 & (4) \end{cases} \Rightarrow \text{RESOLVENDO} \Rightarrow d_1 = \frac{-4}{3} \quad d_2 = \frac{-5}{3}$$

PORTANTO: $\underline{X}_{p2} = \underline{e}\,t + \underline{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -4/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}$

RESPOSTA FINAL: SOLUÇÃO GERAL $= \underline{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(-t) + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \exp(-3t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -4/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}$

ONDE c_1 E c_2 SÃO CONSTANTES ARBITRÁRIAS

EXERCÍCIO: RESOLVER O P.V.I. $\begin{cases} \underline{X}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\underline{X} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix} \\ X(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \end{cases}$

(A) A SOLUÇÃO GERAL DO SISTEMA FOI OBTIDA NO EXERCÍCIO ANTERIOR:

$$\underline{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}te^{-t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} -4/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}$$, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias

(B) IMPONDO A C.I. NA SOLUÇÃO GERAL DO PASSO (A):

$$\underline{X}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{0} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{0} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}0\cdot e^{0} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}e^{0} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}0 + \begin{pmatrix} -4/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4/3 \\ -5/3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{linha 1} \Rightarrow 3 = c_1 - c_2 - 4/3 \quad (1) \\ \text{linha 2} \Rightarrow -4 = c_1 + c_2 - 8/3 \quad (2) \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (1) + (2) \Rightarrow$ [illegible] $-1 = 2c_1 - 4 \Rightarrow \boxed{c_1 = 3/2}$

$\Rightarrow (2) - (1) \Rightarrow -7 = +2c_2 - 4/3 \Rightarrow \boxed{c_2 = -17/6}$

(C) A SOLUÇÃO ÚNICA DO PVI É:

$$\boxed{\underline{X} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t} - \frac{17}{6}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}te^{-t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} -4/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}}$$

3.2.2 VARIAÇÃO DE PARÂMETROS: PERMITE OBTER $\underline{x}_p(t)$ PARA QUALQUER $\underline{g}(t)$.

DEDUÇÃO: ASSUMA QUE A SOLUÇÃO GERAL DO SISTEMA HOMOGÊNEO ASSOCIADO SEJA: $\underline{x}_H = \underline{\underline{\Psi}}(t)\,\underline{c}$, ONDE $\underline{\underline{\Psi}}(t)$ É UMA MATRIZ $n \times n$, SENDO QUE CADA COLUNA DE $\underline{\underline{\Psi}}(t)$ CONTÉM UMA SOLUÇÃO L.I. DO SISTEMA HOMOGÊNEO ASSOCIADO. $\underline{c}$ É UM VETOR $n \times 1$ CONTENDO AS n CONSTANTES ARBITRÁRIAS $(c_1, c_2, \dots, c_n)$. PARA QUALQUER COMBINAÇÃO DE VALORES NUMÉRICOS PARA OS ELEMENTOS DO VETOR $\underline{c}$, A EXPRESSÃO $\boxed{\underline{x}_H' - \underline{\underline{A}}\,\underline{x}_H}$ RESULTARÁ SEMPRE EM ZERO.

O RACIOCÍNIO DESTE MÉTODO [3.2.2] É SUBSTITUIR $\underline{c}$ POR UM VETOR $\underline{u}(t)$ [DE DIMENSÃO $n \times 1$, ONDE OS ELEMENTOS DE $\underline{u}(t)$ SÃO FUNÇÕES QUE VARIAM COM t] DE TAL MODO QUE A EXPRESSÃO $\underline{\underline{\Psi}}(t)\,\underline{u}(t)$ SEJA SOLUÇÃO PARTICULAR DO SISTEMA NÃO HOMOGÊNEO.

SUBSTITUINDO: $\underline{x}_p = \underline{\underline{\Psi}}(t)\,\underline{u}(t)$ E $\underline{x}_p' = \underline{\underline{\Psi}}'(t)\,\underline{u}(t) + \underline{\underline{\Psi}}(t)\,\underline{u}'(t)$ NO SISTEMA NÃO HOMOGÊNEO:

$$\underline{x}_p' = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}_p + \underline{g}(t)$$

$$\underline{\underline{\Psi}}'(t)\,\underline{u}(t) + \underline{\underline{\Psi}}(t)\,\underline{u}'(t) = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{\Psi}}(t)\,\underline{u}(t) + \underline{g}(t) \quad (I)$$

$\underline{\underline{\Psi}}'(t) = \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{\Psi}}(t)$ pois cada coluna de $\underline{\underline{\Psi}}$ é solução do sistema homogêneo associado. ENTÃO (I) REDUZ-SE A:

$$\boxed{\underline{\underline{\Psi}}(t)\,\underline{u}'(t) = \underline{g}(t)}$$

PORTANTO, $\underline{x}_p(t) = \underline{\underline{\Psi}}(t)\,\underline{u}(t)$ É SOLUÇÃO PARTICULAR SE $\underline{u}(t)$ FOR ESCOLHIDO DE TAL FORMA A SATISFAZER O SISTEMA ALGÉBRICO: $\boxed{\underline{\underline{\Psi}}(t)\,\underline{u}'(t) = \underline{g}(t)}$. TENDO $\underline{u}'(t)$, $\underline{u}(t)$ É OBTIDO INTEGRANDO $\underline{u}'(t)$ EM FUNÇÃO DE t.

EXERCÍCIO: OBTER A SOLUÇÃO GERAL DE: $\underline{X}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\underline{X} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix}$

$\underline{X}_H(t)$ JÁ FOI OBTIDO ANTERIORMENTE E É: $\underline{X}_H(t) = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-3t}$, ONDE c_1 E c_2 SÃO CONST. ARBITRÁRIAS

OBTENDO $\underline{X}_P$ USANDO 3.2.2:

$$\underline{\underline{\Psi}}(t) = \begin{pmatrix} 1\cdot e^{-t} & -1\,e^{-3t} \\ 1\cdot e^{-t} & 1\,e^{-3t} \end{pmatrix}$$

multiplica c_1 na $\underline{X}_H$ — multiplica c_2 na $\underline{X}_H$

RESOLVER O SISTEMA ALGÉBRICO LINEAR NAS INCÓGNITAS $\underline{u}'(t) = \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix}$:

$$\underline{\underline{\Psi}}(t)\,\underline{u}'(t) = g(t)$$

$$\begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-3t} \\ e^{-t} & e^{-3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{linha 1: } e^{-t}u_1'(t) - e^{-3t}u_2'(t) = 2e^{-t} & (1) \\ \text{linha 2: } e^{-t}u_1'(t) + e^{-3t}u_2'(t) = 3t & (2) \end{cases}$$

SUBTRAINDO (2) DE (1):

$$-2e^{-3t}u_2'(t) = 2e^{-t} - 3t$$

$$u_2'(t) = \frac{2e^{-t} - 3t}{-2e^{-3t}} = -e^{2t} + \frac{3}{2}te^{3t}$$

SUBSTITUINDO $u_2'(t)$ EM (1)

$$u_1'(t) = \frac{2e^{-t} + e^{-3t}\left[-e^{2t} + \frac{3}{2}te^{3t}\right]}{e^{-t}} = 2 - 1 + \frac{3}{2}te^{t} = 1 + \frac{3}{2}te^{t}$$

CONTINUAÇÃO DO EXERCÍCIO:

$$u_1(t) = \int u_1'(t)\,dt = \int \left(1 + \frac{3}{2}te^t\right)dt = \int 1\,dt + \frac{3}{2}\int te^t dt = t + \frac{3}{2}\left[te^t - e^t\right] + \text{constante}$$

(constante $=0$, pois basta uma função $u_1(t)$)

$$u_1(t) = t + \frac{3}{2}te^t - \frac{3}{2}e^t$$

$$u_2(t) = \int u_2'(t)\,dt = \int \left[-e^{2t} + \frac{3}{2}te^{3t}\right]dt = -\int e^{2t}dt + \frac{3}{2}\int te^{3t}dt = -\frac{e^{2t}}{2} + \frac{3}{2}\left[\frac{te^{3t}}{3} - \frac{e^{3t}}{9}\right] + \text{constante}$$

(constante $=0$, pois basta 1 função)

$$u_2(t) = -\frac{e^{2t}}{2} + \frac{te^{3t}}{2} - \frac{e^{3t}}{6}$$

$$\underline{X}_p = \underline{\underline{\Psi}} \cdot \underline{u} = \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-3t} \\ e^{-t} & e^{-3t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t + \frac{3}{2}te^t - \frac{3}{2}e^t \\ -\frac{e^{2t}}{2} + \frac{te^{3t}}{2} - \frac{e^{3t}}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^{-t} + \frac{3}{2}t - \frac{3}{2} + \frac{e^{-t}}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{6} \\ te^{-t} + \frac{3}{2}t - \frac{3}{2} - \frac{e^{-t}}{2} + \frac{t}{2} - \frac{1}{6} \end{pmatrix} = te^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-t}\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}$$

RESPOSTA: A SOLUÇÃO GERAL É: $\underline{X}(t) = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-3t} + te^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-t}\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4/3 \\ -5/3 \end{pmatrix}$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias