Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade Federal do Paraná

QUADRIPÓLOS

TE045 – CIRCUITOS ELÉTRICOS II

O QUE SÃO QUADRIPÓLOS?

- Duas portas separadas para entrada e saída;
  - Não há ligações externas;
  - Elementos lineares;
  - Não contém fontes independente.

- Dois pares de terminais funcionando como ponto de acesso;

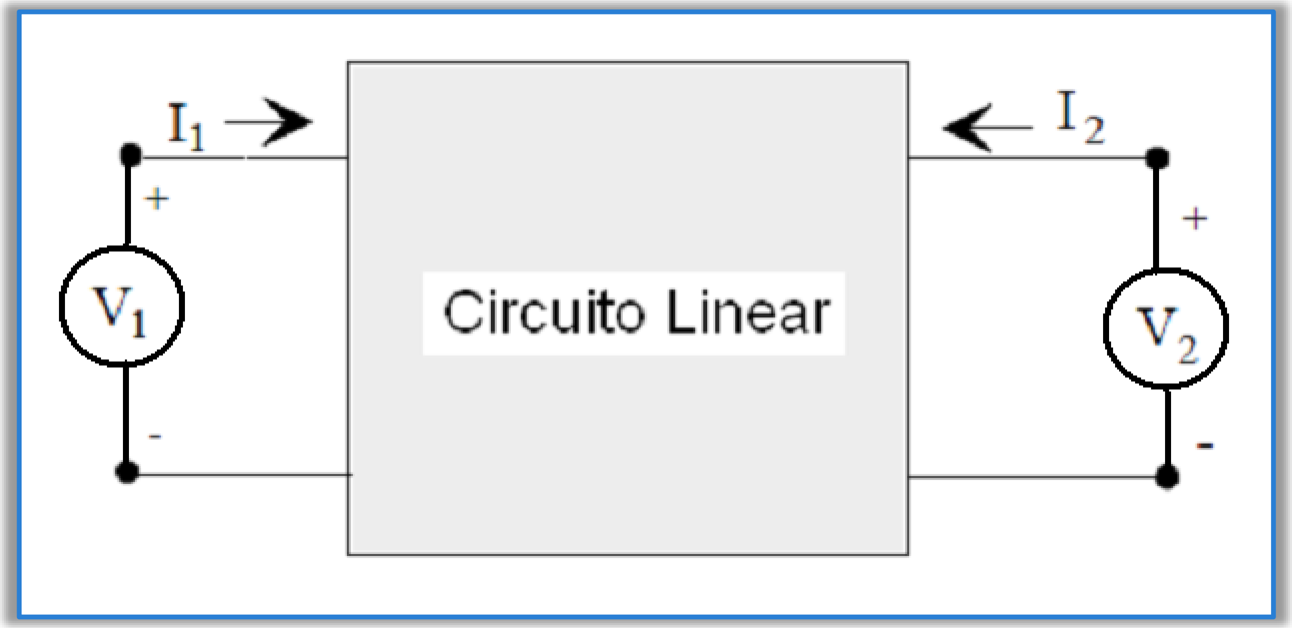
- Condições de Porta
  - $I_{entrada} = I_{saida}$ (mesma porta)

- Para que serve?
  - Modelar

- Utilização:
  - Sistemas de comunição, de controle, de potência e na eletrônica geral.

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

O QUE SÃO QUADRIPÓLOS?



Representação de quadripólo alimentado por fonte de tensão

QUADRIPÓLOS

- Parâmetros de Impedância

$$
\begin{aligned}
V_1 &= f\,(I_1,\ I_2)\\
V_2 &= f\,(I_1,\ I_2)
\end{aligned}
$$

- Parâmetros de Admitância

$$
\begin{aligned}
I_1 &= f\,(V_1,\ V_2)\\
I_2 &= f\,(V_1,\ V_2)
\end{aligned}
$$

QUADRIPÓLOS

- Parâmetros Híbridos

$$V_1 = f\,(I_1, V_2)$$
$$I_2 = f\,(I_1, V_2)$$

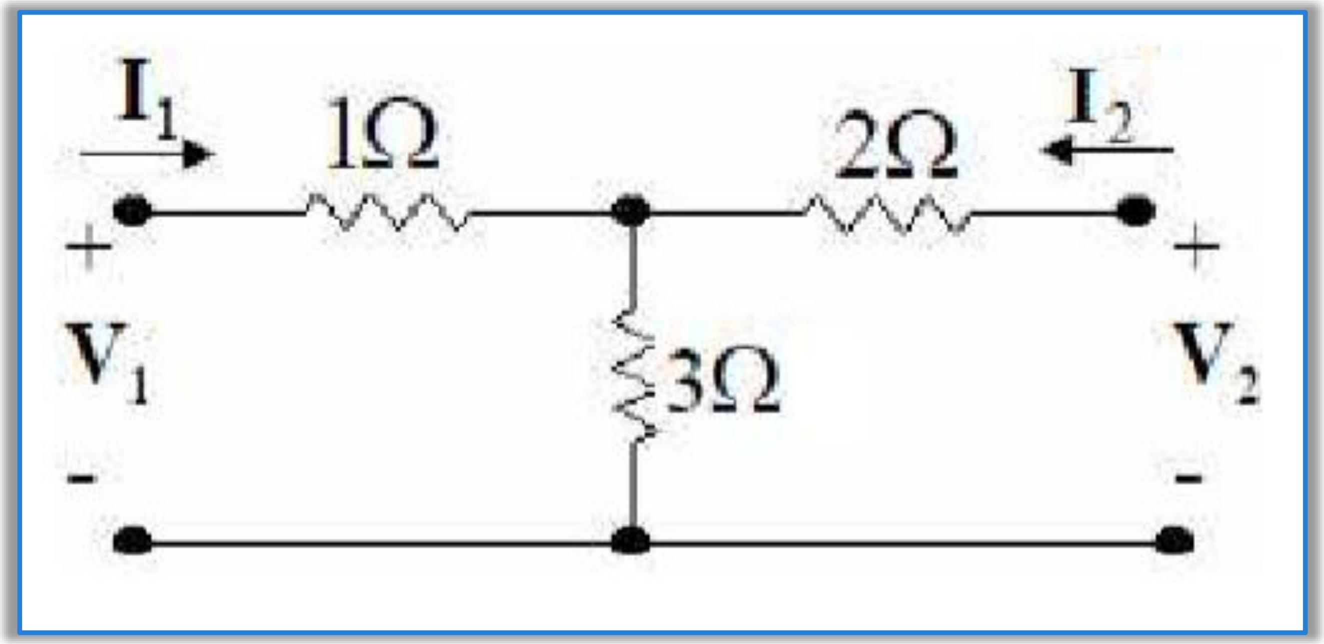
$$V_2 = f\,(I_2, V_1)$$
$$I_1 = f\,(I_2, V_1)$$

- Parâmetros de Transmissão

$$V_1 = f\,(I_2, V_2)$$
$$I_1 = f\,(I_2, V_2)$$

QUADRIPÓLOS

- Parâmetros de Impedância (z)



QUADRIPÓLOS

- Parâmetros de Impedância (z)

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

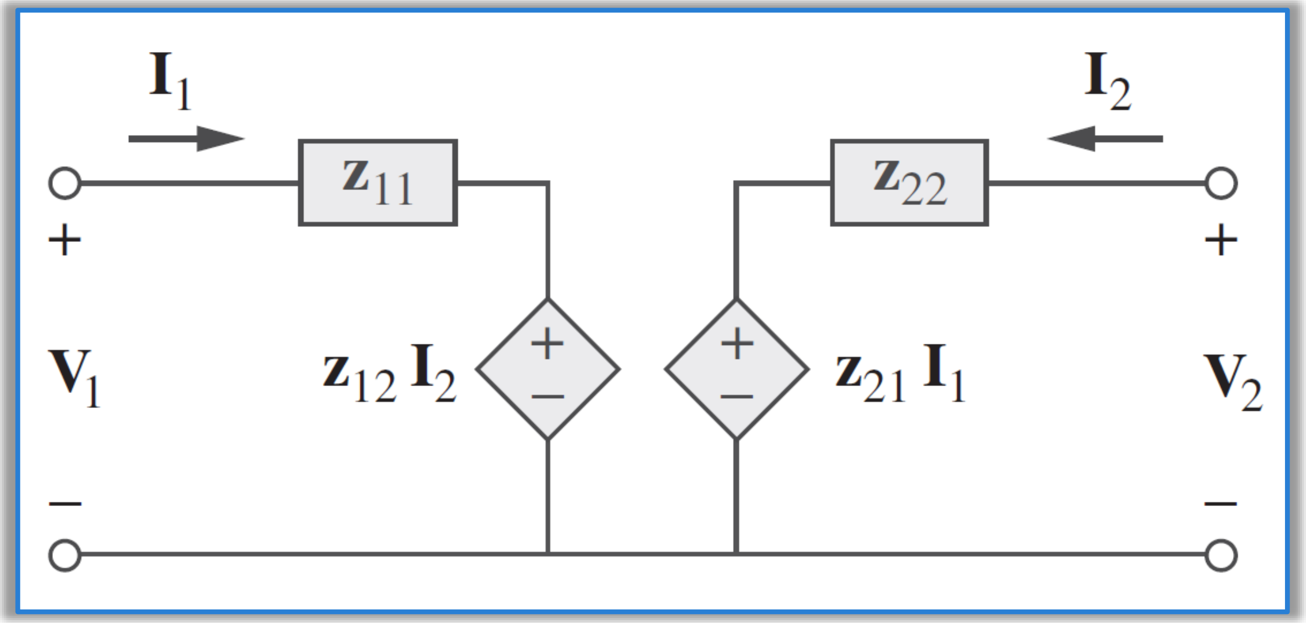
$$\boxed{V_1 = z_{11} I_1 + z_{12} I_2}$$

$$\boxed{V_2 = z_{21} I_1 + z_{22} I_2}$$

- z_{11} = Impedância de entrada com saída em aberto
- z_{12} = Impedância de transferência com entrada em aberto.
- z_{21} = Impedância de transferência com saída em aberto.
- z_{22} = Impedância de saída com entrada em aberto

QUADRIPÓLOS

- Parâmetros de Impedância (z)



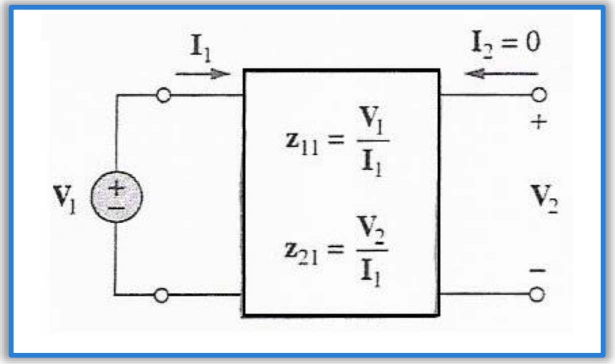
Circuito equivalente genérico

QUADRIPÓLOS

- Parâmetros de Impedância (z)

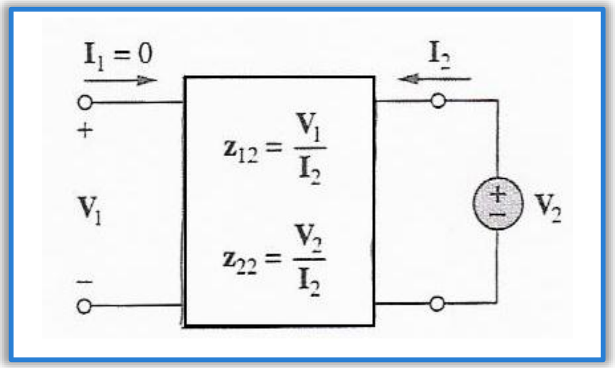
$$z_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{I_2=0}$$

$$z_{21} = \left.\frac{V_2}{I_1}\right|_{I_2=0}$$



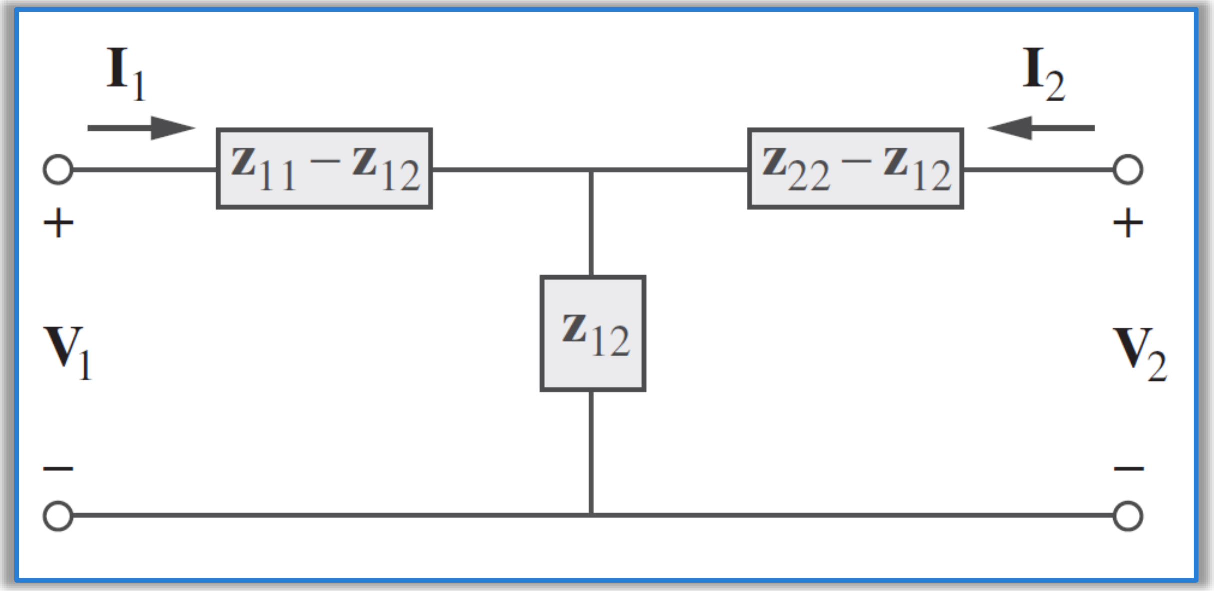
$$z_{12} = \left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{I_1=0}$$

$$z_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{I_1=0}$$



QUADRIPÓLOS

- Parâmetros de Impedância (z)

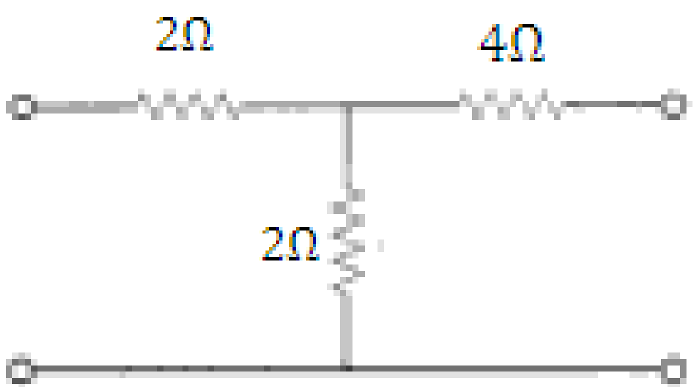


Circuito T equivalente genérico somente para circuitos recíprocos

QUADRIPÓLOS

- Parâmetros de Impedância (z)

  - Exercício



Resposta

$z_{11} = 4\Omega \quad z_{21} = 2\Omega$

$z_{12} = 2\Omega \quad z_{22} = 6\Omega$

QUADRIPÓLOS

- Parâmetros de Admitância (y)

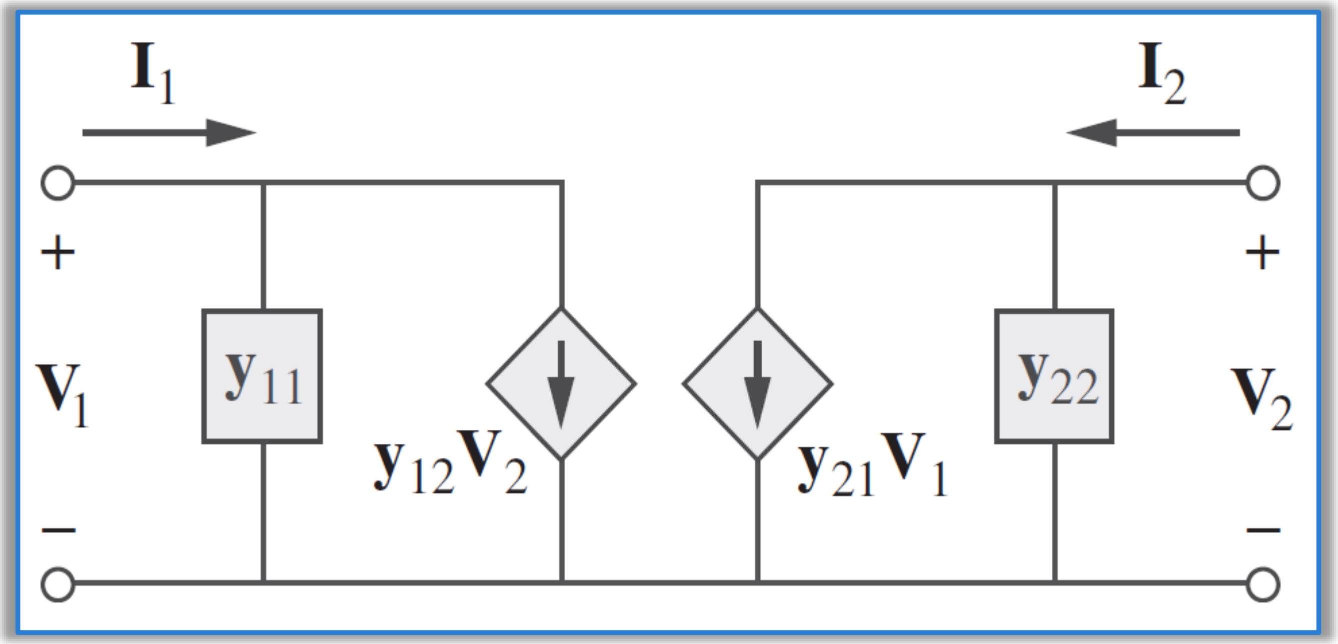
$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$y_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{V_2=0} \qquad y_{12} = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{V_1=0}$$

$$y_{21} = \left.\frac{I_2}{V_1}\right|_{V_2=0} \qquad y_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{V_1=0}$$

QUADRIPÓLOS

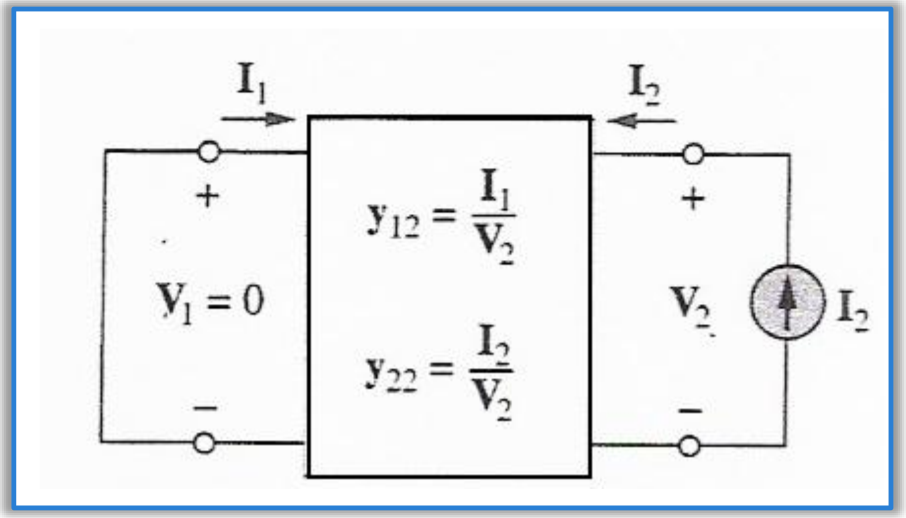
- Parâmetros de Admitância (y)



Circuito equivalente genérico

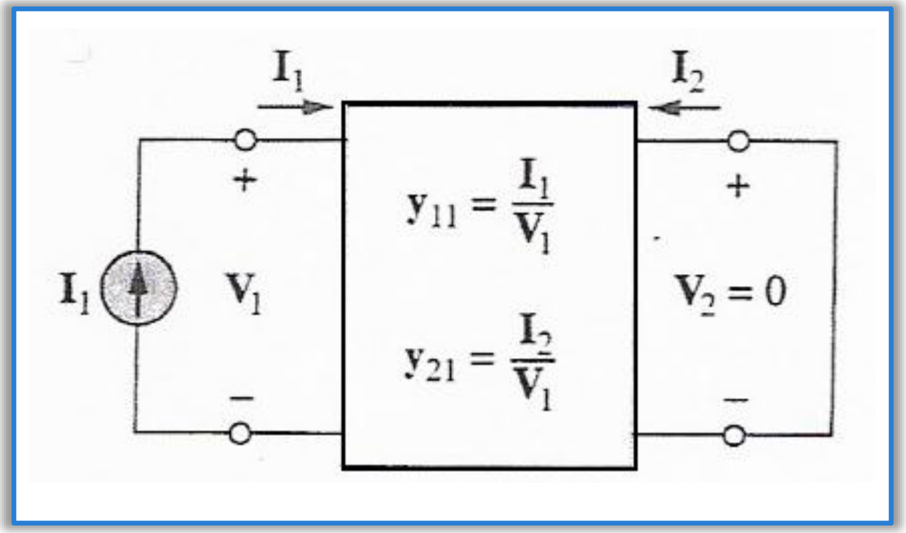
QUADRIPÓLOS

- Parâmetros de Admitância (y)



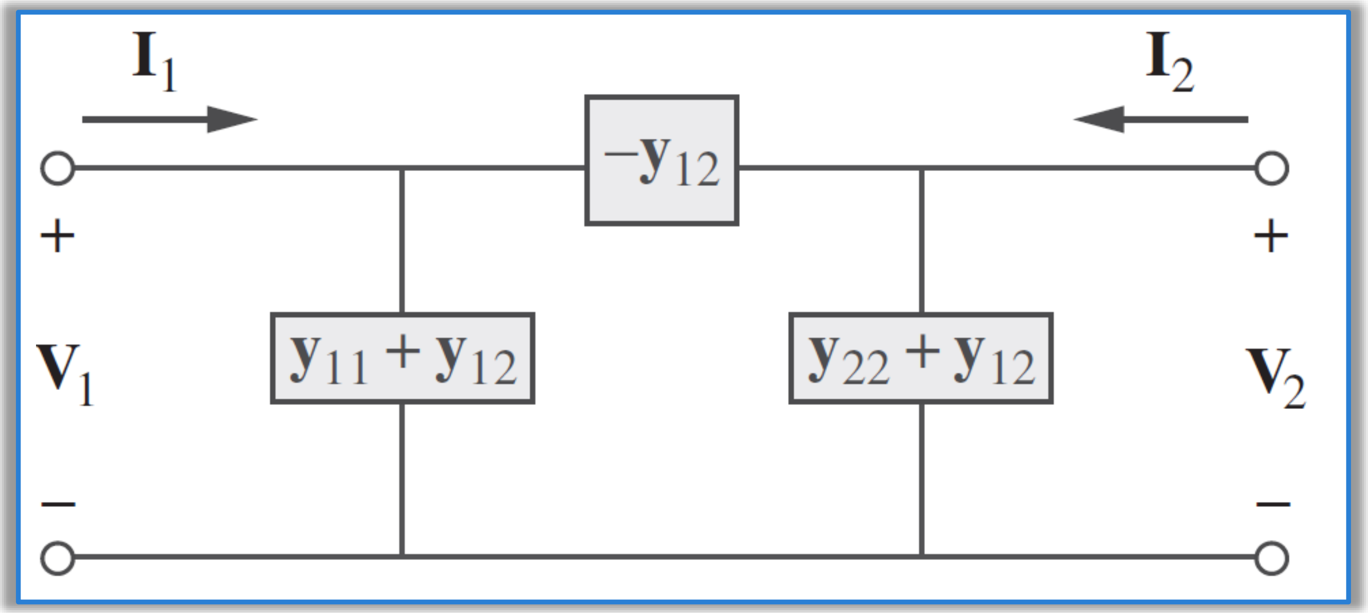
$V_1 = 0$

$V_2 = 0$



QUADRIPÓLOS

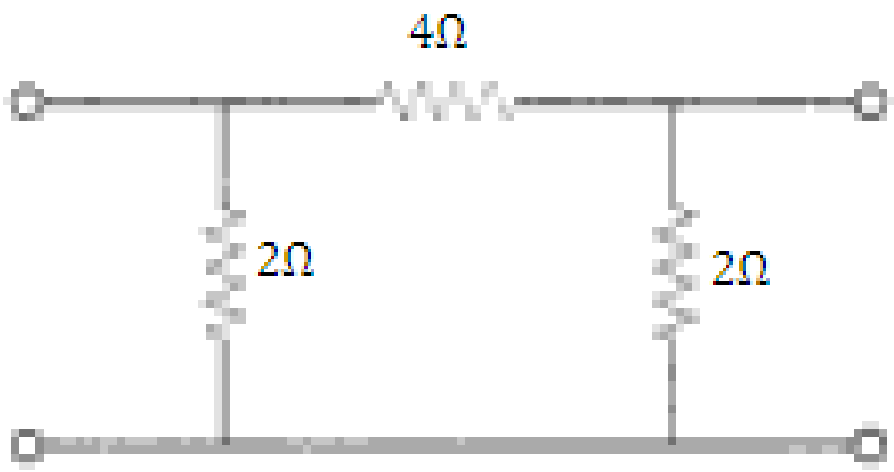
- Parâmetros de Admitância (y)



Circuito π equivalente genérico para circuitos recíprocos

QUADRIPÓLOS

- Parâmetros de Admitância (y)
  - Exercício



Resposta

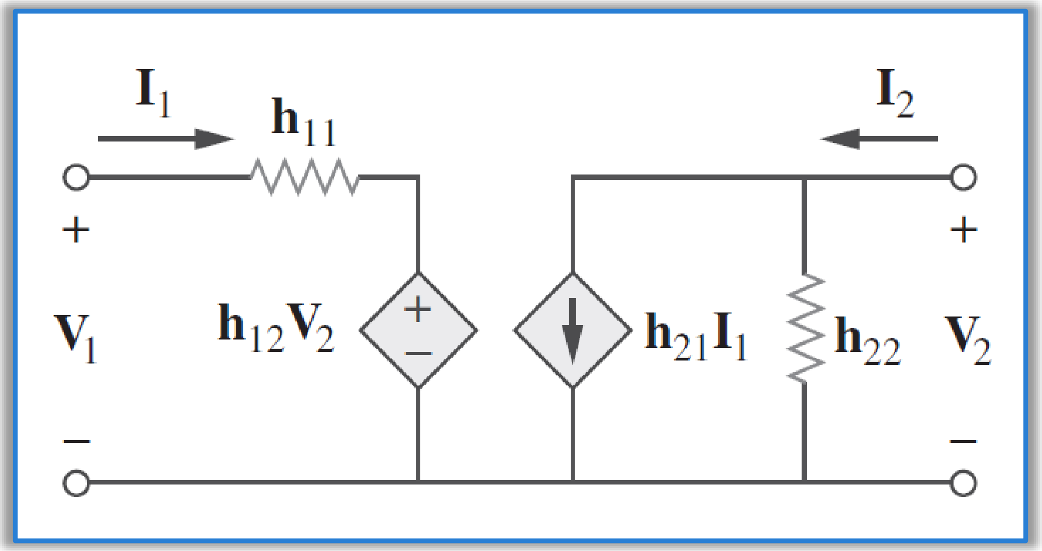
$$y_{11} = \frac{3}{4}S \quad y_{21} = -\frac{1}{4}S$$

$$y_{12} = -\frac{1}{4}S \quad y_{22} = \frac{3}{4}S$$

QUADRIPÓLOS

- Parâmetros de Híbridos (h)

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$



Circuito de parâmetros *h* equivalente a um circuito de duas portas

QUADRIPÓLOS

- Parâmetros de Híbridos (h)
  - h_{11} = Impedância de entrada com saída em curto-circuito
  - h_{12} = Ganho de tensão reverso com entrada em aberto.
  - h_{21} = Ganho de corrente direto com saída em curto-circuito.
  - h_{22} = Admitância de saída com entrada em aberto

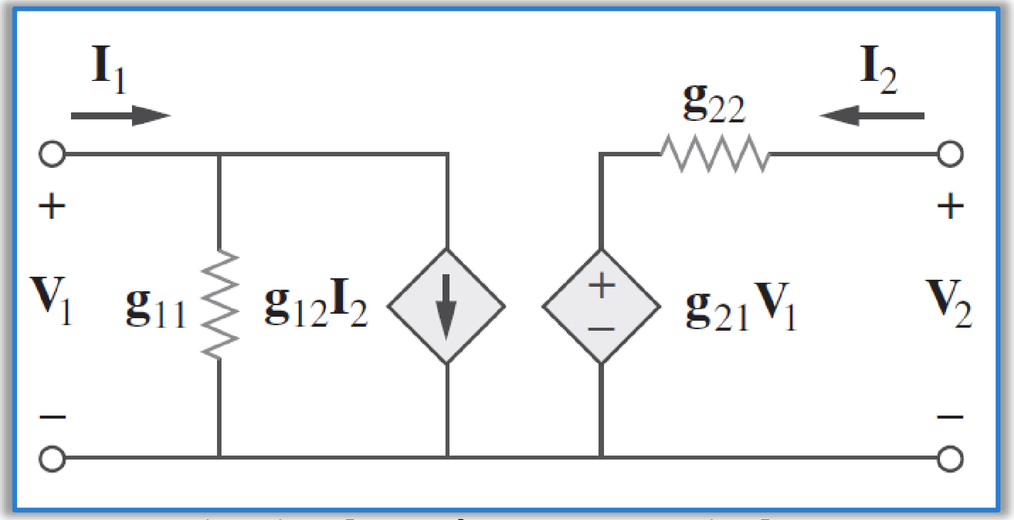
$$h_{11} = \left.\frac{V_1}{I_1}\right|_{V_2=0} \qquad h_{12} = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_1=0}$$

$$h_{21} = \left.\frac{I_2}{I_1}\right|_{V_2=0} \qquad h_{22} = \left.\frac{I_2}{V_2}\right|_{I_1=0}$$

QUADRIPÓLOS

- Parâmetros de Híbridos Inversos (g)

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$



Circuito de parâmetros *g* equivalente a um circuito de duas portas

QUADRIPÓLOS

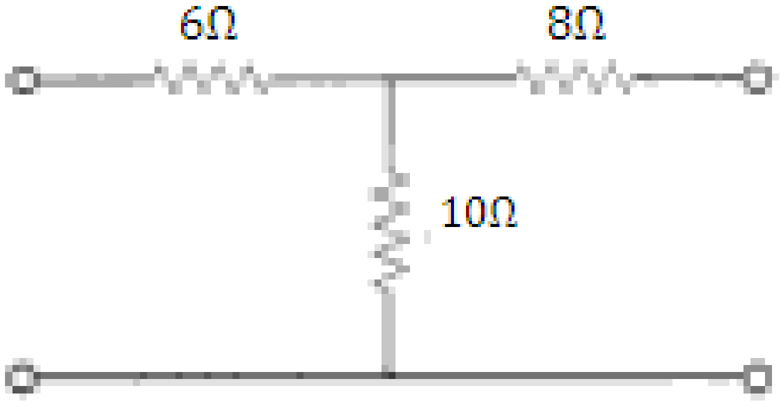
- Parâmetros de Híbridos Inversos (g)
  - g_{11} = Admitância de entrada com saída em aberto
  - g_{12} = Ganho de corrente reverso com entrada em curto-circuito
  - g_{21} = Ganho de tensão com saída em aberto
  - g_{22} = Impedância de saída com entrada em curto-circuito

$$g_{11} = \left.\frac{I_1}{V_1}\right|_{I_2=0} \qquad g_{12} = \left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{V_1=0}$$

$$g_{21} = \left.\frac{V_2}{V_1}\right|_{I_2=0} \qquad g_{22} = \left.\frac{V_2}{I_2}\right|_{V_1=0}$$

QUADRIPÓLOS

- Parâmetros de Híbridos (h)
  - Exercício



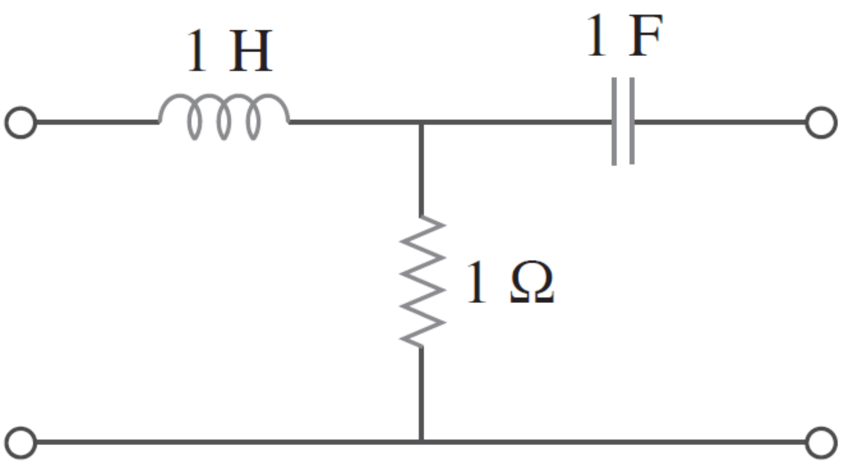
Resposta

$$h_{11} = \frac{94}{9}\,\Omega \qquad h_{21} = -\frac{5}{9}$$

$$h_{12} = \frac{5}{9} \qquad h_{22} = \frac{1}{18}\,\mathrm{S}$$

QUADRIPÓLOS

- Parâmetros de Híbridos Inversos (g)
  - Exercício

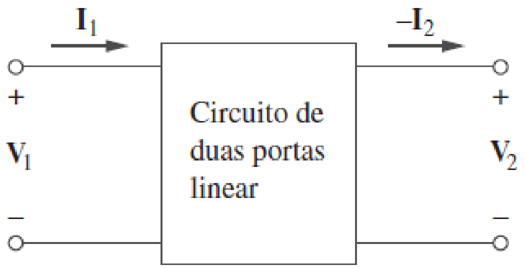


Resposta

$$[g] = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & -\frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{s^2+s+1}{s(s+1)} \end{bmatrix}$$

QUADRIPÓLOS

- Parâmetros de Transmissão (T)
  - A = Razão de tensão com saída em aberto
  - B = Impedância negativa de transmissão com saída em curto-circuito
  - C = Admitância de transferência com saída em aberto
  - D = Razão de corrente negativa com saída em curto-circuito



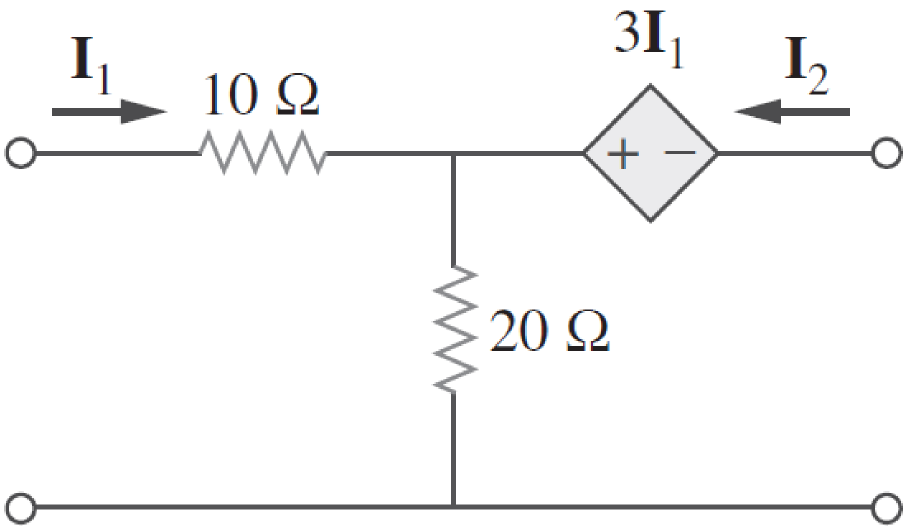
$$A = \left.\frac{V_1}{V_2}\right|_{I_2=0}, \qquad B = -\left.\frac{V_1}{I_2}\right|_{V_2=0}$$

$$C = \left.\frac{I_1}{V_2}\right|_{I_2=0}, \qquad D = -\left.\frac{I_1}{I_2}\right|_{V_2=0}$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

QUADRIPÓLOS

- Parâmetros de Transmissão
  - Exercício



Resposta

$A = 1{,}765$

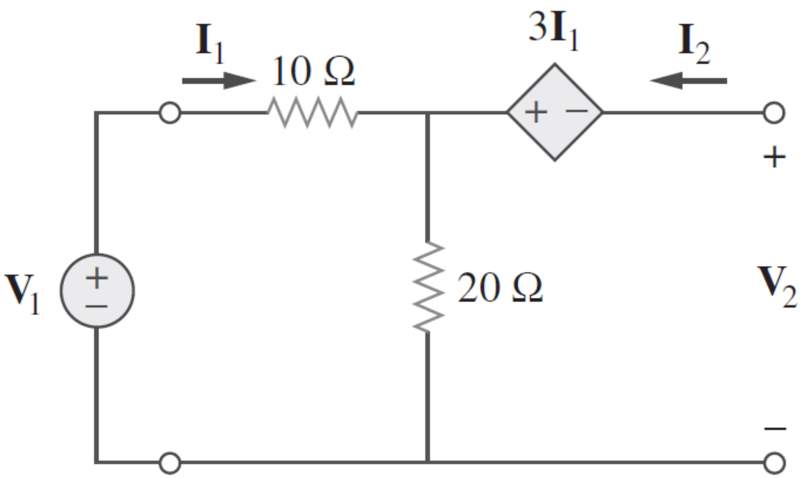
$B = 15{,}29\ \Omega$

$C = 0{,}0588\ S$

$D = 1{,}176$

QUADRIPÓLOS

- Para determinar A e C, deixa-se a porta de saída aberta (i2 = 0)



$$V_1 = (10 + 20)I_1 = 30I_1$$

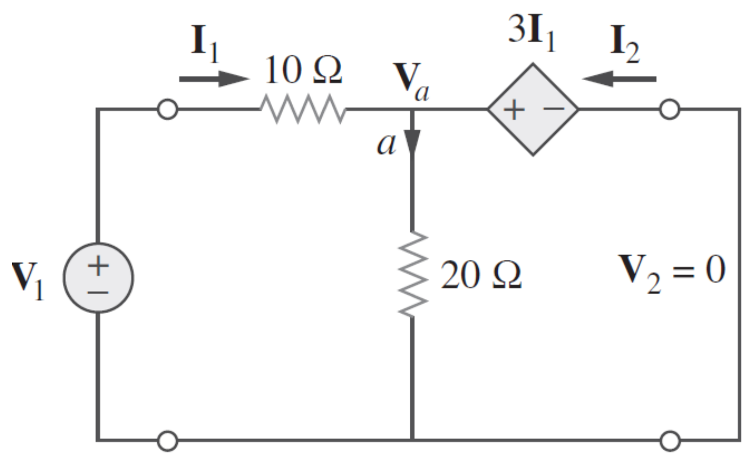
$$V_2 = 20I_1 - 3I_1 = 17I_1$$

$$A = \frac{V_1}{V_2} = \frac{30I_1}{17I_1} = 1{,}765 \qquad C = \frac{I_1}{V_2} = \frac{I_1}{17I_1} = 0{,}0588\ S$$

QUADRIPÓLOS

- Para obter B e D, "curto-circuita" a porta de saída ($V_2 = 0$)

$$\frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_a}{10} - \frac{\mathbf{V}_a}{20} + \mathbf{I}_2 = 0 \qquad (1)$$



$$\left.\begin{aligned} V_a &= 3I_1 \\ I_1 &= \frac{V_1 - V_a}{10} \end{aligned}\right\} \quad \mathbf{V}_1 = 13\mathbf{I}_1 \qquad (2)$$

- Substituindo (2) em (1)

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{I}_1 - \frac{3\mathbf{I}_1}{20} + \mathbf{I}_2 = 0 \\ &\frac{17}{20}\mathbf{I}_1 = -\mathbf{I}_2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\mathbf{D} = -\frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{I}_2} = \frac{20}{17} = 1{,}176 \\ &\mathbf{B} = -\frac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{I}_2} = \frac{-13\mathbf{I}_1}{(-17/20)\mathbf{I}_1} = 15{,}29\ \Omega \end{aligned}$$

PARÂMETROS

- Relação entre parâmetros.
- Seis conjuntos de parâmetros relacionam as mesmas variáveis terminais de entrada e saída para os mesmo circuito de duas portas – Inter-relacionados!

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [z] \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [z]^{-1} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [y] \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Conclui-se: $[y] = [z]^{-1}$

PARÂMETROS

- Matriz adjunta

$$\begin{bmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{bmatrix}$$

- Seu determinante

$$\Delta_z = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}$$

- Subst. Eq.

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} z_{22} & -z_{12} \\ -z_{21} & z_{11} \end{bmatrix}}{\Delta_z}$$

- Igualando os termos:

$$y_{11} = \frac{z_{22}}{\Delta_z}, \qquad y_{12} = -\frac{z_{12}}{\Delta_z}, \qquad y_{21} = -\frac{z_{21}}{\Delta_z}, \qquad y_{22} = \frac{z_{11}}{\Delta_z}$$

	z		y		h		g		T		t	
z	z_{11}	z_{12}	$\frac{y_{22}}{\Delta_y}$	$-\frac{y_{12}}{\Delta_y}$	$\frac{\Delta_h}{h_{22}}$	$\frac{h_{12}}{h_{22}}$	$\frac{1}{g_{11}}$	$-\frac{g_{12}}{g_{11}}$	$\frac{A}{C}$	$\frac{\Delta_T}{C}$	$\frac{d}{c}$	$\frac{1}{c}$
	z_{21}	z_{22}	$-\frac{y_{21}}{\Delta_y}$	$\frac{y_{11}}{\Delta_y}$	$-\frac{h_{21}}{h_{22}}$	$\frac{1}{h_{22}}$	$\frac{g_{21}}{g_{11}}$	$\frac{\Delta_g}{g_{11}}$	$\frac{1}{C}$	$\frac{D}{C}$	$\frac{\Delta_t}{c}$	$\frac{a}{c}$
y	$\frac{z_{22}}{\Delta_z}$	$-\frac{z_{12}}{\Delta_z}$	y_{11}	y_{12}	$\frac{1}{h_{11}}$	$-\frac{h_{12}}{h_{11}}$	$\frac{\Delta_g}{g_{22}}$	$\frac{g_{12}}{g_{22}}$	$\frac{D}{B}$	$-\frac{\Delta_T}{B}$	$\frac{a}{b}$	$-\frac{1}{b}$
	$-\frac{z_{21}}{\Delta_z}$	$\frac{z_{11}}{\Delta_z}$	y_{21}	y_{22}	$\frac{h_{21}}{h_{11}}$	$\frac{\Delta_h}{h_{11}}$	$-\frac{g_{21}}{g_{22}}$	$\frac{1}{g_{22}}$	$-\frac{1}{B}$	$\frac{A}{B}$	$-\frac{\Delta_t}{b}$	$\frac{d}{b}$
h	$\frac{\Delta_z}{z_{22}}$	$\frac{z_{12}}{z_{22}}$	$\frac{1}{y_{11}}$	$-\frac{y_{12}}{y_{11}}$	h_{11}	h_{12}	$\frac{g_{22}}{\Delta_g}$	$-\frac{g_{12}}{\Delta_g}$	$\frac{B}{D}$	$\frac{\Delta_T}{D}$	$\frac{b}{a}$	$\frac{1}{a}$
	$-\frac{z_{21}}{z_{22}}$	$\frac{1}{z_{22}}$	$\frac{y_{21}}{y_{11}}$	$\frac{\Delta_y}{y_{11}}$	h_{21}	h_{22}	$-\frac{g_{21}}{\Delta_g}$	$\frac{g_{11}}{\Delta_g}$	$-\frac{1}{D}$	$\frac{C}{D}$	$\frac{\Delta_t}{a}$	$\frac{c}{a}$
g	$\frac{1}{z_{11}}$	$-\frac{z_{12}}{z_{11}}$	$\frac{\Delta_y}{y_{22}}$	$\frac{y_{12}}{y_{22}}$	$\frac{h_{22}}{\Delta_h}$	$-\frac{h_{12}}{\Delta_h}$	g_{11}	g_{12}	$\frac{C}{A}$	$-\frac{\Delta_T}{A}$	$\frac{c}{d}$	$-\frac{1}{d}$
	$\frac{z_{21}}{z_{11}}$	$\frac{\Delta_z}{z_{11}}$	$-\frac{y_{21}}{y_{22}}$	$\frac{1}{y_{22}}$	$-\frac{h_{21}}{\Delta_h}$	$\frac{h_{11}}{\Delta_h}$	g_{21}	g_{22}	$\frac{1}{A}$	$\frac{B}{A}$	$\frac{\Delta_t}{d}$	$-\frac{b}{d}$
T	$\frac{z_{11}}{z_{21}}$	$\frac{\Delta_z}{z_{21}}$	$-\frac{y_{22}}{y_{21}}$	$-\frac{1}{y_{21}}$	$-\frac{\Delta_h}{h_{21}}$	$-\frac{h_{11}}{h_{21}}$	$\frac{1}{g_{21}}$	$\frac{g_{22}}{g_{21}}$	A	B	$\frac{d}{\Delta_t}$	$\frac{b}{\Delta_t}$
	$\frac{1}{z_{21}}$	$\frac{z_{22}}{z_{21}}$	$-\frac{\Delta_y}{y_{21}}$	$-\frac{y_{11}}{y_{21}}$	$-\frac{h_{22}}{h_{21}}$	$-\frac{1}{h_{21}}$	$\frac{g_{11}}{g_{21}}$	$\frac{\Delta_g}{g_{21}}$	C	D	$\frac{c}{\Delta_t}$	$\frac{a}{\Delta_t}$
t	$\frac{z_{22}}{z_{12}}$	$\frac{\Delta_z}{z_{12}}$	$-\frac{y_{11}}{y_{12}}$	$-\frac{1}{y_{12}}$	$\frac{1}{h_{12}}$	$\frac{h_{11}}{h_{12}}$	$-\frac{\Delta_g}{g_{12}}$	$-\frac{g_{22}}{g_{12}}$	$\frac{D}{\Delta_T}$	$\frac{B}{\Delta_T}$	a	b
	$\frac{1}{z_{12}}$	$\frac{z_{11}}{z_{12}}$	$-\frac{\Delta_y}{y_{12}}$	$-\frac{y_{22}}{y_{12}}$	$\frac{h_{22}}{h_{12}}$	$\frac{\Delta_h}{h_{12}}$	$-\frac{g_{11}}{g_{12}}$	$-\frac{1}{g_{12}}$	$\frac{C}{\Delta_T}$	$\frac{A}{\Delta_T}$	c	d

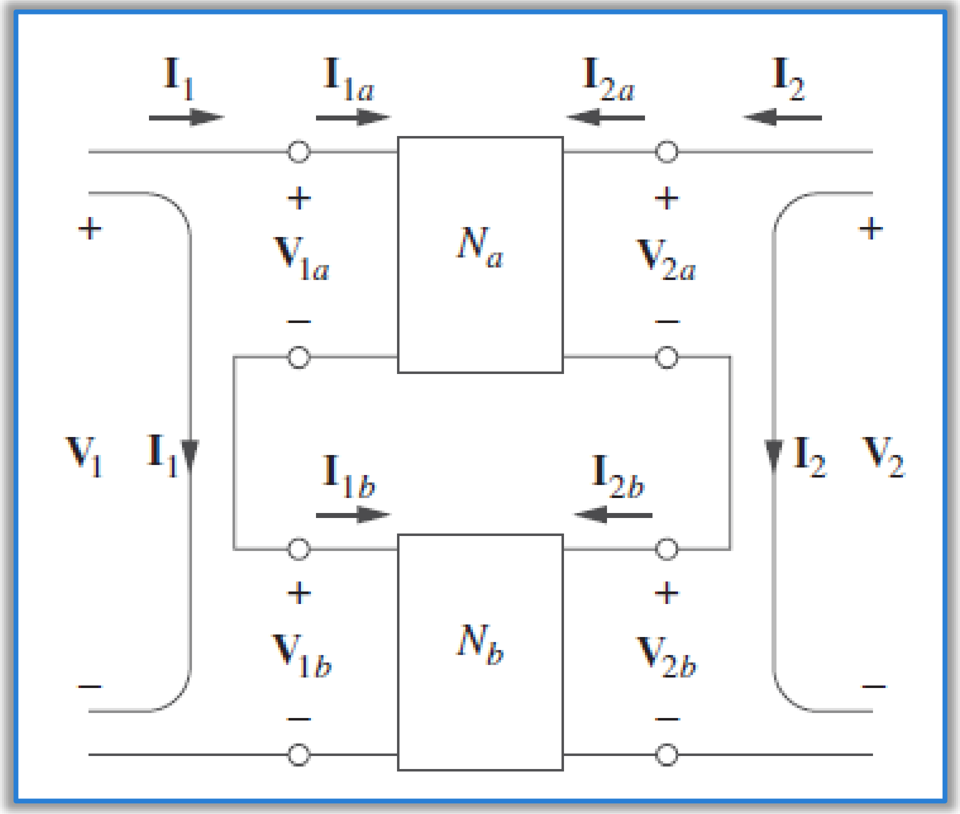
$\Delta_z = z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}$, $\Delta_h = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}$, $\Delta_T = AD - BC$

$\Delta_y = y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}$, $\Delta_g = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}$, $\Delta_t = ad - bc$

UFPR

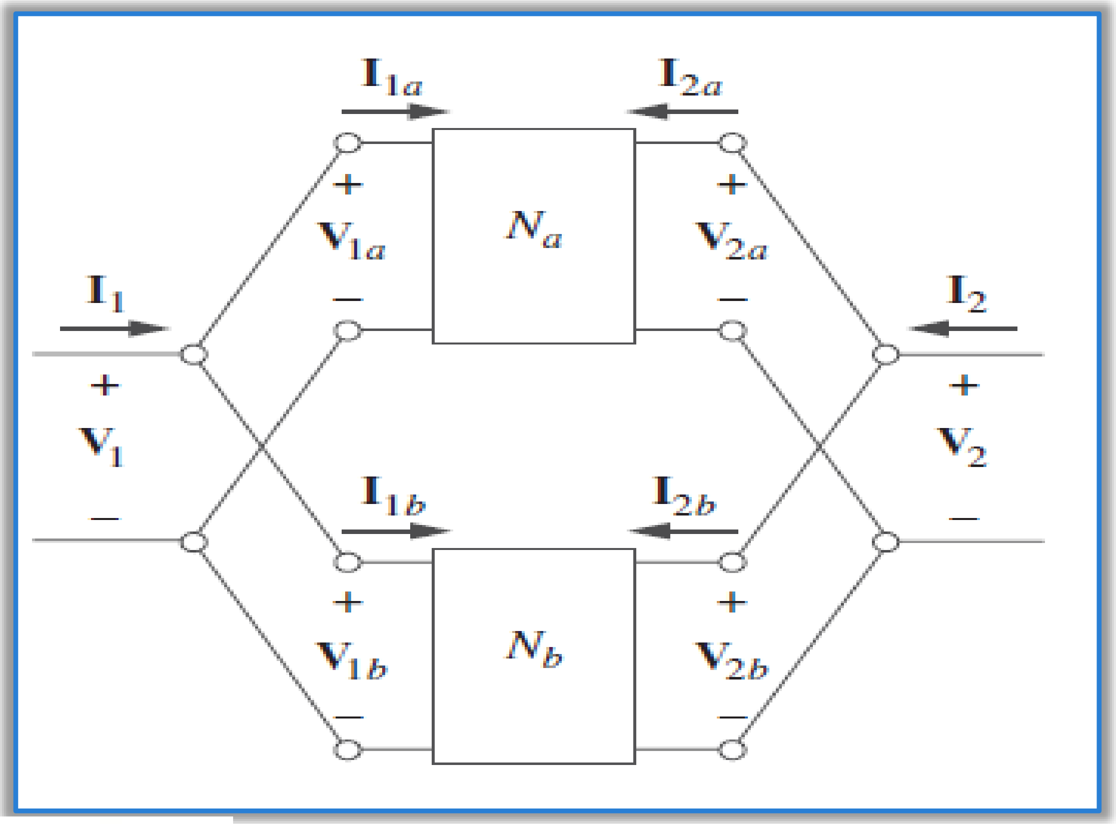
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

ASSOCIAÇÕES



$$[I] = [I_a] = [I_b]$$
$$[V] = [V_a + V_b]$$
$$[V] = [Z_a]\cdot[I_a] + [Z_b]\cdot[I_b]$$
$$[V] = [Z_a + Z_b]\cdot[I] = [Z]\cdot[I]$$
$$[Z] = [Z_a + Z_b]$$

ASSOCIAÇÕES



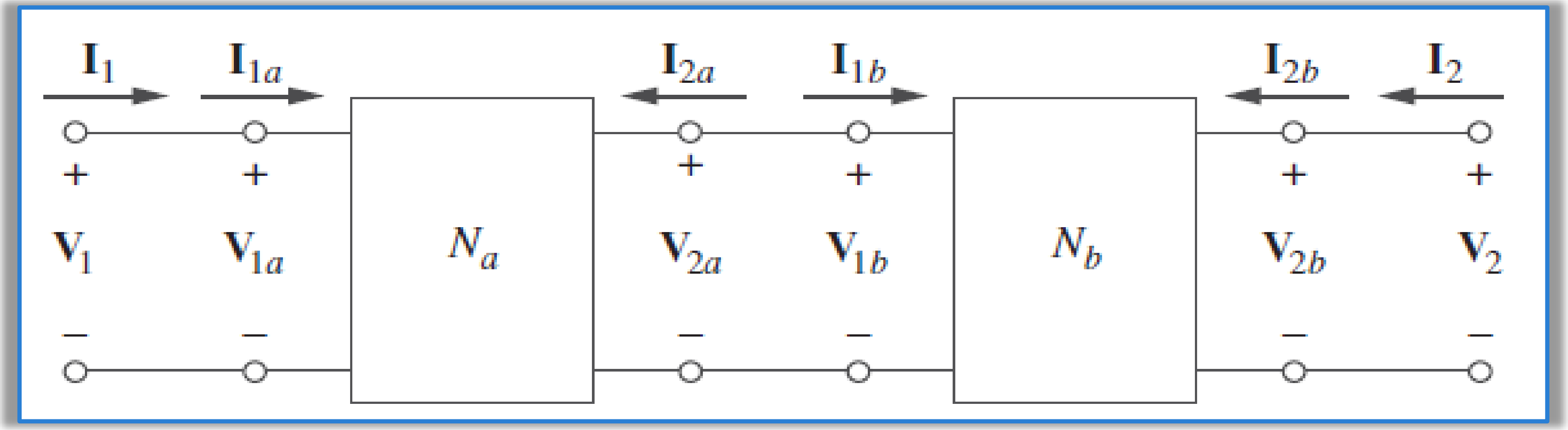
$$[V] = [V_a] = [V_b]$$

$$[I] = [I_a + I_b]$$

$$[I] = [Y_a + Y_b] \cdot [V] = [Y] \cdot [V]$$

$$[Y] = [Y_a + Y_b]$$

ASSOCIAÇÕES



$$\begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{1a} \\ I_{1a} \end{bmatrix} = [T_a]\begin{bmatrix} V_{2a} \\ -I_{2a} \end{bmatrix} = [T_a]\begin{bmatrix} V_{1b} \\ I_{1b} \end{bmatrix} = [T_a][T_b]\begin{bmatrix} V_{2b} \\ -I_{2b} \end{bmatrix} = [T_a][T_b]\begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = [T]\begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix}$$

$$[T] = [T_a][T_b]$$