PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO (P.V.C): UM PVC É COMPOSTO POR UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL E CONDIÇÕES DE CONTORNO (C.C.). AS C.C. SÃO CONDIÇÕES IMPOSTAS PARA MAIS DE UM VALOR NUMÉRICO DA VARIÁVEL INDEPENDENTE. A QUANTIDADE DE C.C. NÃO DEPENDE DA ORDEM DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL. A QUANTIDADE DE C.C. É SEMPRE 2 QUANDO A EQUAÇÃO DIFERENCIAL É ORDINÁRIA (OU SEJA, HÁ UMA ÚNICA VAR. INDEP.). UM PVC PODE NÃO TER SOLUÇÃO, TER SOLUÇÃO ÚNICA OU TER INFINITAS SOLUÇÕES.

EM TE315, ESTUDAREMOS 2 P.V.C: A $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=0 \\ y(L)=0 \end{cases}$ B $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y'(0)=0 \\ y'(L)=0 \end{cases}$

ONDE:

→ y É A VARIÁVEL DEPENDENTE

→ x É A VARIÁVEL INDEPENDENTE

→ $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$

→ L É UMA CONSTANTE DE VALOR REAL CONHECIDA

NOSSO OBJETIVO EM TE315 É OBTER OS VALORES NUMÉRICOS DE λ QUE FAÇAM COM QUE O P.V.C TENHA SOLUÇÕES DIFERENTES DA TRIVIAL (OU SEJA, SOLUÇÕES ONDE $y \neq 0$).

OS PVCs SÃO HOMOGÊNEOS, POIS:

- A EQUAÇÃO DIFERENCIAL CONTIDA NELES É HOMOGÊNEA;
- AS 2 C.C. SÃO HOMOGÊNEAS, OU SEJA, IMPÕEM QUE A SOLUÇÃO SEJA NULA NOS EXTREMOS $x=0$ E $x=L$.

DEDUÇÃO PARA P.V.C. HOMOGÊNEO : Ⓐ $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(L) = 0 \end{cases}$

VAMOS DIVIDIR A DEDUÇÃO EM TRÊS PARTES : $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ e $\lambda < 0$.

Ⓘ QUEREMOS SABER PARA QUAIS VALORES DE $\lambda > 0$ HÁ SOLUÇÕES NÃO TRIVIAIS PARA O P.V.C. HOMOGÊNEO

COMO $\lambda > 0$, É CONVENIENTE IMPOR $\lambda = \mu^2$. ENTÃO, A EQUAÇÃO DIFERENCIAL TORNA-SE:

$$y'' + \mu^2 y = 0$$

A SOLUÇÃO GERAL É (TÓPICO 2.1) : POLINÔMIO CARACTERÍSTICO $r^2 + \mu^2 = 0 \Rightarrow$ raízes : $r_1 = +j\mu$; $r_2 = -j\mu$

SOLUÇÃO GERAL : $y(x) = c_1 \cos(\mu x) + c_2 \operatorname{sen}(\mu x)$, ONDE c_1 e c_2 SÃO CONSTANTES ARBITRÁRIAS.

IMPONDO A C.C. $y(0) = 0$ NA SOLUÇÃO GERAL : $y(0) = 0 = c_1 \cdot \underbrace{\cancel{\cos 0}}_{1} + c_2 \cdot \underbrace{\cancel{\operatorname{sen} 0}}_{0} \Rightarrow \boxed{c_1 = 0}$

IMPONDO A C.C. $y(L) = 0$ NA SOLUÇÃO GERAL E JÁ CONSIDERANDO $c_1 = 0$, TEM-SE:

$$0 = y(L) = c_2 \operatorname{sen}(\mu L) \Rightarrow \boxed{c_2 \operatorname{sen}(\mu L) = 0}$$

$\boxed{c_2 = 0}$ SATISFAZ A CONDIÇÃO, MAS COM $c_2 = 0$ TEM-SE A SOLUÇÃO TRIVIAL ($y = 0$). PORTANTO BUSCAMOS SOLUÇÕES COM $c_2 \neq 0$. OU SEJA, BUSCA-SE QUE : $\underbrace{\cancel{c_2}}_{\neq 0} \underbrace{\operatorname{sen}(\mu L)}_{=0} = 0 \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen}(\mu L) = 0}$

$\operatorname{sen}(\mu L) = 0$ QUANDO μL FOR MÚLTIPLO INTEIRO DE π, OU SEJA : $\mu L = n\pi$, ONDE $n = 1, 2, 3, \dots, \infty$

CONTINUAÇÃO DA DEDUÇÃO:

$(\mu L)^2 = (n\pi)^2$

$\lambda = \mu^2 = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}$, ONDE $n = 1, 2, 3, \dots, \infty$

OU SEJA, PARA QUE HAJA SOLUÇÕES NÃO TRIVIAIS, $\lambda = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}$ ONDE n É QUALQUER INTEIRO POSITIVO $(n = 1, 2, \dots, \infty)$

PARA CADA n, AS SOLUÇÕES TRIVIAIS SÃO: $y(x) = c \operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{L} x\right)$, ONDE c É UMA CONSTANTE ARBITRÁRIA.

II QUEREMOS SABER SE HÁ SOLUÇÕES NÃO TRIVIAIS QUANDO $\lambda = 0$.

SUBSTITUINDO $\lambda = 0$ NA EQ. DIFERENCIAL: $y'' = 0$

A SOLUÇÃO GERAL É: $y(x) = c_1 x + c_2$, ONDE c_1 E c_2 SÃO CONSTANTES ARBITRÁRIAS

IMPONDO A C.C. $y(0) = 0$ NA SOLUÇÃO GERAL: $y(0) = c_1 \cdot 0 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

IMPONDO A C.C. $y(L) = 0$ NA SOLUÇÃO GERAL E JÁ CONSIDERANDO $c_2 = 0$, TEM-SE:

$y(L) = 0 = c_1 \cdot L + 0 \Rightarrow c_1 = 0$

LOGO, PARA $\lambda = 0$ A ÚNICA SOLUÇÃO É A TRIVIAL.

III) QUEREMOS SABER PARA QUAIS VALORES DE $\lambda<0$ HÁ SOLUÇÕES NÃO TRIVIAIS PARA O P.V.C. HOMOGÊNEO

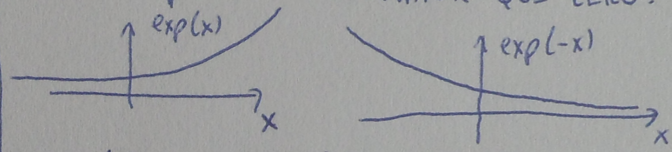
COMO $\lambda<0$, É CONVENIENTE IMPOR $\lambda=-\mu^2$. ENTÃO, A EQUAÇÃO DIFERENCIAL TORNA-SE : $y''-\mu^2y=0$

A SOLUÇÃO GERAL É (TÓPICO 2.1) $\Rightarrow$ POLINÔMIO CARACTERÍSTICO : $r^2-\mu^2=0 \Rightarrow$ RAÍZES : $r_1=+\mu$; $r_2=-\mu$

SOLUÇÃO GERAL : $y(x)=c_1\exp(\mu t)+c_2\exp(-\mu t)$

IMPONDO AS 2.CC : $\begin{cases} y(0)=0=c_1\exp(0)+c_2\exp(-0)=c_1+c_2 & (1) \\ y(L)=0=c_1\exp(\mu L)+c_2\exp(-\mu L)=0 & (2) \end{cases}$

COMO exp É SEMPRE MAIOR QUE ZERO:



E $\exp(x)\neq\exp(-x)$ p/ $\forall x\neq0$

A SOLUÇÃO É ÚNICA : $\boxed{c_1=0}$ E $\boxed{c_2=0}$

LOGO, PARA $\lambda<0$, A ÚNICA SOLUÇÃO DO P.V.C É A TRIVIAL.

FIM DA DEDUÇÃO

REGRA PRÁTICA

(A) O P.V.C. HOMOGÊNEO $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y(0)=0 \\ y(L)=0 \end{cases}$, ONDE $y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$ E λ E L SÃO CONSTANTES, TEM SOLUÇÕES DIFERENTES DA TRIVIAL SE, E SOMENTE SE, $\lambda=\dfrac{n^2\pi^2}{L^2}$, ONDE n É QUALQUER INTEIRO POSITIVO $(n=1,2,\ldots,\infty)$.

PARA CADA n, AS SOLUÇÕES NÃO TRIVIAIS SÃO : $y(x)=c\,\text{sen}\left(\dfrac{n\pi}{L}x\right)$, ONDE c É UMA CONSTANTE ARBITRÁRIA

(B) O P.V.C HOMOGÊNEO $\begin{cases} y''+\lambda y=0 \\ y'(0)=0 \\ y'(L)=0 \end{cases}$, ONDE $y'=\dfrac{dy}{dx}$ E λ E L SÃO CONSTANTES, TEM SOLUÇÕES DIFERENTES DA TRIVIAL SE, E SOMENTE SE, $\lambda=0$ OU $\lambda=\dfrac{n^2\pi^2}{L^2}$, ONDE É QUALQUER INTEIRO POSITIVO $(n=1,2,\ldots,\infty)$

PARA $\lambda=0$, O P.V.C TEM AS SOLUÇÕES NÃO TRIVIAIS : $y(x)=c$, ONDE c É UMA CONSTANTE ARBITRÁRIA

PARA CADA n, AS SOLUÇÕES NÃO TRIVIAIS SÃO : $y(x)=c\cos\left(\dfrac{n\pi}{L}x\right)$, ONDE c É UMA CONSTANTE ARBITRÁRIA

TÓPICO 4: EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

NO TÓPICO 4, NOSSO ÚNICO OBJETIVO SERÁ ENCONTRAR A SOLUÇÃO ÚNICA DE PROBLEMAS COMPOSTOS POR:

- 1 EQUAÇÃO DIFERENCIAL PARCIAL LINEAR DE 2ª ORDEM ENVOLVENDO 2 VARIÁVEIS INDEPENDENTES (EX: EQ. DE CONDUÇÃO DE CALOR, EQ. DA ONDA E EQ. LAPLACE);
- UM CONJUNTO DE CONDIÇÕES INICIAIS (C.I) E/OU CONDIÇÕES DE CONTORNO (C.C.) EM QUANTIDADE SUFICIENTE PARA QUE O PROBLEMA TENHA SOLUÇÃO ÚNICA, ONDE APENAS 1 CONDIÇÃO É NÃO HOMOGÊNEA. AS CONDIÇÕES PODEM SER DEFINIDAS EM UM PONTO OU EM UMA RETA.

<u>PROCEDIMENTO</u>: DIVIDIR EM 2 ETAPAS:

I DESCONSIDERAR A CONDIÇÃO (C.I. OU C.C) NÃO HOMOGÊNEA E OBTER A SOLUÇÃO GERAL DO PROBLEMA SIMPLIFICADO.

II IMPOR A CONDIÇÃO (C.I OU C.C) NÃO HOMOGÊNEA NA SOLUÇÃO GERAL OBTIDA EM I, PARA OBTER O VALOR ÚNICO DAS CONSTANTES ARBITRÁRIAS.

DETALHANDO A ETAPA I DO PROCEDIMENTO:

I.A ASSUMIR VÁLIDA A SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS E SUBSTITUIR A EQ. DIF. PARCIAL ENVOLVENDO 2 VARIÁVEIS INDEPENDENTES POR 2 EQ. DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS.

NOTAÇÃO: SEJA μ A VARIÁVEL DEPENDENTE E z_1 e z_2 AS VARIÁVEIS INDEPENDENTES.

ASSUMIR VÁLIDA A SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS SIGNIFICA IMPOR QUE: $\mu(z_1, z_2) = Z_1(z_1)\, Z_2(z_2)$

OU SEJA, ASSUMIR QUE A VARIÁVEL DEPENDENTE É DADA PELO PRODUTO DE 2 FUNÇÕES Z_1 E Z_2, ONDE Z_1 SÓ DEPENDE DE z_1 E Z_2 SÓ DEPENDE DE z_2

(I.B) REESCREVER AS CONDIÇÕES (C.I OU C.C) HOMOGÊNEAS EM FUNÇÃO DE Z_1 E Z_2

I.C AO FINAL DO PASSO I.B HAVERÁ UM P.V.C. HOMOGÊNEO QUE SE ENCAIXA NOS CASOS A OU B VISTOS ANTERIORMENTE. APLICAR A REGRA PRÁTICA JÁ ESTUDADA PARA OBTER AS SOLUÇÕES NÃO TRIVIAIS DESSE P.V.C.

I.D OBTER A SOLUÇÃO GERAL DA EQ. DIFERENCIAL NÃO USADA NO PASSO (I.C).

(I.E.) CASO HAJA CONDIÇÃO (C.I. OU C.C) HOMOGÊNEA NÃO USADA EM I.C, IMPOR ESSA CONDIÇÃO NA SOLUÇÃO GERAL OBTIDA EM I.D.

(I.F.) USAR OS RESULTADOS DOS ITENS (I.C) E (I.E) PARA OBTER A SOLUÇÃO GERAL DO PROBLEMA SIMPLIFICADO.
A SOLUÇÃO GERAL A SER OBTIDA NO PASSO (I.F) É DADA PELA COMBINAÇÃO LINEAR DE INFINITAS SOLUÇÕES l.i. CADA SOLUÇÃO l.i. É OBTIDA USANDO UM VALOR DIFERENTE PARA λ, ONDE λ ESTÁ ASSOCIADO ÀS SOLUÇÕES NÃO TRIVIAIS DO P.V.C HOMOGÊNEO RESOLVIDO NO PASSO I.C.
A SOLUÇÃO GERAL CONTERÁ ∞ CONSTANTES ARBITRÁRIAS.

DETALHANDO A ETAPA (II) DO PROCEDIMENTO: AO IMPOR A CONDIÇÃO NÃO HOMOGÊNEA NA SOLUÇÃO GERAL OBTIDA EM (I.F), TEM-SE 2 POSSIBILIDADES:

(II.A) SE A CONDIÇÃO RESULTAR EM UMA SÉRIE DE FOURIER DE SENOS, OU SEJA, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$, ENTÃO OS VALORES DAS INFINITAS CONSTANTES ARBITRÁRIAS SÃO: $a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$, para $n = 1, 2, \ldots, \infty$

(II.B) SE A CONDIÇÃO RESULTAR EM UMA SÉRIE DE FOURIER DE COSSENOS, OU SEJA, $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$, ENTÃO OS VALORES DAS INFINITAS CONSTANTES ARBITRÁRIAS SÃO: $a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$, para $n = 0, 1, 2, \ldots, \infty$

PROBLEMA DE CONDUÇÃO DE CALOR (P.C.C): NO P.C.C, A VARIÁVEL DEPENDENTE u É A TEMPERATURA E AS VARIÁVEIS INDEPENDENTES SÃO O TEMPO (t) E O ESPAÇO, REPRESENTADO PELO EIXO HORIZONTAL x.

A SOLUÇÃO DO P.C.C. CONSISTE EM OBTER $u(x,t)$, OU SEJA, TEMPERATURA EM FUNÇÃO DO TEMPO E DO ESPAÇO.

A EQUAÇÃO DE CONDUÇÃO DE CALOR AFIRMA QUE: $\boxed{\alpha^2 u_{xx} = u_t}$

ONDE $u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t}$, $u_{xx} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e α É UMA CONSTANTE, CHAMADA DE DIFUSIVIDADE TÉRMICA, QUE DEPENDE DO MATERIAL POR ONDE A TEMPERATURA ESTÁ SENDO ANALISADA.

O P.C.C PODE SER VISTO COMO:

- UM P.V.I NA VAR. INDEPENDENTE t, OU SEJA, DESEJA-SE OBTER A TEMPERATURA P/ $t \geq t_0$, ONDE t_0 É O INSTANTE INICIAL. HAVERÁ 1 C.I. NO P.C.C. POIS A MAIOR DAS DERIVADAS EM t É A PRIMEIRA.
- UM P.V.C. NA VAR. DEPENDENTE x, OU SEJA, DESEJA-SE OBTER A TEMPERATURA ENTRE 2 EXTREMOS (x_1 e x_2), OU SEJA, OBTER TEMPERATURA PARA VALORES DE x ENTRE $x_1 \leq x \leq x_2$. NORMALMENTE DESEJA-SE OBTER A TEMPERATURA AO LONGO DE UMA BARRA DE COMPRIMENTO L, E ENTÃO FIXA-SE: $x_1 = 0$ E $x_2 = L$.

OS P.C.C. A SEREM ESTUDADOS EM $\boxed{\text{TE315}}$ SÃO:

$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx} = u_t, & 0 \leq x \leq L \text{ e } t \geq 0 \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(L,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha^2 u_{xx} = u_t, & 0 \leq x \leq L \text{ e } t \geq 0 \\ u_x(0,t) = 0, & t \geq 0 \\ u_x(L,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

ONDE α e L SÃO CONSTANTES (NÚMEROS REAIS) CONHECIDOS E $f(x)$ É UMA FUNÇÃO CONHECIDA QUE DEPENDE DE x.

EXERCÍCIO: RESOLVER O P.C.C: $\begin{cases} \alpha^2 u_{xx} = u_t, & 0 \le x \le L \text{ e } t \ge 0 \\ u(0,t) = 0, & t \ge 0 \\ u(L,t) = 0, & t \ge 0 \\ u(x,0) = f(x), & 0 \le x \le L \end{cases}$, onde α, L e $f(x)$ SÃO CONHECIDAS

(AQUI VOU RESOLVER DE FORMA LITERAL)

(I) OBTER A SOLUÇÃO GERAL DO PROBLEMA SIMPLIFICADO: $\begin{cases} \alpha^2 u_{xx} = u_t, & 0 \le x \le L \text{ e } t \ge 0 \\ u(0,t) = 0, & t \ge 0 \\ u(L,t) = 0, & t \ge 0 \end{cases}$, ONDE A CONDIÇÃO NÃO HOMOGÊNEA FOI DESCONSIDERADA

(I.A) POR SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS: $u(x,t) = X(x)T(t)$

Calculando: $u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t}[X(x)T(t)] = \left\{\dfrac{d}{dt}[T(t)]\right\} X(x) = X(x)T'(t)$

$u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} = T(t)X'(x)$; $u_{xx} = T(t)X''(x)$; onde $X'(x) = \dfrac{dX}{dx}$ e $X''(x) = \dfrac{d^2X(x)}{dx^2}$

SUBSTITUINDO NA EQ. DIF:

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t$$

$$\alpha^2 T(t) X''(x) = X(x)T'(t)$$

SEPARANDO AS DEPENDÊNCIAS EM t e x:

$$\underbrace{\frac{\alpha^2 T(t)}{T'(t)}}_{\text{só depende de } t} = \underbrace{\frac{X(x)}{X''(x)}}_{\text{só depende de } x}$$

ESSA IGUALDADE DEVE VALER P/ $t \ge 0$ E P/ $0 \le x \le L$.
SE O LADO ESQUERDO VARIAR COM t, NÃO É POSSÍVEL MANTER A IGUALDADE P/ $t \ge 0$, POIS O LADO DIREITO É CONSTANTE AO VARIAR DE t.
DE MODO SIMILAR, SE O LADO DIREITO VARIAR COM x, NÃO É POSSÍVEL MANTER A IGUALDADE P/ $0 \le x \le L$, POIS O LADO ESQUERDO É CONSTANTE AO VARIAR DE x.

A IGUALDADE IMPOSTA PELA EQ. DIF. SÓ É GARANTIDA P/ $t \geq 0$ E $0 \leq x \leq L$ SE:

$$\frac{\alpha^2 T(t)}{T'(t)} = \frac{X(x)}{X''(x)} = \text{constante} = \lambda_J$$

REESCREVENDO NA FORMA DE 2 EQ. DIF. ORDINÁRIAS:

$$\begin{cases} \dfrac{\alpha^2 T(t)}{T'(t)} = \lambda_J \\ \dfrac{X(x)}{X''(x)} = \lambda_J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \cdot T'(t) - \dfrac{\alpha^2}{\lambda_J} T(t) = 0 \\ 1 \cdot X''(x) - \dfrac{1}{\lambda_J} X(x) = 0 \end{cases}$$

I.B REESCREVENDO AS CONDIÇÕES HOMOGÊNEAS EM FUNÇÃO DE T E X:

$u(0,t) = 0, \ t \geq 0$

$X(0)\,T(t) = 0, \ t \geq 0$

Se $T(t) = 0$ p/ $t \geq 0$, OBTÉM-SE A SOLUÇÃO TRIVIAL $u(x,t) = 0$ p/ $t \geq 0$, O QUE NÃO É O DESEJADO AQUI.

PORTANTO: $\boxed{X(0) = 0}$

$u(L,t) = 0, \ t \geq 0$

$X(L)\,T(t) = 0, \ t \geq 0$

PELO MESMO MOTIVO, ESCOLHE-SE $\boxed{X(L) = 0}$

AO FINAL DE I.B, O PROBLEMA SIMPLIFICADO É REESCRITO COMO:

$$\begin{cases} 1 \cdot T'(t) - \dfrac{\alpha^2}{\lambda_J} T(t) = 0 \\ \boxed{\begin{array}{l} 1 \cdot X''(x) - \dfrac{1}{\lambda_J} X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(L) = 0 \end{array}} \end{cases}$$

P.V.C. HOMOGÊNEO

$\boxed{\text{I.C}}$ TEM-SE UM PVC HOMOGÊNEO NA VAR. INDEPENDENTE X.

DE ACORDO COM A REGRA PRÁTICA (CASO A): $\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(L) = 0 \end{cases}$

	REGRA PRÁTICA		EXERCÍCIO
VAR. DEP.:	y	$\to$	X
VAR. IND:	x	$\to$	x
	λ	$\to$	$-1/\lambda_1$
	L	$\to$	L

COMPARANDO COM O EXERCÍCIO: $\begin{cases} X''(x) - \dfrac{1}{\lambda_1} X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(L) = 0 \end{cases}$

PORTANTO, HÁ SOLUÇÕES NÃO TRIVIAIS SE, E SOMENTE SE, $\lambda = -\dfrac{1}{\lambda_1} = \dfrac{n^2\pi^2}{L^2}$, p/ $n = 1, 2, \ldots, \infty$

PARA CADA n, AS SOLUÇÕES NÃO TRIVIAIS SÃO: $X(x) = c \,\mathrm{sen}\left(\dfrac{n\pi}{L} x\right)$, onde c é constante arbitrária

---

I.D OBTENDO A SOLUÇÃO GERAL DE: $1 \cdot T'(t) - \dfrac{\alpha^2}{\lambda_1} T(t) = 0$, quando $\lambda_1 = \dfrac{-L^2}{n^2\pi^2}$, p/ $n = 1, 2, \ldots, \infty$

$1 \cdot T'(t) + \dfrac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} T(t) = 0$ $\Rightarrow$ POLINÔMIO CARACTERÍSTICO: $r + \left(\dfrac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}\right) 1 = 0 \Rightarrow \text{raiz} = -\dfrac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}$

SOLUÇÃO GERAL I.D: $T(t) = c \exp\left(-\dfrac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} \cdot t\right)$, onde c é constante arbitrária

(I.E) NÃO É NECESSÁRIO, POIS NÃO HÁ CONDIÇÃO HOMOGÊNEA EM T.

(I.F) $u(x,t) = X(x)\,T(t)$

AS ∞ SOLUÇÕES DE $X(x)$ VEM DO I.C
AS ∞ SOLUÇÕES DE $T(t)$ VEM DO I.D
} AO REALIZAR O PRODUTO, É OBRIGATÓRIO MANTER O MESMO VALOR DE $\boxed{n}$ PARA AMBOS $X(x)$ E $T(t)$.

REALIZANDO O PRODUTO, E SUBSTITUINDO O PRODUTO ENTRE AS 2 CONSTANTES ARBITRÁRIAS POR UMA ÚNICA CONSTANTE ARBITRÁRIA, TEM-SE:

$$X(x)T(t) = C\left[\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\right]\left[\exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}t\right)\right]$$, onde C é constante arbitrária e $n = 1, 2, \ldots, \infty$

A SOLUÇÃO GERAL É DADA PELA COMBINAÇÃO LINEAR DE INFINITAS SOLUÇÕES l.i, ONDE CADA SOLUÇÃO l.i. É OBTIDA PARA UM DIFERENTE VALOR DE n.

SOLUÇÃO GERAL DO PROBLEMA SIMPLIFICADO: $$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp\left(\frac{-\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Onde C_n com $n = 1, 2, \ldots, \infty$ SÃO CONSTANTES ARBITRÁRIAS

(II) IMPONDO A CONDIÇÃO NÃO HOMOGÊNEA $[u(x,0) = f(x),\ 0 \le x \le L]$ NA SOLUÇÃO GERAL (I.F):

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cancelto{1}{\exp\left(\frac{-\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}\cdot 0\right)}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

NESSE EXERCÍCIO, USA-SE II.A

COMPARANDO: PROCEDIMENTO $\longrightarrow$ EXERCÍCIO

$$\left.\begin{array}{ccc} f & \longrightarrow & f \\ x & \longrightarrow & x \\ a_n & \longrightarrow & c_n \\ L & \longrightarrow & L \end{array}\right\}$$

ENTÃO: $c_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$,

p/ $n = 1, 2, \ldots, \infty$

Resposta final: A SOLUÇÃO ÚNICA DO P.C.C. É:

$$\boxed{\begin{array}{l} u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}t\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ \text{onde } c_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx, \text{ p/ } n = 1, 2, \ldots, \infty \end{array}}$$

PROBLEMA DE PROPAGAÇÃO DE ONDA (P.P.O): NO P.P.O. A VARIÁVEL DEPENDENTE u É O DESLOCAMENTO VERTICAL DE UMA CORDA ELÁSTICA ESTICADA HORIZONTALMENTE E PRESA NAS SUAS EXTREMIDADES. AS VARIÁVEIS INDEPENDENTES SÃO O TEMPO (t) E O EIXO HORIZONTAL (x). A SOLUÇÃO DO P.P.O. CONSISTE EM OBTER $u(x,t)$, OU SEJA, O DESLOCAMENTO VERTICAL DA CORDA EM FUNÇÃO DO TEMPO E AO LONGO DO COMPRIMENTO DA CORDA.

A EQUAÇÃO DA ONDA AFIRMA QUE: $\boxed{a^2 u_{xx} = u_{tt}}$

ONDE $u_{tt} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $u_{xx} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e a É UMA CONSTANTE QUE DEPENDE DO MATERIAL COM A QUAL A CORDA É FEITA

O P.P.O PODE SER VISTO COMO:

- UM P.V.I. NA VAR. INDEP. t, OU SEJA, DESEJA-SE OBTER u p/ $t \geq t_0$, ONDE t_0 É O INSTANTE INICIAL. HAVERÁ 2 C.Is NO P.P.O POIS NA EQUAÇÃO DA ONDA A MAIOR DAS DERIVADAS EM t É A SEGUNDA.
- UM P.V.C. NA VAR. INDEP. x, OU SEJA, DESEJA-SE OBTER u AO LONGO DA CORDA DE COMPRIMENTO L, OU SEJA, $0 \leq x \leq L$.

OS P.P.O A SEREM ESTUDADOS EM $\boxed{\text{TE3J5}}$ SÃO:

$$\begin{cases} a^2 u_{xx} = u_{tt}, & 0 \leq x \leq L \text{ e } t \geq 0 \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(L,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L \\ u_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 u_{xx} = u_{tt}, & 0 \leq x \leq L \text{ e } t \geq 0 \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(L,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq L \\ u_t(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

ONDE a E L SÃO CONSTANTES (NÚMEROS REAIS) CONHECIDOS E $f(x)$ É UMA FUNÇÃO CONHECIDA QUE DEPENDE DE x

---

OBSERVAÇÃO: EM TE3J5 ESTUDAMOS P.P.O. PARA DESCREVER VIBRAÇÕES MECÂNICAS. VOCÊS ESTUDARÃO P.P.O. PARA DESCREVER PROPAGAÇÃO DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS EM DISCIPLINAS FUTURAS.

EXERCÍCIO: RESOLVER O P.P.O:

$$\begin{cases} a^2 u_{xx} = u_{tt}, & 0 \leq x \leq L \text{ e } t \geq 0 \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(L,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq L \\ u_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

, ONDE a, L e $f(x)$ SÃO CONHECIDOS (AQUI VOU RESOLVER DE FORMA LITERAL)

I) OBTER A SOLUÇÃO GERAL DO PROBLEMA SIMPLIFICADO:

$$\begin{cases} a^2 u_{xx} = u_{tt}, & 0 \leq x \leq L \text{ e } t \geq 0 \\ u(0,t) = 0, & t \geq 0 \\ u(L,t) = 0, & t \geq 0 \\ u_t(x,0) = 0, & 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

, ONDE A CONDIÇÃO NÃO HOMOGÊNEA FOI DESCONSIDERADA

I.A) POR SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS: $u(x,t) = X(x)\,T(t)$

CALCULANDO: $u_t = \dfrac{\partial u}{\partial t} = X(x)\,T'(t)$; $u_{tt} = X(x)\,T''(t)$, onde $T'' = \dfrac{d^2 T}{dt^2}$

$u_x = T(t)\,X'(x)$; $u_{xx} = T(t)\,X''(x)$, onde $X'' = \dfrac{d^2 X}{dx^2}$

SUBSTITUINDO NA EQ. DIF:

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}$$

$$a^2\, T(t)\, X''(x) = X(x)\, T''(t)$$

SEPARANDO AS DEPENDÊNCIAS EM t E x:

$$\underbrace{\frac{a^2 X''(x)}{X(x)}}_{\text{só depende de } x} = \underbrace{\frac{T''(t)}{T(t)}}_{\text{só depende de } t}$$

A IGUALDADE IMPOSTA PELA EQ. DIF. SÓ É GARANTIDA P/ $t \geq 0$ E $0 \leq x \leq L$ SE:

$$\frac{a^2 X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = \text{constante} = \lambda_1$$

2 EQ. DIF. ORD.

$$\begin{cases} \dfrac{a^2 X''(x)}{X(x)} = \lambda_1 \\[2ex] \dfrac{T''(t)}{T(t)} = \lambda_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \cdot X''(x) - \dfrac{\lambda_1}{a^2} X(x) = 0 \\[2ex] 1 \cdot T''(t) - \lambda_1 T(t) = 0 \end{cases}$$

I.B REESCREVENDO AS CONDIÇÕES HOMOGÊNEAS EM FUNÇÃO DE T E X:

$u(0,t) = 0,\ t \geq 0 \Rightarrow X(0)T(t) = 0 \Rightarrow \boxed{X(0) = 0}$, POIS SE $T(t) = 0$ p/ $t \geq 0$ TEM-SE A SOLUÇÃO TRIVIAL

$u(L,t) = 0,\ t \geq 0 \Rightarrow X(L)T(t) = 0 \Rightarrow \boxed{X(L) = 0}$

$u_t(x,0) = 0,\ 0 \leq x \leq L \Rightarrow X(x)T'(0) = 0 \Rightarrow \boxed{T'(0) = 0}$, POIS SE $X(x) = 0$ p/ $0 \leq x \leq L$, TEM-SE A SOLUÇÃO TRIVIAL

$u_t(x,t) = X(x)T'(t)$

AO FINAL DE I.B, O PROBLEMA SIMPLIFICADO É REESCRITO COMO:

$$\begin{cases} 1 \cdot T''(t) - \lambda_1 T(t) = 0 \\ T'(0) = 0 \\ 1\, X''(x) - \dfrac{\lambda_1}{a^2} X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(L) = 0 \end{cases}$$

P.V.C. HOMOGÊNEO

$\boxed{\text{I.C}}$ TEM-SE UM PVC HOMOGÊNEO NA VAR. IND. x :

COMPARANDO:

REGRA PRÁTICA (CASO A)		EXERCÍCIO
y	$\longrightarrow$	X
x	$\longrightarrow$	x
λ	$\longrightarrow$	$-\frac{\lambda_1}{a^2}$
L	$\longrightarrow$	L

REGRA PRÁTICA (CASO A)

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y(L) = 0 \end{cases}$$

EXERCÍCIO

$$\begin{cases} X'' - \frac{\lambda_1}{a^2} X = 0 \\ X(0) = 0 \\ X(L) = 0 \end{cases}$$

PORTANTO, HÁ SOLUÇÕES NÃO TRIVIAIS SE, E SOMENTE SE, $\lambda = -\frac{\lambda_1}{a^2} = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$, p/ $n = 1, 2, \ldots, \infty$

PARA CADA n, AS SOLUÇÕES NÃO TRIVIAIS SÃO: $X(x) = c \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$, ONDE c É CONSTANTE ARBITRÁRIA

I.D OBTENDO A SOLUÇÃO GERAL DE: $1 \cdot T''(t) - \lambda_1 T(t) = 0$, quando $\lambda_1 = -\frac{a^2 n^2 \pi^2}{L^2}$, p/ $n = 1, 2, \ldots, \infty$

$1 \cdot T''(t) + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{L^2} T(t) = 0 \Rightarrow$ POLINÔMIO CARACTERÍSTICO $\Rightarrow r^2 + \frac{a^2 n^2 \pi^2}{L^2} = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm j \frac{a n \pi}{L}$

SOLUÇÃO GERAL: $T(t) = c_1 \operatorname{sen}\left(\frac{a n \pi}{L} t\right) + c_2 \cos\left(\frac{a n \pi}{L} t\right)$, onde c_1 e c_2 são const. arbitrárias

I.E. IMPONDO $T'(0)=0$ NA SOLUÇÃO GERAL DE I.D.

$$T'(t) = c_1\left(\frac{an\pi}{L}\right)\cos\left(\frac{an\pi}{L}t\right) + c_2\left(-\frac{an\pi}{L}\right)\text{sen}\left(\frac{an\pi}{L}t\right)$$

$$0 = T'(0) = c_1\left(\frac{an\pi}{L}\right)\cancel{\cos 0}^{\,1} + c_2\left(-\frac{an\pi}{L}\right)\cancel{\text{sen}\,0}^{\,0} \Rightarrow \boxed{0 = c_1}$$

PORTANTO, TEM-SE QUE: $T(t) = 0\cdot\text{sen}\left(\frac{an\pi}{L}t\right) + c_2 \cos\left(\frac{an\pi}{L}t\right)$

$$T(t) = c_2\cos\left(\frac{an\pi}{L}t\right)$$, onde c_2 é uma constante arbitrária

I.F. A SOLUÇÃO GERAL É DADA PELA COMBINAÇÃO LINEAR DE INFINITAS SOLUÇÕES l.i., ONDE CADA SOLUÇÃO l.i. É OBTIDA PARA UM DIFERENTE VALOR DE n.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{an\pi}{L}t\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

onde c_n com $n=1,2,\ldots,\infty$ SÃO CONSTANTES ARBITRÁRIAS

II IMPONDO A CONDIÇÃO NÃO HOMOGÊNEA [$u(x,0)=f(x)$, $0 \leq x \leq L$] NA SOLUÇÃO GERAL I.F:

$$u(x,0)=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n \cancel{\cos\left(\frac{an\pi}{L}\cdot 0\right)}^{1} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

NESSE EXERCÍCIO, USA-SE II.A

COMPARANDO:

PROCEDIMENTO	EXERCÍCIO
f	$\rightarrow f$
x	$\rightarrow x$
a_n	$\rightarrow C_n$
L	$\rightarrow L$

ENTÃO: $C_n=\dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$,

p/ $n=1,2,\dots,\infty$

RESPOSTA FINAL: A SOLUÇÃO ÚNICA DO P.P.O. É:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{an\pi}{L}t\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

onde $C_n=\dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx$, p/ $n=1,2,\dots,\infty$

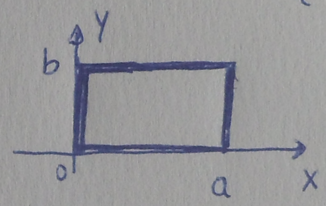
PROBLEMA DE POTENCIAL (P.P.): NO P.P. A VARIÁVEL DEPENDENTE u É O POTENCIAL ELÉTRICO EM UM MEIO DIELÉTRICO SEM CARGAS. AS VARIÁVEIS INDEPENDENTES x E y INDICAM UMA REGIÃO NO PLANO $x-y$ (x = EIXO HORIZONTAL E y = EIXO VERTICAL). A SOLUÇÃO DO P.P. CONSISTE EM OBTER $u(x,y)$ AO LONGO DE UMA REGIÃO NO PLANO $x-y$.

A EQUAÇÃO DE LAPLACE AFIRMA QUE: $\boxed{u_{xx} + u_{yy} = 0}$

ONDE $u_{xx} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ E $u_{yy} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

O P.P. É UM P.V.C NAS 2 VAR. IND. (x E y). DESSA FORMA, AS C.C. DEVEM IMPOR CONDIÇÕES PARA A SOLUÇÃO AO LONGO DE TODA A FRONTEIRA DO PROBLEMA.

EM TE315 NOS LIMITAREMOS A UMA FRONTEIRA QUE É UM RETÂNGULO



OS P.P. A SEREM ESTUDADOS EM $\boxed{\text{TE315}}$ SÃO:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 \le x \le a \text{ E } 0 \le y \le b \\ u(x,0) = f_1(x), & 0 \le x \le a \\ u(x,b) = f_2(x), & 0 \le x \le a \\ u(0,y) = f_3(y), & 0 \le y \le b \\ u(a,y) = f_4(y), & 0 \le y \le b \end{cases}$$

ONDE a e b SÃO CONSTANTES (NÚMEROS REAIS) CONHECIDOS E AS POSSIBILIDADES SÃO:

I	II	III	IV
$f_2(x)=0$	$f_1(x)=0$	$f_1(x)=0$	$f_1(x)=0$
$f_3(y)=0$	$f_3(y)=0$	$f_2(x)=0$	$f_2(x)=0$
$f_4(y)=0$	$f_4(y)=0$	$f_4(y)=0$	$f_3(y)=0$
e $f_1(x)$ CONHECIDA E $\neq$ de 0	e $f_2(x)$ CONHECIDA E $\neq$ de 0	e $f_3(y)$ CONHECIDA E $\neq$ DE ZERO	e $f_4(y)$ CONHECIDA E $\neq$ DE ZERO

EXERCÍCIO: RESOLVER O P.P.

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 \le x \le a \text{ E } 0 \le y \le b \\ u(x,0) = f(x), & 0 \le x \le a \\ u(x,b) = 0, & 0 \le x \le a \\ u(0,y) = 0, & 0 \le y \le b \\ u(a,y) = 0, & 0 \le y \le b \end{cases}$$

, ONDE a, b e $f(x)$ SÃO CONHECIDOS (AQUI VOU RESOLVER DE FORMA LITERAL)

(I) PROBLEMA SIMPLIFICADO:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 \le x \le a \text{ e } 0 \le y \le b \\ u(x,b) = 0, & 0 \le x \le a \\ u(0,y) = 0, & 0 \le y \le b \\ u(a,y) = 0, & 0 \le y \le b \end{cases}$$

, ONDE A CONDIÇÃO NÃO HOMOGÊNEA FOI DESCONSIDERADA

(I.A) POR SEPARAÇÃO DE VARIÁVEIS: $u(x,y) = X(x)\,Y(y)$

$u_{xx} = Y(y)X''(x)$; $u_{yy} = X(x)Y''(y)$

SUBSTITUINDO NA EQ. DIF.:

$$Y(y)X''(x) + X(x)Y''(y) = 0$$

SEPARANDO AS DEPENDÊNCIAS EM X E Y:

$$\underbrace{\frac{Y(y)}{Y''(y)}}_{\text{só depende de } y} = \underbrace{\frac{-X(x)}{X''(x)}}_{\text{só depende de } x}$$

A IGUALDADE É GARANTIDA SE:

$$\frac{Y(y)}{Y''(y)} = -\frac{X(x)}{X''(x)} = \text{constante} = \lambda_J$$

PORTANTO:

$$\begin{cases} \dfrac{Y(y)}{Y''(y)} = \lambda_J \\ \dfrac{-X(x)}{X''(x)} = \lambda_J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \cdot Y''(y) - \dfrac{1}{\lambda_J} Y(y) = 0 \\ 1 \cdot X''(x) + \dfrac{1}{\lambda_J} X(x) = 0 \end{cases}$$

I.B REESCREVENDO AS CONDIÇÕES HOMOGÊNEAS EM FUNÇÃO DE X E Y:

$$u(x,b)=0\,,\quad 0\le x\le a \Rightarrow X(x)\,Y(b)=0 \Rightarrow \boxed{Y(b)=0}$$
$$u(0,y)=0\,,\quad 0\le y\le b \Rightarrow X(0)\,Y(y)=0 \Rightarrow \boxed{X(0)=0}$$
$$u(a,y)=0\,,\quad 0\le y\le b \Rightarrow X(a)\,Y(y)=0 \Rightarrow \boxed{X(a)=0}$$

AO FINAL DE I.B, O PROBLEMA SIMPLIFICADO É REESCRITO COMO:

$$\begin{cases} 1\cdot Y''(y)-\dfrac{1}{\lambda_1}Y(y)=0 \\ Y(b)=0 \\ \boxed{\begin{array}{l} 1\,X''(x)+\dfrac{1}{\lambda_1}X(x)=0 \\ X(0)=0 \\ X(a)=0 \end{array}} \end{cases}$$

P.V.C. HOMOGÊNEO

I.C TEM-SE UM PVC HOMOGÊNEO NA VAR. INDEPENDENTE X.

COMPARANDO:

REGRA PRÁTICA CASO A	EXERCÍCIO
Y	X
x	x
λ	$1/\lambda_1$
L	a

PORTANTO, HÁ SOLUÇÕES NÃO TRIVIAIS SE, E SOMENTE SE, $\lambda=\dfrac{1}{\lambda_1}=\dfrac{n^2\pi^2}{a^2}$, p/ $n=1,2,\dots,\infty$

PARA CADA n, AS SOLUÇÕES NÃO TRIVIAIS SÃO: $X(x)=c\,\operatorname{sen}\left(\dfrac{n\pi}{a}x\right)$, onde c é constante arbitrária

I.D OBTENDO A SOLUÇÃO GERAL DE: $1 \cdot Y''(y) - \frac{1}{\lambda_1} Y(y) = 0$, quando $\lambda_1 = \frac{a^2}{n^2\pi^2}$, p/ $n = 1, 2, \ldots, \infty$

$1 \cdot Y''(y) - \frac{n^2\pi^2}{a^2} Y(y) = 0 \Rightarrow$ POLINÔMIO CARACTERÍSTICO $\Rightarrow r^2 - \frac{n^2\pi^2}{a^2} = 0 \Rightarrow$ $r_1 = \frac{n\pi}{a}$; $r_2 = -\frac{n\pi}{a}$

SOLUÇÃO GERAL I.D: $Y(y) = c_1 \exp\left(\frac{n\pi}{a} y\right) + c_2 \exp\left(-\frac{n\pi}{a} y\right)$, ONDE c_1 E c_2 SÃO CONSTANTES ARBITRÁRIAS

I.E IMPONDO $\boxed{Y(b) = 0}$ NA SOLUÇÃO GERAL DE $\boxed{\text{I.D}}$:

$$0 = Y(b) = c_1 \exp\left(\frac{n\pi}{a} \cdot b\right) + c_2 \exp\left(-\frac{n\pi}{a} b\right)$$

REARRANJANDO c_2 EM FUNÇÃO DE $c_1 \Rightarrow c_2 = \dfrac{-c_1 \exp\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}{\exp\left(\frac{-n\pi b}{a}\right)}$

PORTANTO: $Y(y) = c_1 \exp\left(\frac{n\pi}{a} y\right) + \left[\dfrac{-c_1 \exp\left(\frac{n\pi}{a} b\right)}{\exp\left(\frac{-n\pi b}{a}\right)}\right] \exp\left(\frac{-n\pi}{a} y\right)$

$$Y(y) = c_1 \left[\exp\left(\frac{n\pi}{a} y\right) - \frac{\exp\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}{\exp\left(\frac{-n\pi b}{a}\right)} \exp\left(\frac{-n\pi}{a} y\right)\right]$$

, onde c_1 é uma constante arbitrária

(I.F) A SOLUÇÃO GERAL DO PROBLEMA SIMPLIFICADO É:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left\{ \exp\left(\frac{n\pi}{a}y\right) - \left[\frac{\exp\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}{\exp\left(-\frac{n\pi b}{a}\right)}\right] \exp\left(-\frac{n\pi}{a}y\right) \right\} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

onde C_n com $n=1,2,\dots,\infty$ são constantes arbitrárias

(II) IMPONDO A CONDIÇÃO NÃO HOMOGÊNEA $[u(x,0)=f(x)\ ,\ 0\le x\le a]$ NA SOLUÇÃO GERAL (I.F):

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left\{ \underbrace{\cancel{\exp}(0)}_{1} - \left[\frac{\exp\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}{\exp\left(\frac{-n\pi b}{a}\right)}\right] \underbrace{\cancel{\exp}(0)}_{1} \right\} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left\{ 1 - \left[\frac{\exp\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}{\exp\left(\frac{-n\pi b}{a}\right)}\right]\right\} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) = f(x)$$

NESSE EXERCÍCIO, USA-SE II.A.

COMPARANDO: PROCEDIMENTO → EXERCÍCIO

$f \longrightarrow f$

$x \longrightarrow x$

$L \longrightarrow a$

$a_n \longrightarrow C_n \left\{ 1 - \left[\frac{\exp\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}{\exp\left(-\frac{n\pi b}{a}\right)}\right]\right\}$

ENTÃO:

$$C_n \left\{ 1 - \left[\frac{\exp\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}{\exp\left(-\frac{n\pi b}{a}\right)}\right]\right\} = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx$$

p/ $n=1,2,\dots,\infty$

Resposta final: A SOLUÇÃO ÚNICA DO P.P. É:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left\{ \exp\left(\frac{n\pi}{a} y\right) - \left[\frac{\exp\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}{\exp\left(-\frac{n\pi b}{a}\right)} \right] \exp\left(-\frac{n\pi y}{a}\right) \right\} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right)$$

onde $$C_n = \frac{1}{\left\{ 1 - \left[\frac{\exp\left(\frac{n\pi}{a} b\right)}{\exp\left(-\frac{n\pi b}{a}\right)} \right] \right\}} \cdot \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a} \cdot x\right) dx \quad , \text{p/ } n = 1, 2, \dots, \infty$$