TE060 – Princípios de Comunicação

Sinais e Sistemas de Comunicação

Evelio M. G. Fernández

4 de agosto de 2014

Notes

Informação sobre a disciplina

- Terças e Quintas feiras das 15:30 às 17:20 horas
- Professor: Evelio Martín García Fernández
- Gabinete 9, Tel: 3361-3221, 9194-3363
- e-mail: evelio@eletrica.ufpr.br
- Página da Disciplina na Internet: www.eletrica.ufpr.br/evelio/TE060/index.htm

Notes

Princípios de Comunicação – Conteúdo

1. **Sinais e Sistemas de Comunicação;**
   - Representação de Sinais Determinísticos no Domínio do Tempo e no Domínio da Frequência;
   - Sinais Aleatórios. Revisão de Processos Estocásticos;
   - Transmissão de Sinais através de Sistemas Lineares;
   - Sinais em Quadratura;
2. **Sistemas de Modulação de Onda Contínua;**
   - Modulação de Amplitude;
   - Modulação Angular;
   - Efeito do Ruído em Sistemas com Modulação de Onda Contínua;
3. **Sistemas de Modulação Digital;**
   - Modulação de Pulso;
   - Transmissão Digital em Banda Base;
   - Transmissão Digital em Banda Passante.

Notes

Princípios de Comunicação – Bibliografia

- Simon Haykin, *Sistemas de Comunicação*, 4ª Edição, Bookman, 2004.
- Simon Haykin e Michael Moher, *Sistemas de Comunicação*, 5ª Edição, Bookman, 2009.
- Simon Haykin e Michael Moher, *Introdução aos Sistemas de Comunicações*, 2ª Edição, Bookman, 2008.
- Leon W. Couch, *Digital and Analog Communication Systems*, 7th Edition, Prentice Hall, 2007.
- Bernard Sklar, *Digital Communications*, 2nd Edition, Prentice Hall 2004.

Notes

Princípios de Comunicação – Avaliação

- 1ª Prova (P1) 11/09/2014 15:30 Horas
- 2ª Prova (P2) 28/10/2014 15:30 Horas
- 3ª Prova (P3) 27/11/2014 15:30 Horas
- Média Final = (P1 + P2 + P3)/3
- Exame Final 09/12/2014 15:30 Horas

Nas provas e no exame será permitido consultar 01 (um) livro (NÃO PODE SER FOTOCÓPIA) e uma folha A4 manuscrita.

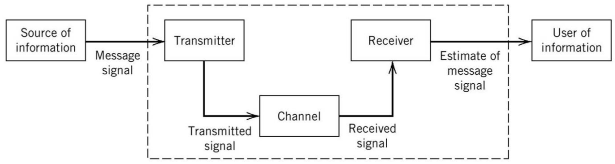
Notes

Processos de um Sistema de Comunicação

- Geração de um *sinal de mensagem*.
- Descrição da mensagem através de *símbolos* elétricos.
- *Codificação* dos símbolos de acordo com o meio físico de transmissão.
- *Transmissão* dos símbolos até o destino.
- *Decodificação* e *reprodução* dos símbolos originais.
- *Recriação* do sinal de mensagem original.

Notes

Elementos de um Sistema de Comunicação



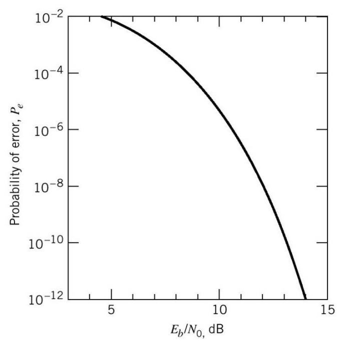
Notes

Recursos e Limitações de Sistemas de Comunicação

- Potência Transmitida $\rightarrow$ (SNR: *Signal-to-Noise Ratio*, C/N, S/N, E_b/N_0)
- Largura de Banda do Canal $\rightarrow$ Conteúdo Espectral
- Taxa de Erro de Bits $\rightarrow$ (BER: *Bit Error Rate*)
- Ruído
- Atenuação
- Distorção
- Interferências

Notes

Taxa de Erro de Bits



Notes

Fontes de Informação

- Fala, música, imagens, dados de computador, etc.
- Caracterizada em termos do sinal que carrega a informação

Sinal

Função do tempo que contém informação sobre o comportamento de algum fenômeno

Notes

Classificação de Sinais

- Sinais Determinísticos
- Sinais Aleatórios
- Sinais Periódicos
- Sinais não Periódicos
- Sinais Analógicos
- Sinais Discretos
- Sinais de Energia
- Sinais de Potência

Notes

Classificação de Sinais

- **Sinais Determinísticos**
  - Não há incerteza em relação com o seu valor em qualquer instante de tempo. Ex: $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \phi_0), \quad A, f_0, \phi_0$: constantes conhecidas.
- **Sinais Aleatórios**
  - Ha algum grau de incerteza sobre o seu valor. Observado durante um longo período de tempo $\Rightarrow$ **processo aleatório:** exibe determinadas regularidades que podem ser descritas em termos de probabilidades e médias estatísticas.

Notes

Classificação de Sinais

- **Sinais Periódicos:** $x(t) = x(t + T_0), \quad -\infty < t < \infty$
- **Sinais não Periódicos:** Ex: pulsos, sinais digitais
- **Sinal Analógico:**
  - $x(t) \to$ função contínua do tempo $\Rightarrow$ é unicamente definida para todo t
- **Sinal Discreto:**
  - $x[kT], k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \to$ somente existe em valores discretos de tempo
  - **Sinal Digital:** tempo e amplitude têm valores discretos

Notes

Sinais de Energia e Sinais de Potência

- Sinal elétrico, $x(t)$: tensão, $v(t)$, ou corrente, $i(t)$, com potência instantânea $p(t)$ dada por:

  $p(t) = v^2(t)/R = i^2(t)R.$ Supondo $R = 1\Omega, \Rightarrow p(t) = x^2(t)$

- A energia dissipada durante o intervalo de tempo $(-T/2, T/2)$ por um sinal real com potência instantânea $p(t)$ é,

$$E_X^T = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)\, dt$$

Notes

Sinais de Energia e Sinais de Potência

- A potência média dissipada pelo sinal durante esse intervalo é,

$$P_X^T = \frac{1}{T} E_X^T = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)\, dt$$

Potência Média

É a taxa à qual a energia é liberada. $\to$ Determina a tensão (ou corrente) que deve ser aplicada a um transmissor, intensidade de campo magnético, ...

Notes

Sinais de Energia e Sinais de Potência

- **Sinais de Energia:** $0 < E_X < \infty$. Onde,

$$E_X = \lim_{T\to\infty} E_X^T = \lim_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)\,dt$$

- **Sinais de Potência:** $0 < P_X < \infty$. Onde,

$$P_X = \lim_{T\to\infty} P_X^T = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)\,dt$$

Lembrar que: $\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [\cdot]\,dt = \langle[\cdot]\rangle \rightarrow$ média temporal.

Para sinais periódicos: $\langle[\cdot]\rangle = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}+a}^{\frac{T_0}{2}+a} [\cdot]\,dt$

Notes

Algumas Funções Importantes

- **Degrau unitário:** $u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$
- **Função Sinal:** $\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$
- **Pulso retangular:** $\text{rect}(t) = \begin{cases} -1, & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{fora} \end{cases}$
- **Impulso unitário:**
  1. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$
  2. $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$
  3. $x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$
  4. $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0)$
- **Função sinc:** $\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$

Notes

Sinais Fisicamente Realizáveis

Exercício 1: Determine se os seguintes sinais são de energia ou de potência.

a) $x_1(t) = e^{-2t}u(t)$;

b) $x_2(t) = e^{j(2t+\pi/4)}$;

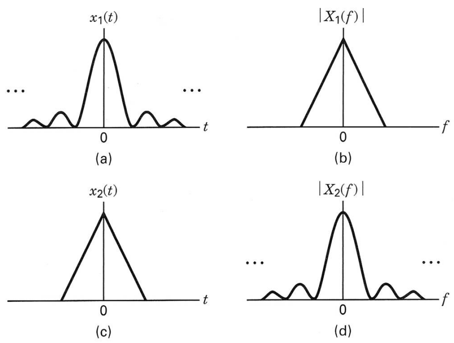
c) $x_3(t) = \cos(t)$.

Sinais (formas de onda) fisicamente realizáveis satisfazem as seguintes condições:

- Têm valores significativos de amplitude diferentes de zero sobre um intervalo finito de tempo;
- O espectro de frequências tem valores significativos sobre um intervalo finito de frequências;
- São funções contínuas do tempo;
- Têm um valor pico finito;
- Formas de onda fisicamente realizáveis somente têm valores reais.

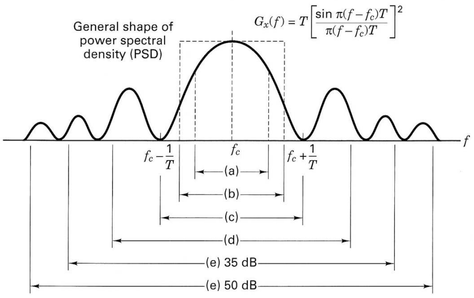
Notes

Dependência Tempo-Frequência



Notes

O Dilema da Largura de Banda



Bandwidth of digital data. (a) Half-power. (b) Noise equivalent. (c) Null to null. (d) 99% of power. (e) Bounded PSD (defines attenuation outside bandwidth) at 35 and 50 dB.

Evelio M. G. Fernández TE060 – Sinais e Sistemas de Comunicação

Notes

Série de Fourier (forma trigonométrica)

Seja: $g_{T_0}(t) \rightarrow$ sinal periódico com período $T_0 = \frac{1}{f_0}$:

$g_{T_0}(t) = a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t)]$, onde:

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g_{T_0}(t)\,dt,$$

$$a_n = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g_{T_0}(t)\cos(2\pi n f_0 t)\,dt, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g_{T_0}(t)\sin(2\pi n f_0 t)\,dt, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Evelio M. G. Fernández TE060 – Sinais e Sistemas de Comunicação

Notes

Série de Fourier (forma exponencial)

$$g_{T_0}(t) =$$
$$a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}[(a_n - jb_n)\exp(j2\pi n f_0 t) + (a_n + jb_n)\exp(-j2\pi n f_0 t)]$$

Seja, $c_n = \begin{cases} a_n - jb_n, & n > 0 \\ a_0, & n = 0 \\ a_n + jb_n, & n < 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad g_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j2\pi n f_0 t)$$

onde,

$$c_n = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g_{T_0}(t)\exp(-j2\pi n f_0 t)\,dt, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Notes

Algumas propriedades da série exponencial de Fourier

1. Se $g(t)$ é real,

$$c_n = c_{-n}^*, \quad \arg(c_n) = -\arg(c_{-n}), \quad c_n = |c_n|\exp[\arg(c_n)]$$

2. Se $g(t)$ é real e par [isto é, $g(t) = g(-t)$],

$$\Im[c_n] = 0$$

3. Se $g(t)$ é real e ímpar [isto é, $g(t) = -g(-t)$],

$$\Re[c_n] = 0$$

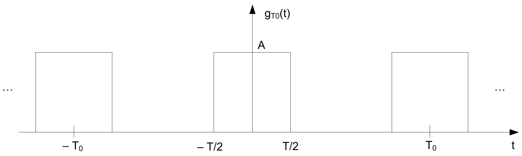
4. Teorema de Parseval:

$$\frac{1}{T_0}\int_a^{a+T_0} |g(t)|^2\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

Notes

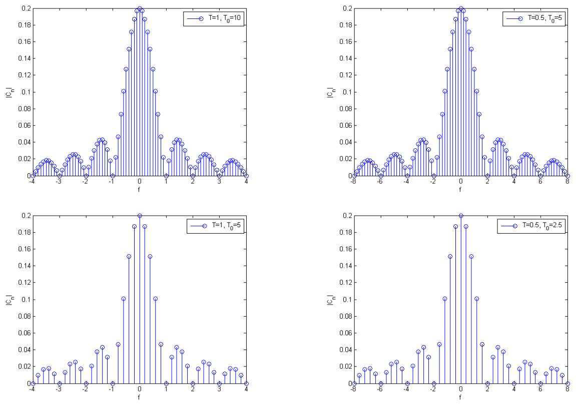
Exemplo

Determinar o espectro de amplitudes de um trem periódico de pulsos retangulares de amplitude A, duração T e período T_0



$$c_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T/2}^{T/2} A\exp(-j2\pi n f_0 t)dt = \frac{A}{T_0}\left[-\frac{1}{j2\pi n f_0 t}\exp(-j2\pi n f_0 t)\right]_{-T/2}^{T/2}$$
$$= \frac{TA}{T_0}\mathrm{sinc}\left(\frac{nT}{T_0}\right)$$

Notes



Notes

Transformada de Fourier

$g(t) \rightleftharpoons G(f)$

$G(f) = \mathcal{F}[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi ft}\,dt$

$g(t) = \mathcal{F}^{-1}[G(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{j2\pi ft}\,df$

$G(f) = X(f) + jY(f)$

$G(f) = |G(f)|e^{j\theta(f)}$

$|G(f)| = \sqrt{X^2(f) + Y^2(f)}$ e $\theta(f) = \tan^{-1}\left(\frac{Y(f)}{X(f)}\right)$

Notes

Algumas propriedades da Trasformada de Fourier

1. Se $g(t)$ é real, então

$$G(-f) = G^*(f)$$
$$|G(-f)| = |G(f)|$$
$$\theta(-f) = -\theta(f)$$

2. Teorema de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2^*(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(f)G_2^*(f)\,df$$

Se $g_1(t) = g_2(t) = g(t) \Rightarrow$ Teorema da Energia de Rayleigh:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2\,df.$$

Notes

Pares de Transformadas de Fourier

Domínio do tempo	Domínio da transformada
$\delta(t)$	1
1	$\delta(f)$
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0}$
$e^{j2\pi f_0 t}$	$\delta(f-f_0)$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2}[\delta(f+f_0)+\delta(f-f_0)]$
$\mathrm{sen}(2\pi f_0 t)$	$\frac{j}{2}[\delta(f+f_0)-\delta(f-f_0)]$
$\mathrm{rect}(\frac{t}{\tau})$	$\tau\mathrm{sinc}(f\tau)$
$2W\mathrm{sinc}(2Wt)$	$\mathrm{rect}(\frac{f}{2W})$
$e^{-\alpha t}u(t),\ \alpha>0$	$\frac{1}{\alpha+j2\pi f}$
$e^{-\alpha\|t\|},\ \alpha>0$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2+(2\pi f)^2}$
$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi f^2}$
$\mathrm{sgn}(t)$	$\frac{1}{j\pi f}$
$u(t)$	$\frac{1}{2}\delta(f)+\frac{1}{j2\pi f}$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_0)$	$\frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-\frac{n}{T_0})$

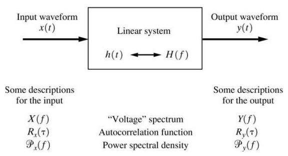
Notes

Propriedades da Transformadas de Fourier

$g_i(t)=\mathcal{F}^{-1}[G_i(f)]$	$\Longleftrightarrow$	$G_i(f)=\mathcal{F}[g_i(t)]$	
$g(t)=ag_1(t)+bg_2(t)$	$\Longleftrightarrow$	$G(f)=aG_1(f)+bG_2(f)$	Linearidade
$G(t)$	$\Longleftrightarrow$	$g(-f)$	Dualidade
$g(at)$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{\|a\|}G(\frac{f}{a})$	Mudança de escala no tempo
$g(t-\tau)$	$\Longleftrightarrow$	$G(f)e^{-j2\pi f\tau}$	Deslocamento da função no tempo
$g(t)e^{j2\pi f_c t}$	$\Longleftrightarrow$	$G(f-f_c)$	Deslocamento da função na freqüência
$\frac{d}{dt}g(t)$	$\Longleftrightarrow$	$j2\pi f G(f)$	Derivação no tempo
$\int_{-\infty}^{t}g(\tau)d\tau$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{G(f)}{j2\pi f}+\frac{1}{2}G(0)\delta(f)$	Integração no tempo
$g^*(t)$	$\Longleftrightarrow$	$G^*(-f)$	Conjugação no tempo
$g_1(t)*g_2(t)$	$\Longleftrightarrow$	$G_1(f)G_2(f)$	Convolução no tempo
$g(t)\cos 2\pi f_c t$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{2}[G(f+f_c)+G(f-f_c)]$	Modulação
$\int_{-\infty}^{\infty}\|g(t)\|^2dt$	$\Longleftrightarrow$	$\int_{-\infty}^{\infty}\|G(f)\|^2df$	Teorema de Parseval

Notes

Transmissão de Sinais através de Sistemas Lineares



- $y(t)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$
- $Y(f)=X(f)H(f)$

Integral de Convolução

Integral ponderada (de acordo com $h(t)$) sobre a história passada do sinal de entrada onde,

- τ – tempo de excitação;
- t – tempo de resposta;
- $(t-\tau)$ – memória do sistema.

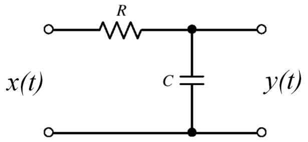
Notes

Exercícios

Exercício 2: Considere o sinal $g(t) = \dfrac{2a}{(2\pi t)^2 + a^2}$, $a > 0$.

Determine o valor de B tal que a faixa de frequências $[-B, B]$ contenha 99% da energia total de $g(t)$.

Exercício 3: Considere o circuito RC mostrado na figura. Determine $H(f)$ e $h(t)$.



Notes

Exercício 4

Considere o sinal $x(t) = 10\cos(2\pi f_1 t) + 5\cos(4\pi f_1 t)$ onde $f_1 = 2$kHz. Este sinal é enviado através de um sistema linear invariante no tempo com reposta impulsiva $h(t) = 1$ para $t \in [0{,}1\text{ms}]$ e zero fora desse intervalo. Seja $y(t)$ a saída do sistema linear. Determine:

(a) A transformada de Fourier do sinal $x(t)$;
(b) A potência média de $x(t)$;
(c) A função de transferência do sistema, esboçando a resposta de amplitude;
(d) O sinal de saída, $y(t)$;
(e) A potência média do sinal de saída $y(t)$.

Notes

Variáveis Aleatórias

- Variável aleatória, X: número que descreve o valor de uma amostra de um experimento aleatório;
- Função de distribuição cumulativa (cdf): $F_X(x) = \mathcal{P}[X \leq x]$;
- Função densidade de probabilidade (pdf): $f_X(x) = \dfrac{d}{dx} F_X(x)$;
- $\mathcal{P}[x_1 < X \leq x_2] = \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f_X(x)\,dx$;
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$.

Notes

Médias Estatísticas (Momentos)

Momentos de ordem n : $E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)dx$

- $n = 1 \rightarrow E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx = \mu_X$ (média)
- $n = 2 \rightarrow E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx$ (valor médio médio quadrático)

Momentos centrais de ordem n : $E[(X-\mu_X)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^n f_X(x)dx$

- $n = 1 \rightarrow E[(X-\mu_X)] = 0$
- $n = 2 \rightarrow E[(X-\mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^2 f_X(x)dx$ (variância, σ_X^2)
  - $\sigma_X^2 = E[X^2] - \mu_X^2$

Notes

Exemplo

Seja V uma variável aleatória contínua com CDF dada por:

$$F_V(v) = \begin{cases} 0, & v < 5, \\ (v+5)^2/144, & -5 \leq v < 7, \\ 1, & v \geq 7. \end{cases}$$

Determine:

a) $E[V]$;
b) σ_V^2;
c) $E[V^3]$.

Notes

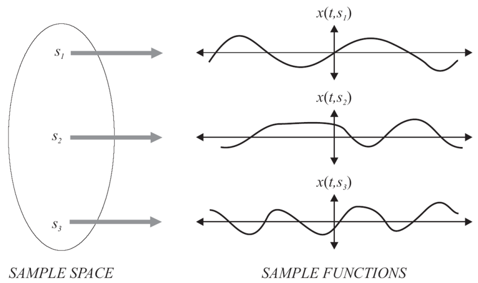
Duas Variáveis Aleatórias

- $F_{X,Y}(x,y) = \mathcal{P}[X \leq x, Y \leq y]$;
- $f_{X,Y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}$;
- $\mathcal{P}[x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2] = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f_{X,Y}(x,y)\, dxdy$;
- $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\, dxdy = 1.$

Notes

Processo Aleatório

Processo Aleatório (ou Estocástico), $X(t)$: Função aleatória do tempo para modelar formas de onda desconhecidas.



Notes

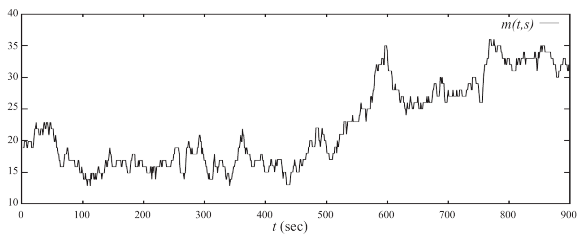
Processos Estocásticos – Definições

- **Processo Estocástico, $X(t)$:** Consiste de um experimento com uma medida de probabilidade $\mathcal{P}[\cdot]$ definida num espaço amostral S e uma função que atribui uma função do tempo $x(t,s)$ a cada realização (função amostra) s no espaço amostral do experimento.
- **Função amostra $x(t,s)$:** Função do tempo associada com o resultado s de um experimento (**sinal aleatório**).
- **Ensemble:** Conjunto de todas as possíveis funções do tempo que podem resultar de um experimento.

Notes

Exemplo

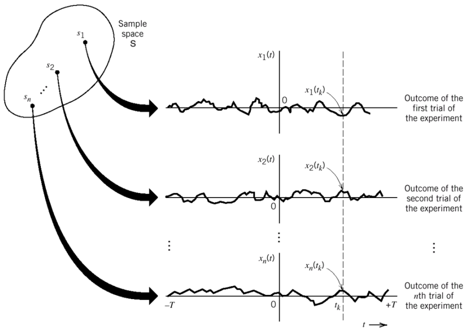
Registro, $M(t)$, do número de chamadas em andamento contabilizadas num comutador telefônico a cada segundo sobre um intervalo de 15 minutos:



Média de ensemble: Número médio de chamadas em andamento em, por exemplo, $t = 403$ segundos.
Média temporal: Número médio de chamadas em andamento durante um determinado intervalo de 15 minutos.

Notes

Processo Aleatório



Notes

Processo Aleatório

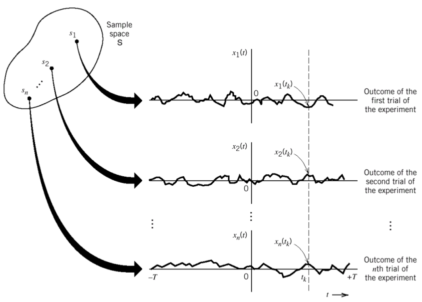
- Um processo aleatório, observado num instante de tempo é uma variável aleatória;
- Processo Aleatório: conjunto indexado de V.A. onde o índice é o tempo;
- Para uma V.A: o resultado de um experimento aleatório é associado a um número;
- Para um processo aleatório: o resultado de um experimento aleatório é associado a uma forma de onda que é uma função do tempo.

Notes

Processos Aleatórios: Caracterização Estatística

Função de Distribuição Conjunta:

$$F_{X(t_1)X(t_2)\cdots X(t_k)}(x_1, x_2, \dots, x_k)$$



Notes

Valor Esperado e Autocorrelação

- O **valor esperado** de um processo estocástico $X(t)$ é a função determinística do tempo

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X(t)}(x) dx$$

- A função de **autocorrelação** do processo estocástico $X(t)$ é

$$R_X(t_1,t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1,x_2)\, dx_1 dx_2$$

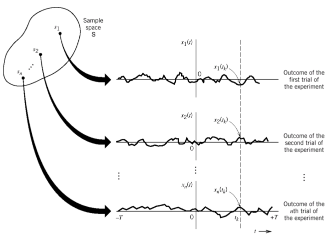
Notes

Exercício 5

Dado um processo aleatório $X(t)$ com valor esperado $\mu_X(t)$ e autocorrelação $R_X(t_1,t_2)$ considere a observação de $Y(t) = X(t) + N(t)$ onde $N(t)$ é um processo aleatório de ruído com $\mu_N(t) = 0$ e autocorrelação $R_N(t_1,t_2)$. Supondo que o processo de ruído é independente de $X(t)$, determine o valor esperado e a autocorrelação de $Y(t)$.

Notes

Processos Estacionários

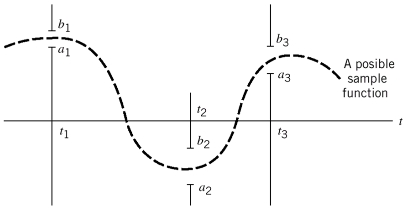


Processo Aleatório Estacionário (no sentido estrito): A sua caracterização estatística é independente do tempo em que a observação do processo é iniciada:

$$F_{X(t_1+\tau)X(t_2+\tau)\cdots X(t_k+\tau)}(x_1,x_2,\ldots,x_k) = F_{X(t_1)X(t_2)\cdots X(t_k)}(x_1,x_2,\ldots,x_k)$$

Notes

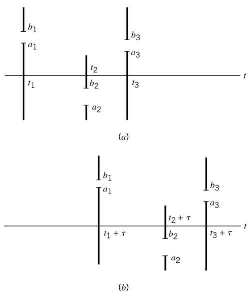
Processo Aleatório Estacionário



Questão: Avaliar a probabilidade de obtermos uma função amostra $x(t)$ de um processo aleatório $X(t)$ que 'passe' através deste conjunto de janelas de amplitude.

Notes

Processo Aleatório Estacionário

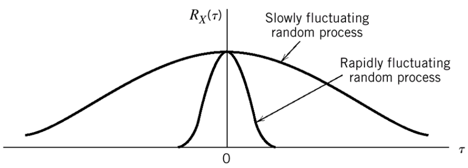


Notes

Propriedades de Processos Estacionários

- Se $X(t)$ é um processo aleatório estacionário, então $Y(t) = aX(t) + b$ é também um processo estacionário;
- $\mu_X(t) = \mu_X$;
- $R_X(t_1,t_2) = R_X(t_2 - t_1) = R_X(\tau)$, onde $\tau = t_2 - t_1$;
- $X(t)$ é um processo estocástico estacionário no sentido amplo se para todo t,

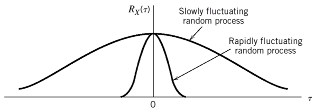
$$E[X(t)] = \mu_X \text{ e } R_X(t_1,t_2) = R_X(\tau).$$



Notes

Propriedades da Função de Autocorrelação

1. $R_X(0) = E[X^2(t)]$
2. $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$
3. $|R_X(\tau)| \leq R_X(0)$

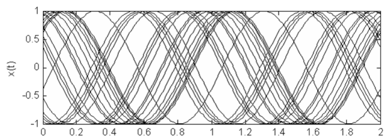


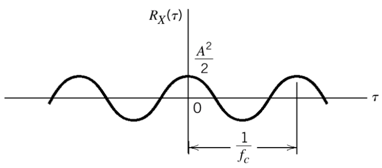
$R_X(\tau) \longrightarrow$ descreve a interdependência de duas variáveis aleatórias obtidas observando-se um processo aleatório $X(t)$ em instantes de tempo τ segundos separados.

Notes

Exemplo: Onda Senoidal com Fase Aleatória

Considere o processo aleatório $X(t) = A\cos(2\pi f_c t + \Theta)$, onde Θ é uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo $[0, 2\pi]$. Determine o valor esperado e a autocorrelação deste processo.





Notes

Processos Ergódicos

Médias Temporais de Funções Amostra:

- $\overline{X}(T) = \dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{T} x(t)dt$
- $\overline{X^2}(T) = \dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{T} x^2(t)dt$
- $R_X(\tau, T) = \dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{T} x(t+\tau)x(t)dt$

O processo $X(t)$ é **ergódico para a média** se,

- $\lim_{T\to\infty} \overline{X}(T) = \mu_X$
- $\lim_{T\to\infty} \mathrm{Var}[\overline{X}(T)] = 0$

Notes

Processos Ergódicos

O processo $X(t)$ é **ergódico na função de autocorrelação** se,

- $\lim_{T\to\infty} R_X(\tau,T) = R_X(\tau)$
- $\lim_{T\to\infty} \mathrm{Var}[R_X(\tau,T)] = 0$

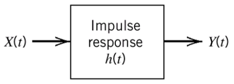
Exemplo: Considere o processo $X(t) = A\cos(\omega_0 t + \Theta)$, onde Θ é uma variável aleatória com densidade uniforme no intervalo $[0,\ 2\pi]$, e A é uma V. A. discreta, sendo $\mathcal{P}[A=1] = \mathcal{P}[A=2] = \frac{1}{2}$.

a) Calcule $E[X(t)]$, $R_X(t_1{,}t_2)$, e $\sigma_X^2(t)$.

b) Esse processo é ergódico na média? E na autocorrelação?

Notes

Transmissão de um Sinal Aleatório através de um Sistema Linear



- $Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)X(t-u)\,du = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-u)X(u)\,du$
- $E[Y(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(u)X(t-u)\,du\right] = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)E[X(t-u)]\,du$

Se $X(t) \to$ estacionário no sentido amplo:

- $\mu_Y = E[Y(t)] = \mu_X \int_{-\infty}^{\infty} h(u)\,du = \mu_X H(0)$
- $R_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) \int_{-\infty}^{\infty} h(v)R_X(\tau+u-v)dvdu$

Notes

Densidade Espectral de Potência

Seja $X_T(f) = \int_{-T}^{T} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$ a transformada de Fourier da versão truncada de uma função amostra $x(t)$ de um processo aleatório estacionário no sentido amplo $X(t)$.

Densidade Espectral de Potência:

$$S_X(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E\left[|X_T(f)|^2\right] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} E\left[\left|\int_{-T}^{T} x(t)e^{-j2\pi ft}dt\right|^2\right]$$

Teorema de *Wiener-Khintchine*

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau, \quad R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)e^{j2\pi f\tau}df$$

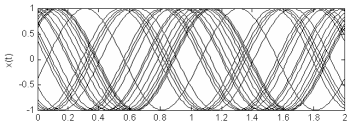
Notes

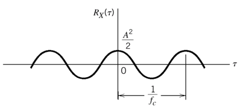
Propriedades de $S_X(f)$

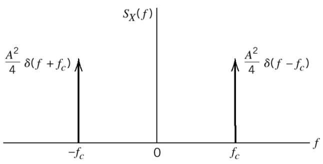
1. $S_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau)\, d\tau$
2. $E\left[X^2(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)\, df$
3. $S_X(f) \geq 0$
4. $S_X(-f) = S_X(f)$ se o processo aleatório for real

Notes

Exemplo: Onda senoidal com fase aleatória



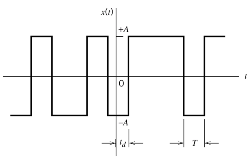


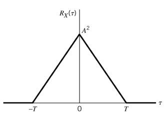


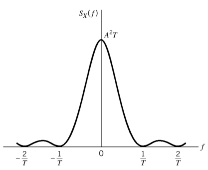
$R_X(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_c \tau)$ $S_X(f) = \frac{A^2}{4}\left[\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)\right]$

Notes

Exemplo: Sequência Binária Aleatória







$$R_X(\tau) = \begin{cases} A^2\left[1 - \frac{|\tau|}{T}\right], & |\tau| < T \\ 0, & |\tau| \geq T \end{cases}$$

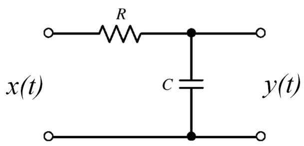
$$S_X(f) = A^2 T \,\mathrm{sinc}^2(fT)$$

Notes

Processamento de Sinais Aleatórios no Domínio da Frequência

$$S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f)$$

Exercício 6: Uma função amostra de processo aleatório estacionário no sentido amplo $X(t)$ com função de autocorrelação $R_X(\tau) = e^{-b|\tau|}$ é o sinal de entrada de um filtro RC passa-baixas. Supondo $b > 0$ e $b \neq 1$, determine $S_Y(f)$ e $R_Y(\tau)$. Determine a potência média do processo de saída.



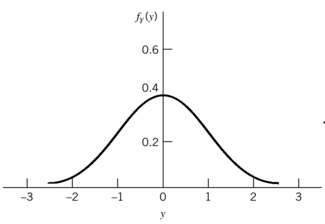
Notes

Processos Gaussianos

1. $X(t)$ é um processo Gaussiano se $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X(t_1) & \dots & X(t_k) \end{bmatrix}'$ é um vetor Gaussiano.
2. Se $X(t)$ é um processo Gaussiano estacionário no sentido amplo, então $X(t)$ é um processo Gaussiano estacionário.
3. Se as V.A.s $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ de um processo Gaussiano não são correlacionadas, ou seja, se
$$E\left[\left(X(t_k) - \mu_{X(t_k)}\right)\left(X(t_i) - \mu_{X(t_i)}\right)\right] = 0, \qquad i \neq k$$
então essas V.A.s são estatisticamente independentes.
4. Seja $X(t)$ um processo Gaussiano na entrada de um sistema linear invariante no tempo, então o processo na saída do sistema continua sendo Gaussiano.

Notes

Processos Gaussianos



$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} \exp\left[-\frac{(y-\mu_Y)^2}{2{\sigma_Y}^2}\right]$$

Teorema do Limite Central

O efeito soma devido a um grande número de causas independentes tende a um processo Gaussiano:

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \approx \text{Gaussiana para } n \to \infty$$

Notes

Ruído

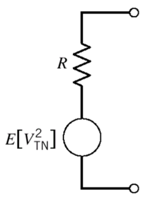
Ruído

Sinais indesejáveis que perturbam a transmissão e o processamento de sinais no receptor e que são incontroláveis.

- Fontes externas: ruído atmosférico, galáctico e ruído provocado pelo homem;
- Fontes internas: flutuações espontâneas de corrente ou tensão em circuitos elétricos;
  - Ruído Impulsivo: Resulta da natureza discreta da corrente;
  - Ruído Térmico: Resulta do movimento aleatório de elétrons em um condutor.

Notes

Modelo Equivalente de Ruído Térmico



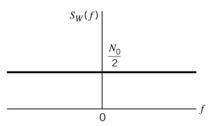
$E[V_{TN}^2] = 4kTR\Delta f$(Volts)^2

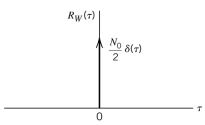
$k-$ Constante de Boltzmann
($k = 1{,}38 \times 10^{-23}$ Joules/K)
$T-$ Temperatura em K
$R-$ Resistência em Ohms
$\Delta f-$ Largura de banda em Hz

Notes

Ruído Branco

Ruído Branco: Forma idealizada cuja densidade espectral de potência é independente da frequência de operação





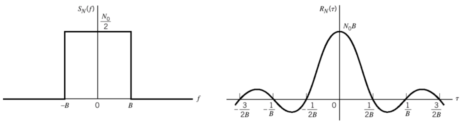
Temperatura equivalente de ruído do receptor $(N_0 = kT_e)$

Temperatura na qual um resistor ruidoso tem de ser mantido a fim de que, conectando-se o resistor à entrada de uma versão sem ruído, ele produza a mesma potência disponível de ruído na saída do sistema que a produzida por todas as fontes de ruído do sistema real.

Figura de Ruído: $F = \dfrac{T + T_e}{T}$ (medida com entrada casada e com a fonte de ruído à temperatura T).

Notes

Exemplo: Ruído na saída de um filtro passa-baixas ideal

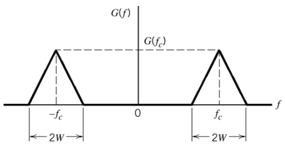


$$S_N(f) = \begin{cases} \frac{N_0}{2}, & -B < f < B \\ 0, & |f| > B \end{cases} \qquad R_N(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} e^{j2\pi f\tau} df = N_0 B \operatorname{sinc}(2B\tau)$$

Notes

Sinais de Banda Estreita e Envoltória Complexa

$g(t) \rightarrow$ sinal de banda estreita ou sinal passa-faixa,



$g(t) = \Re[\tilde{g}(t)\exp(j2\pi f_c t)]$, onde $\tilde{g}(t) \rightarrow$ Envoltória Complexa de $g(t)$

$\tilde{g}(t) = g_I(t) + jg_Q(t) \Rightarrow g(t) = g_I(t)\cos(2\pi f_c t) - g_Q(t)\sin(2\pi f_c t)$ onde,

$g_I(t)$: componente em fase
$g_Q(t)$: componente em quadratura
} Sinais passa-baixas de valor real.

Notes

Transformada de Hilbert

$g(t) \rightleftharpoons \hat{g}(t)$

$$\hat{g}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{t-\tau} d\tau$$

$$g(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{g}(\tau)}{t-\tau} d\tau$$

Transformada de Hilbert: Desloca os ângulos de fase de todos os componentes de frequência de um determinado sinal em ± 90 graus.

Notar que $\hat{g}(t)$ é a convolução de $g(t)$ com a função $\frac{1}{\pi t}$.

Sabendo que $\frac{1}{\pi t} \rightleftharpoons -j\text{sgn}(f)$,

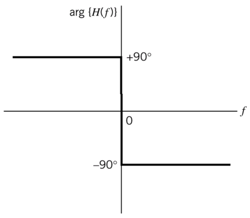
$$\Rightarrow \hat{G}(f) = -j\text{sgn}(f)G(f).$$

Notes

Característica de Fase de um Transformador de Hilbert

$\hat{G}(f) = -j\text{sgn}(f)G(f) \Rightarrow$ pode-se obter $\hat{g}(t)$ fazendo-se passar $g(t)$ por um sistema com função de transferência

$$H(f) = -j\text{sgn}(f):$$



Notes

Algumas propriedades da Trasformada de Hilbert

1. $g(t)$ (real) e $\hat{g}(t)$ têm o mesmo espectro de magnitude;
2. Se $\hat{g}(t)$ é a T.H de $g(t)$, então a T.H de $\hat{g}(t)$ será $-g(t)$;
3. $g(t)$ e $\hat{g}(t)$ são ortogonais ao longo do intervalo $(-\infty,\infty)$,

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\hat{g}(t)\,dt = 0.$$

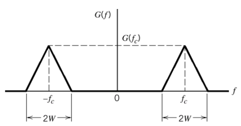
Notes

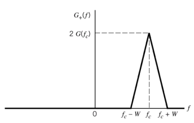
Envoltória Complexa

Definir: $g_+(t) = g(t) + j\hat{g}(t) \rightarrow$ pré-envoltória ou sinal analítico.

No domínio da frequência: $G_+(f) = G(f) + \text{sgn}(f)G(f)$,

$$\Rightarrow G_+(f) = \begin{cases} 2G(f), & 0f > 0, \\ G(0), & f = 0, \\ 0, & f < 0. \end{cases}$$





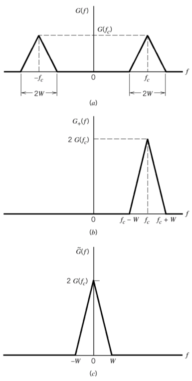
Pré-envoltória na forma polar:

$$g_+(t) = \tilde{g}(t)\exp(j2\pi f_c t) \Rightarrow \tilde{g}(t) = g_+(t)\exp(-j2\pi f_c t)$$

Lembrando que: $x(t)\exp(j2\pi f_c t) \rightleftharpoons X(f - f_c)$,

Notes

Envoltória Complexa



(a) Espectro de magnitude de $g(t)$

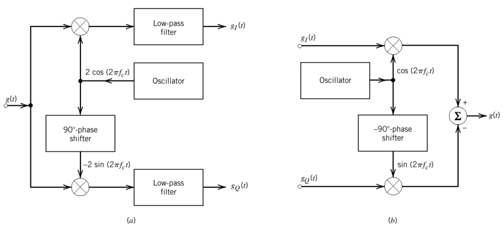
(b) Espectro de magnitude da pré-envoltória $g_+(t)$

(c) Espectro de magnitude da envoltória complexa $\tilde{g}(t)$

Notes

Representação Canônica de Sinais Passa-Faixa

$$\begin{aligned} g(t) &= \Re[\tilde{g}(t)\exp(j2\pi f_c t)] \\ &= \Re\left\{[g_I(t) + jg_Q(t)]\exp(j2\pi f_c t)\right\} \\ &= \Re\left\{[g_I(t) + jg_Q(t)][\cos(2\pi f_c t) + j\sin(2\pi f_c t)]\right\} \\ &= g_I(t)\cos(2\pi f_c t) - g_Q(t)\sin(2\pi f_c t). \end{aligned}$$



Notes

Formas Lineares de Modulação

$$\tilde{g}(t) = g_I(t) + jg_Q(t) = a(t)\exp[\phi(t)],$$

$a(t)$ e $\phi(t) \to$ funções passa-baixas de valor real.

$$\begin{aligned} \Rightarrow g(t) &= \Re[\tilde{g}(t)\exp(j2\pi f_c t)] = \Re[a(t)\exp(j[2\pi f_c t + \phi(t)])] \\ &= a(t)\cos[2\pi f_c t + \phi(t)]. \end{aligned}$$

Modulação de Amplitude: Informação transportada pela envoltória da portadora de RF:

$$a(t) = |\tilde{g}(t)| = \sqrt{g_I^2(t) + g_Q^2(t)}.$$

Modulação de Fase: Informação transportada pela fase da portadora de RF:

$$\phi(t) = \arctan\left[\frac{g_Q(t)}{g_I(t)}\right] = \Im(\ln[\tilde{g}(t)]).$$

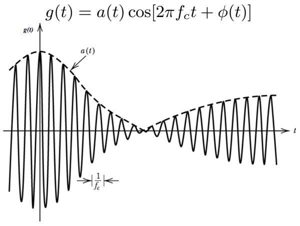
Modulação de Frequência: Informação transportada pela diferença entre o valor da frequência instantânea da portadora de RF modulada e o valor da frequência portadora, f_c:

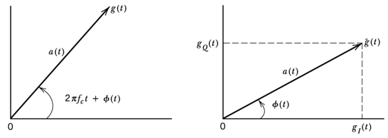
$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\arctan\left[\frac{g_Q(t)}{g_I(t)}\right]\right).$$

Notes

Sinais Passa-Faixas e Envoltória Complexa

$$g(t) = a(t)\cos[2\pi f_c t + \phi(t)]$$



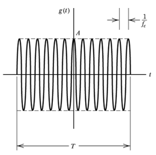


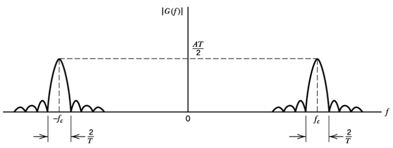
$$g_I(t) = a(t)\cos\phi(t), \quad g_Q(t) = a(t)\sin\phi(t).$$

Notes

Exemplo: Pulso de RF

$$g(t) = A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\cos(2\pi f_c t)$$



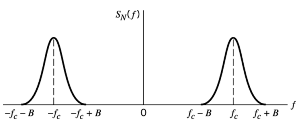


$$g(t) = \Re[\tilde{g}(t)\exp(j2\pi f_c t)] = \Re\left[A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\exp(j2\pi f_c t)\right]$$

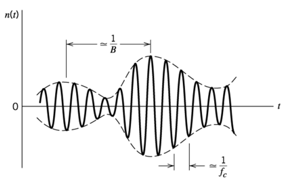
$$\tilde{g}(t) = A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right), \quad a(t) = |\tilde{g}(t)| = A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

Notes

Ruído de Banda Estreita



(a)

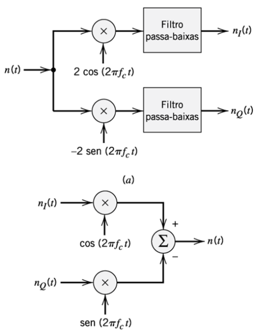


(b)

$$n(t) = n_I(t)\cos(2\pi f_c t) - n_Q(t)\sin(2\pi f_c t)$$

Notes

Ruído de Banda Estreita: Componentes em Fase e Quadratura



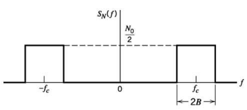
Notes

Propriedades de $n_I(t)$ e $n_Q(t)$

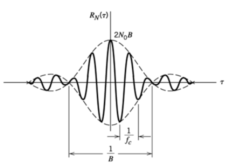
1. $n_I(t)$ e $n_Q(t)$ têm valor médio igual a zero.
2. Se $n(t)$ for Gaussiano, então $n_I(t)$ e $n_Q(t)$ serão conjuntamente Gaussianas.
3. Se $n(t)$ for estacionário, então $n_I(t)$ e $n_Q(t)$ serão conjuntamente estacionárias.
4. $n_I(t)$ e $n_Q(t)$ têm a mesma densidade espectral de potência dada por
$$S_{N_I}(f) = S_{N_Q}(f)\begin{cases} S_N(f-f_c) + S_N(f+f_c), & -B < f < B \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$
5. $n_I(t)$ e $n_Q(t)$ têm a mesma variância que o ruído de banda estreita $n(t)$.
6. Se $n(t)$ for Gaussiano, e $S_N(f)$ for simétrica em relação à frequência f_c, então $n_I(t)$ e $n_Q(t)$ serão estatisticamente independentes.

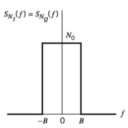
Notes

Exemplo: Ruído Branco Processado por um Filtro Passa-Faixa Ideal



$$\begin{aligned} R_N(\tau) &= \int_{-f_c-B}^{-f_c+B} \frac{N_0}{2}\exp(j2\pi f\tau)df + \int_{f_c-B}^{f_c+B} \frac{N_0}{2}\exp(j2\pi f\tau)df \\ &= N_0 B \text{sinc}(2B\tau)[\exp(-j2\pi f_c\tau) + \exp(j2\pi f_c\tau)] \\ &= 2N_0 B \text{sinc}(2B\tau)\cos(2\pi f_c\tau). \end{aligned}$$





$$R_{N_I}(\tau) = R_{N_Q}(\tau) = 2N_0 B \text{sinc}(2B\tau)$$

Notes

Ruído de Banda Estreita: Envoltória e Fase

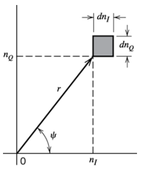
$$n(t) = n_I(t)\cos(2\pi f_c t) - n_Q(t)\sin(2\pi f_c t) = r(t)\cos[2\pi f_c t + \psi(t)]$$

onde,

$$r(t) = \sqrt{n_I^2(t) + n_Q^2(t)}, \quad \psi(t) = \tan^{-1}\left[\frac{n_Q(t)}{n_I(t)}\right]$$

$n_I(t)$ e $n_Q(t)$ num instante $t \rightarrow$ amostras de V.A.s Gaussianas independentes, N_I e N_Q, de média zero, variância σ^2 e pdf conjunta dada por:

$$f_{N_I,N_Q}(n_I,n_Q) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{n_I^2+n_Q^2}{2\sigma^2}\right)$$



A probabilidade de N_I e N_Q situarem-se conjuntamente dentro da área sobreada é:

$$f_{N_I,N_Q}(n_I,n_Q)dn_I dn_Q = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{n_I^2+n_Q^2}{2\sigma^2}\right)dn_I dn_Q$$

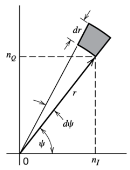
Notes

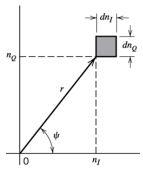
Ruído de Banda Estreita: Envoltória e Fase

Definindo a transformação,

$$n_I = r\cos\psi, \quad n_Q = r\sin\psi$$

No limite $\rightarrow dn_I dn_Q = r dr d\psi$





Sejam agora R e Ψ as V.A.s resultantes da observação (no mesmo tempo t) dos processos representados $r(t)$ e $\psi(t)$. Então, a probabilidade de R e Ψ situarem-se conjuntamente dentro da área sobreada é:

$$\frac{r}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)dr d\psi$$

$$\Rightarrow f_{R,\Psi}(r,\psi) = \frac{r}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$$

Notes

Ruído de Banda Estreita: Envoltória e Fase

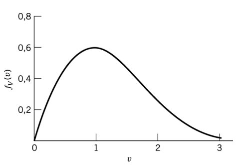
$$f_{R,\Psi}(r,\psi) = \frac{r}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$f_\Psi(\psi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 \le \psi \le 2\pi, \\ 0, & \text{fora} \end{cases} \quad , \quad f_R(r) = \begin{cases} \frac{r}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), & r \ge 0, \\ 0, & \text{fora} \end{cases}$$

Sejam

$$v = \frac{r}{\sigma}, \quad f_V(v) = \sigma f_R(r)$$

$$\Rightarrow f_V(v) = \begin{cases} v\exp\left(-\frac{v^2}{2}\right), & v \ge 0, \\ 0, & \text{fora.} \end{cases}$$



Distribuição de Rayleigh normalizada

Notes