TE055

Lugar das Raízes

Profª Juliana L. M. Iamamura

Lugar das raízes

- Método gráfico que representa o lugar das raízes no plano s;
- Princípio: relação entre os polos da FTMF e o ganho e os polos e zeros da FTMA;
- Permite verificar a sensibilidade das raízes à variação de um parâmetro do sistema;
- Permite obter a solução exata e detalhada em regimes transitório e permanente;
- Se não há necessidade de uma solução exata, o LGR permite encontrar soluções aproximadas facilmente.

Regras de construção ($0 \leq K < \infty$)

1. Número de ramos = ordem da equação característica;
2. Os polos de MA definem o começo do LGR (K = 0);

$$K = \frac{|s_t||s_t + p_2||s_t + p_3|}{|s_t + z_1||s_t + z_2|} \qquad s_t = 0, \quad s_t = -p_2, \quad s_t = -p_3$$

3. Os zeros de MA definem o fim do LGR ($K \rightarrow \infty$);

$$K = \frac{|s_t||s_t + p_2||s_t + p_3|}{|s_t + z_1||s_t + z_2|} \qquad s_t = -z_1, \quad s_t = -z_2$$

Regras de construção ($0 \leq K < \infty$)

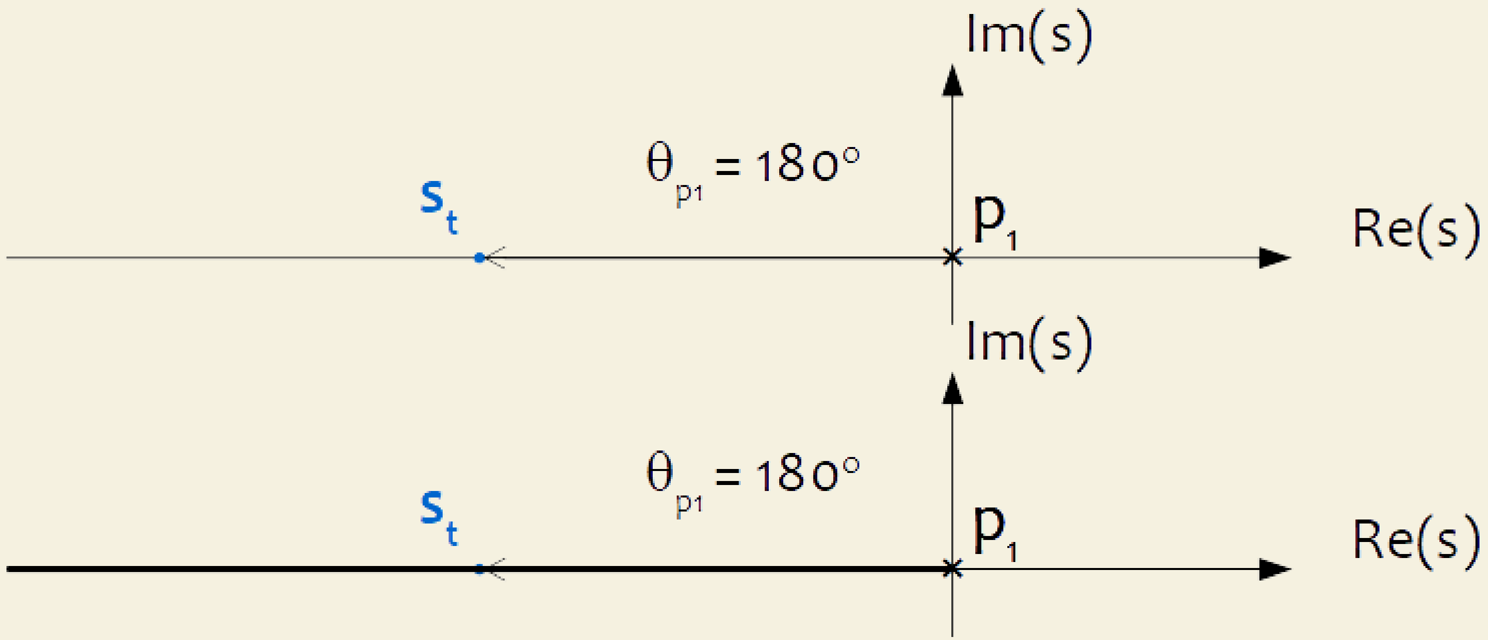
4. Nº de zeros no infinito = nº de polos – nº de zeros

$$m_\infty = n - m$$

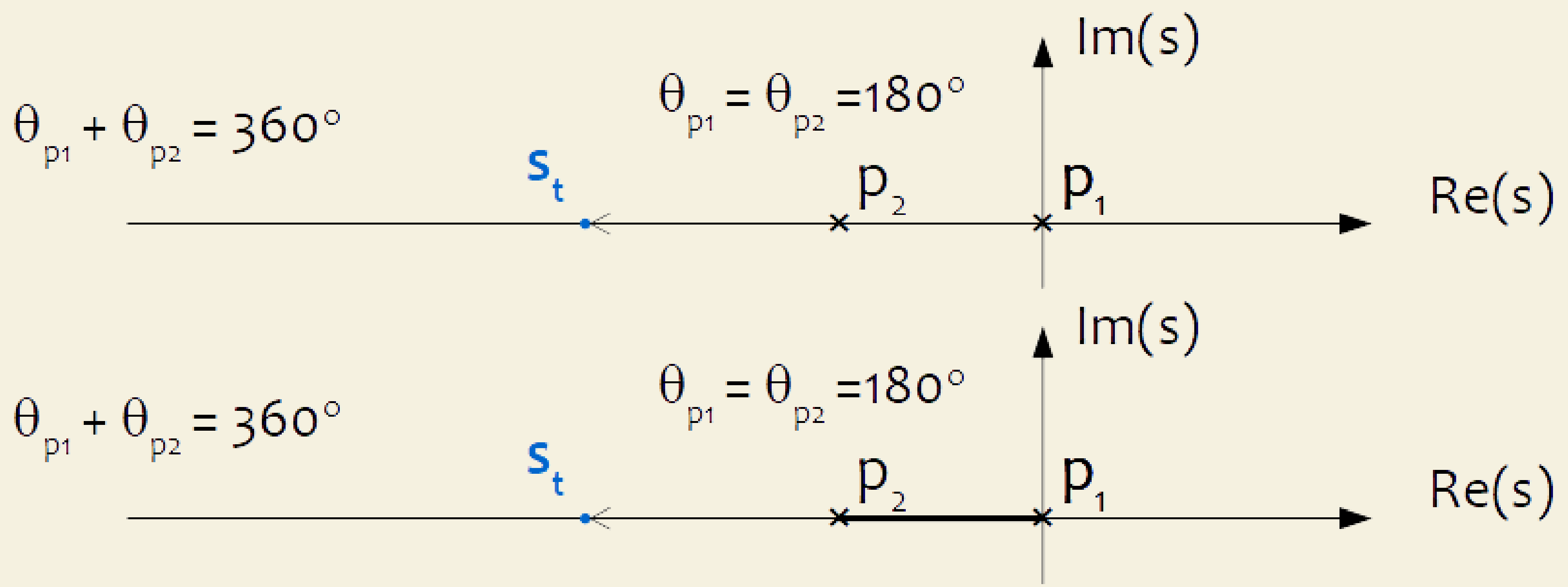
   m_∞ = nº de assíntotas

5. Se o nº de polos e zeros no eixo real, à direita do ponto investigado, for ímpar, esta parte do eixo real pertence ao LGR (condição de ângulo)

Regras de construção ($0 \leq K < \infty$)



Regras de construção ($0 \leq K < \infty$)



Regras de construção (0 ≤ K < ∞)

6. Intersecção das assíntotas com o eixo real:

$$\sigma_0 = \frac{\sum p_k - \sum z_j}{n - m}$$

7. Ângulos das assíntotas:

$$\phi = \frac{\pi(1+2i)}{n-m} \qquad i = 0, 1, 2, \dots, n-m-1$$

Regras de construção ($0 \leq K < \infty$)

8. Pontos de separação:

- saída de um ramo do eixo real, se o ponto estiver situado entre dois polos, ou entrada no eixo real, se o ponto estiver situado entre dois zeros.

Correspondem aos mínimos ou máximos da função:

$$-G(s)=\frac{1}{K}$$

Logo,

$$\boxed{\frac{d\left(\frac{-1}{G(s)}\right)}{ds}=0}$$

Regras de construção ($0 \leq K < \infty$)

9. Ângulo de partida dos ramos em raízes complexas de multiplicidade q :
   - Aplica-se a condição de ângulo:
   - Partida de polos:

$$q\varphi_i = \sum\theta_z - \sum\theta_p - 180^\circ - 360^\circ(i-1), \qquad i = 1,2,\dots$$

   - Chegada de zeros:

$$q\varphi_i = \sum\theta_p - \sum\theta_z + 180^\circ + 360^\circ(i-1), \qquad i = 1,2,\dots$$

10. Intersecção com o eixo imaginário:
    - Aplica-se o critério de Routh

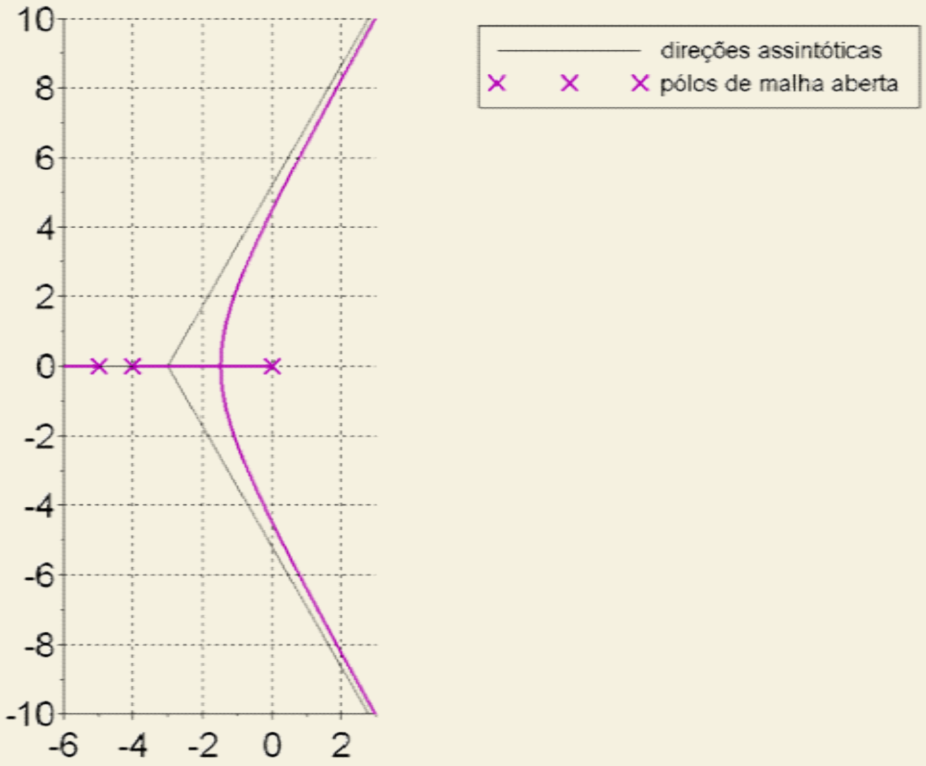
Regras de construção ($-\infty < K \leq 0$)

- O LGR parte dos zeros e chega nos polos de malha aberta;
- A parte sobre o eixo real que pertence ao LGR fica à esquerda de um nº par de polos e zeros finitos;
- Os ângulos das assíntotas são dados por:

$$\phi = \frac{\pi(2i)}{n-m} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n-m-1$$

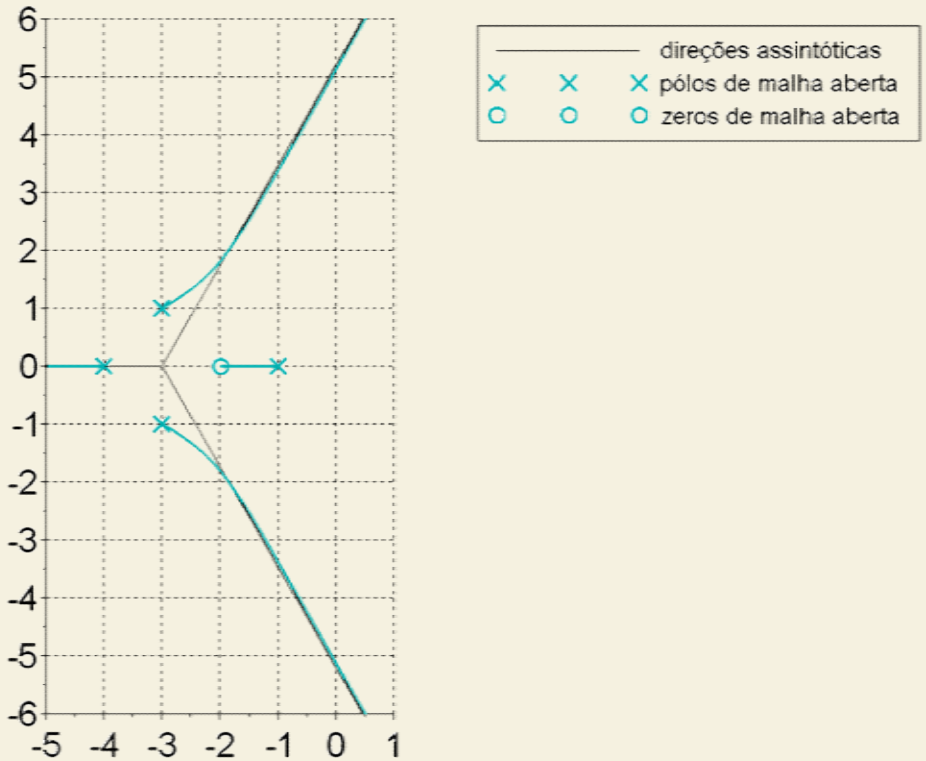
Exemplo

$$G(s) = \frac{1}{s(s+4)(s+5)}$$



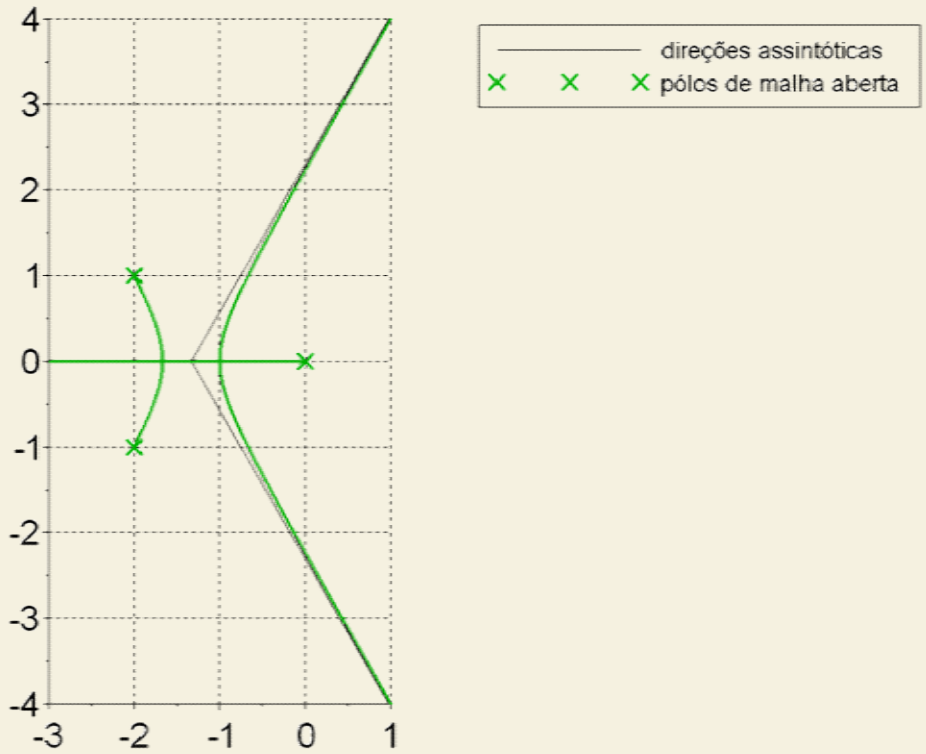
Exemplo

$$G(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+4)(s+3+j)(s+3-j)}$$



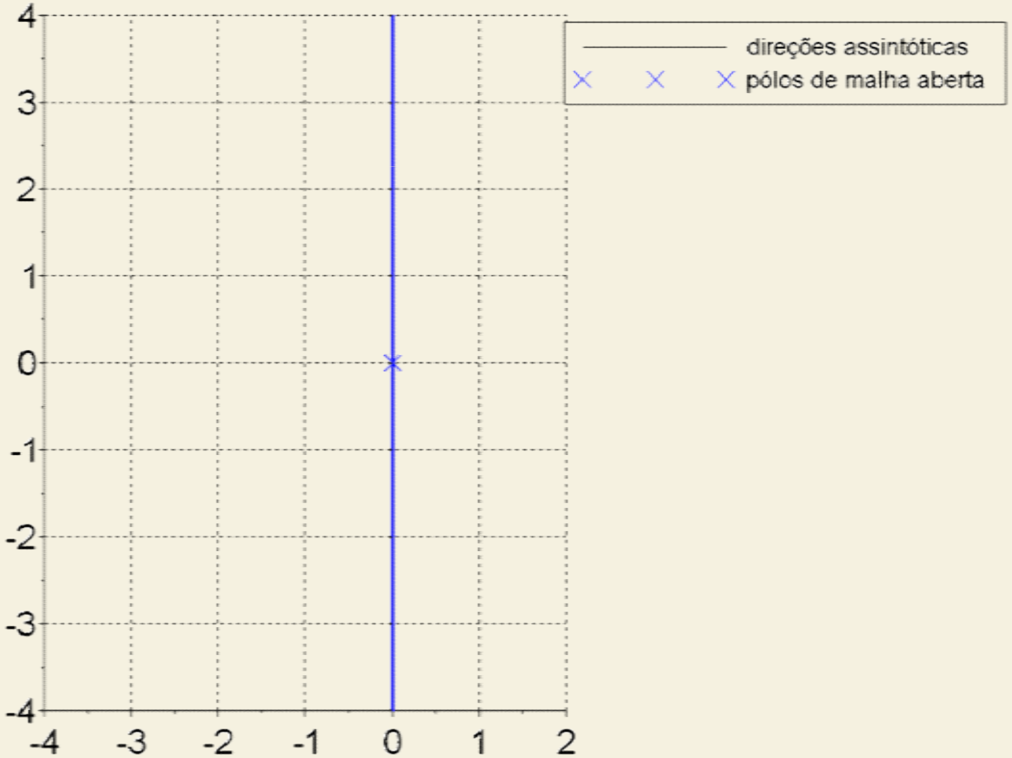
Exemplo

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4s + 5)}$$



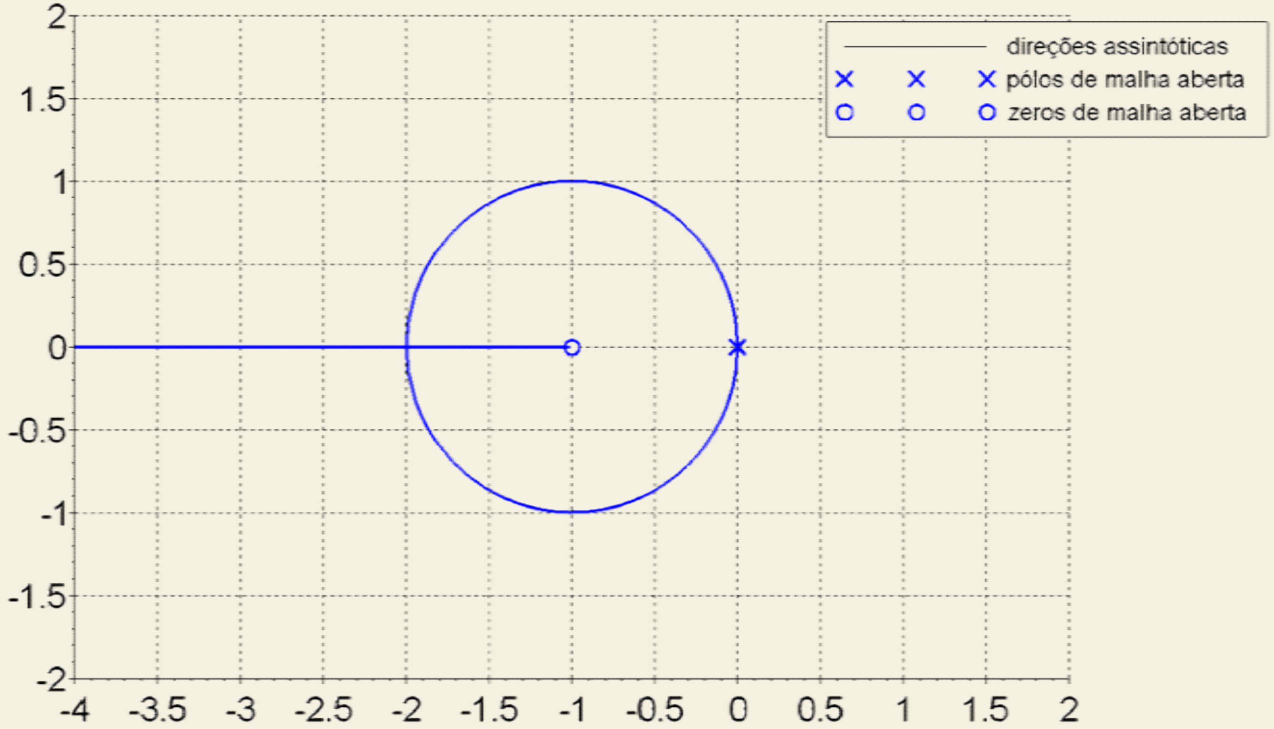
Exemplo

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$



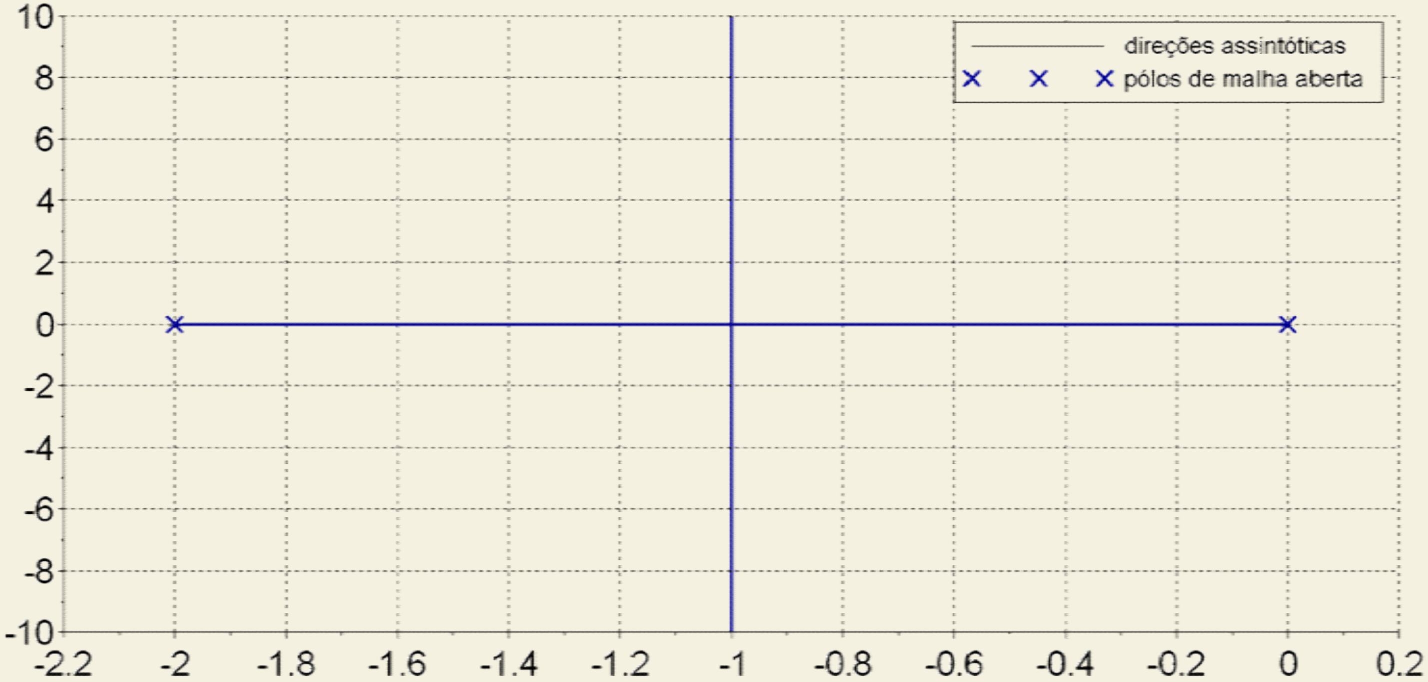
Exemplo

Com o acréscimo de um controlador PD: $G(s) = \frac{s+1}{s^2}$



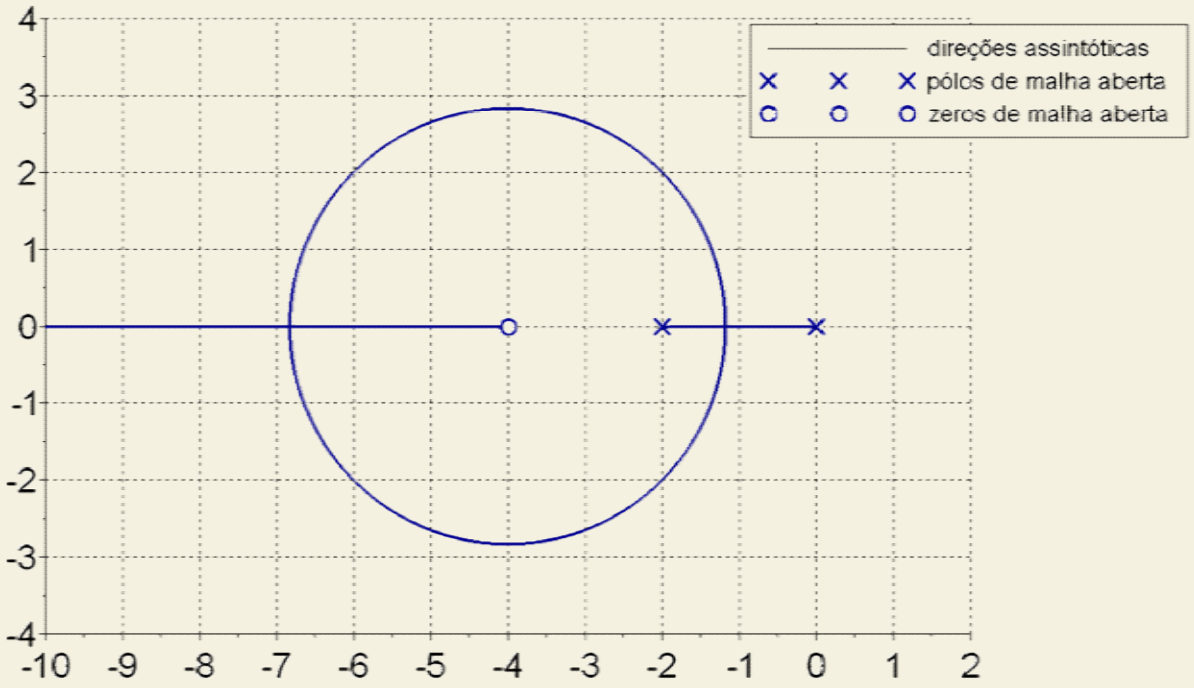
Efeito da adição de polos e zeros no LR

Consideremos inicialmente o sistema com realimentação unitária definido por $G(s) = \dfrac{1}{s(s+2)}$



Efeito da adição de polos e zeros no LR

Acrescentemos um zero em -4: $G(s) = \dfrac{s+4}{s(s+2)}$

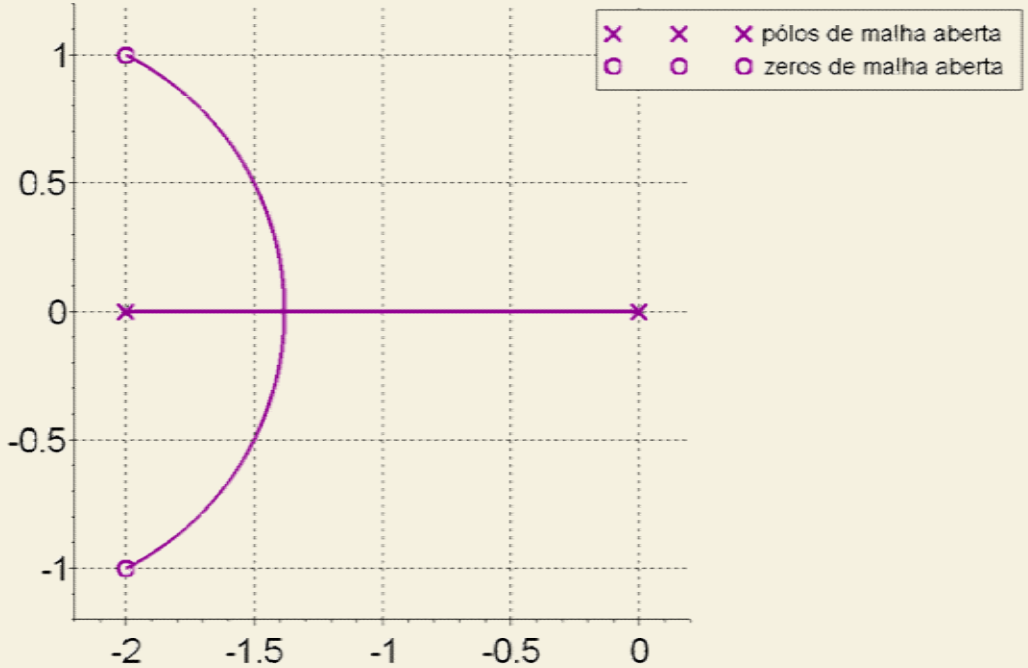


A adição de zeros tende a melhorar a estabilidade do sistema, deslocando o lugar das raízes mais para a esquerda do plano s.

Efeito da adição de polos e zeros no LR

Acrescentemos um par de zeros complexos conjugados:

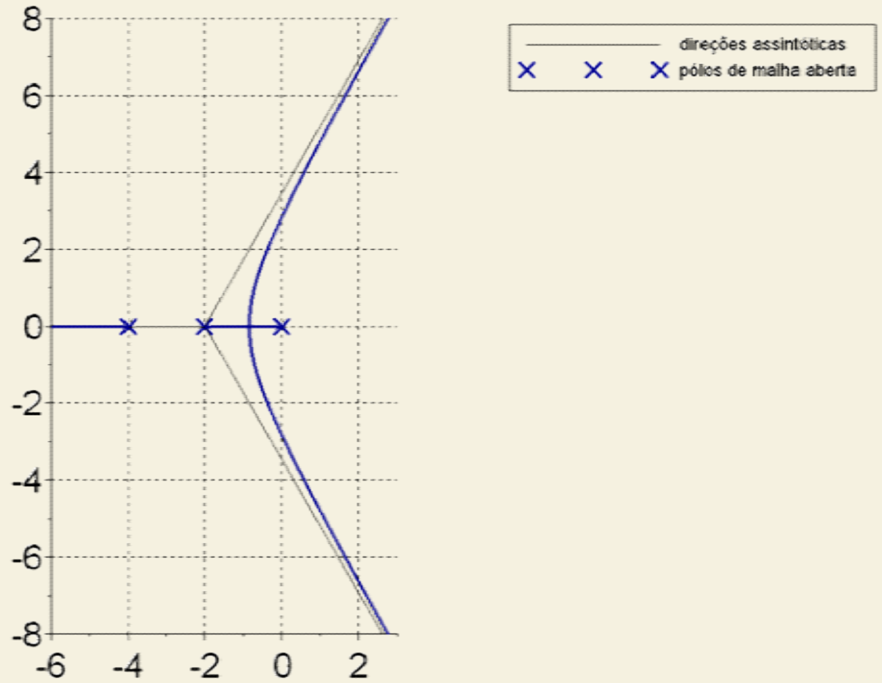
$$G(s) = \frac{(s^2 + 4s + 5)}{s(s+2)}$$



Efeito da adição de polos e zeros no LR

Acrescentemos um polo em -4:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+4)}$$

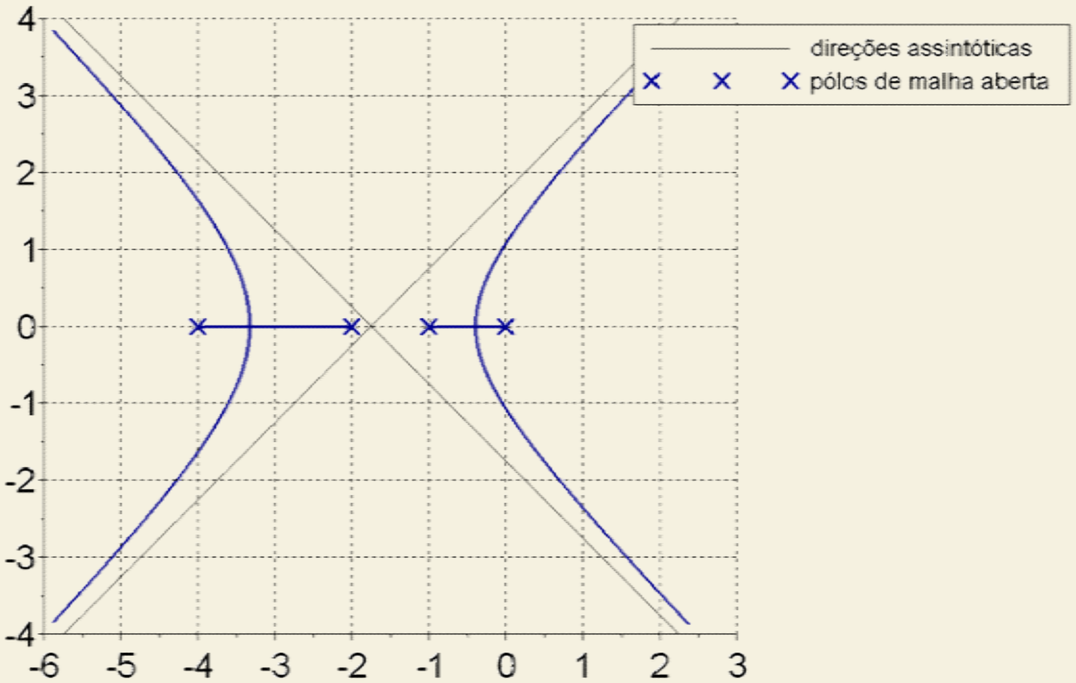


A adição de polos tende a desestabilizar o sistema, deslocando o lugar das raízes mais para a direita do plano s.

Efeito da adição de polos e zeros no LR

Acrescentemos um polo em -4 e um em -1:

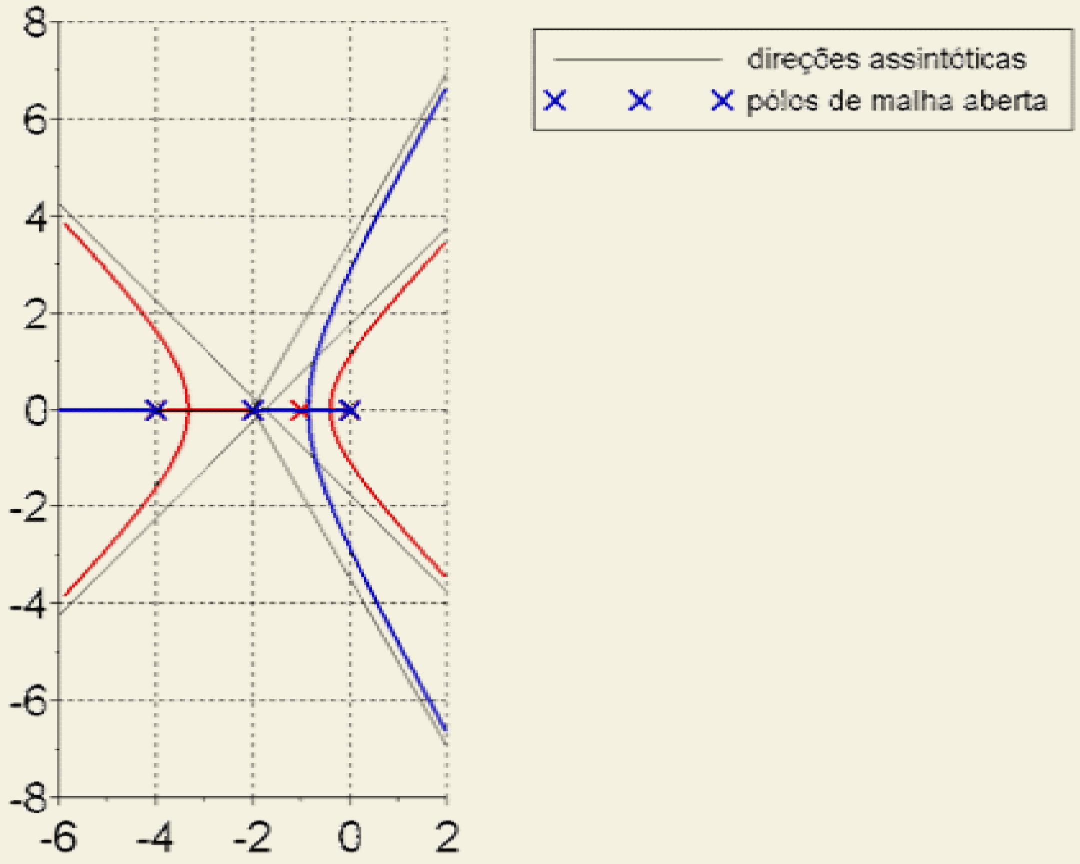
$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)(s+4)}$$



Efeito da adição de polos e zeros no LR

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+4)}$$

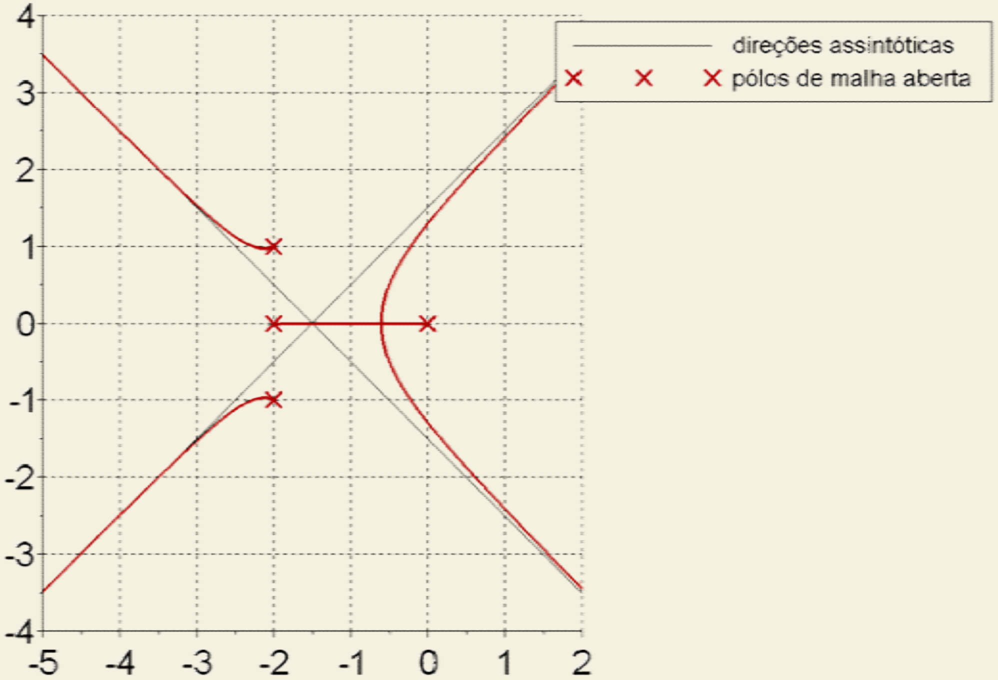
$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)(s+4)}$$



Efeito da adição de polos e zeros no LR

Acrescentemos par de polos complexos conjugados:

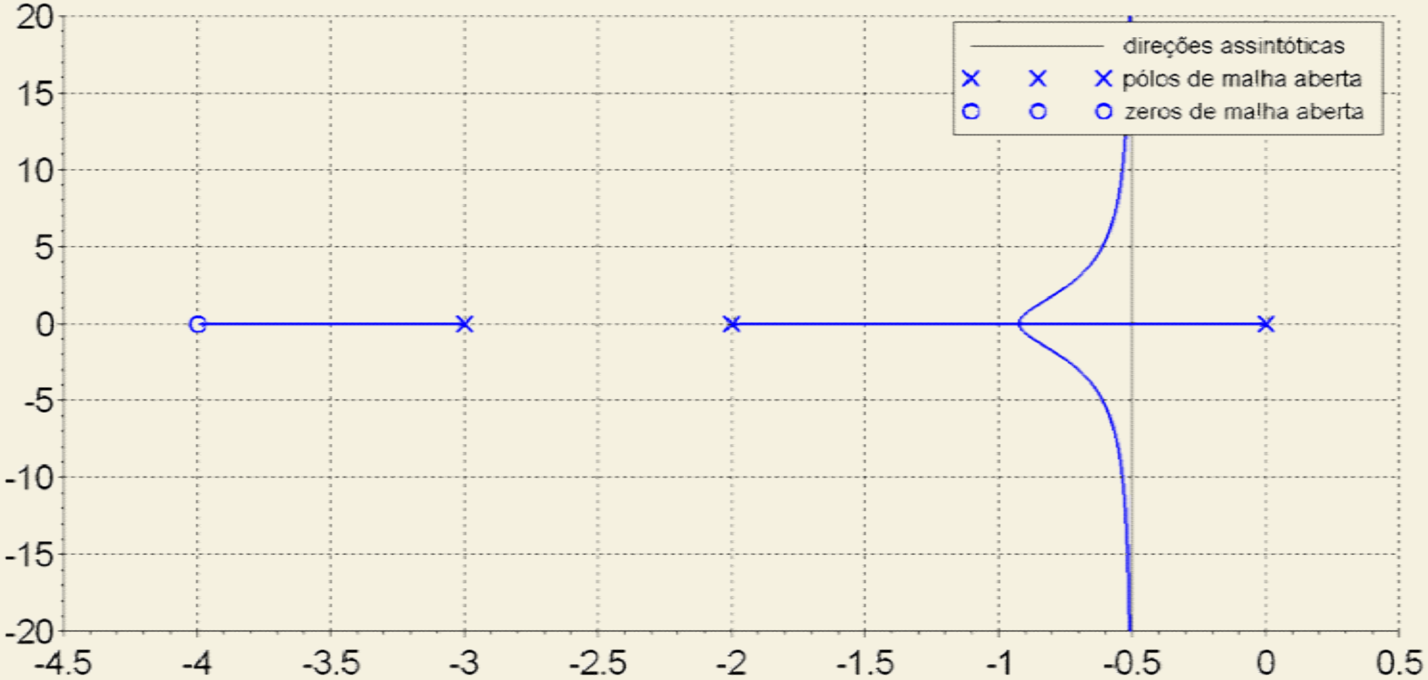
$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)(s^2+4s+5)}$$



Efeito da adição de polos e zeros no LR

Acrescentemos zero em -4 e um polo em -3:

$$G(s) = \frac{(s+4)}{s(s+2)(s+3)}$$



Lugar das raízes

Condição de ângulo:

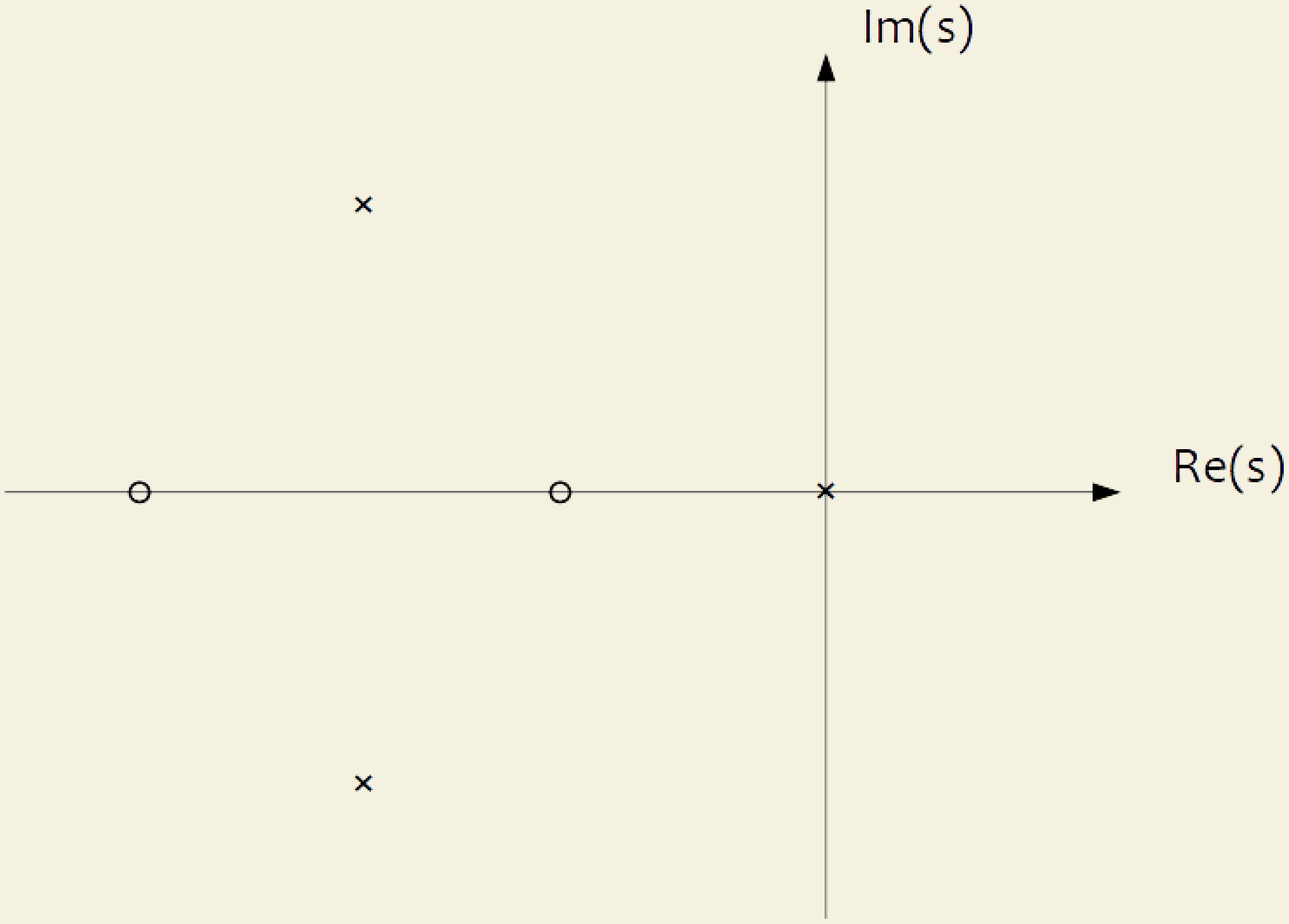
$$\theta_{z1}+\theta_{z2}-\theta_{p1}-\theta_{p2}-\theta_{p3}=\pm 180^{o},\pm 540^{o}\ldots$$

Condição de módulo:

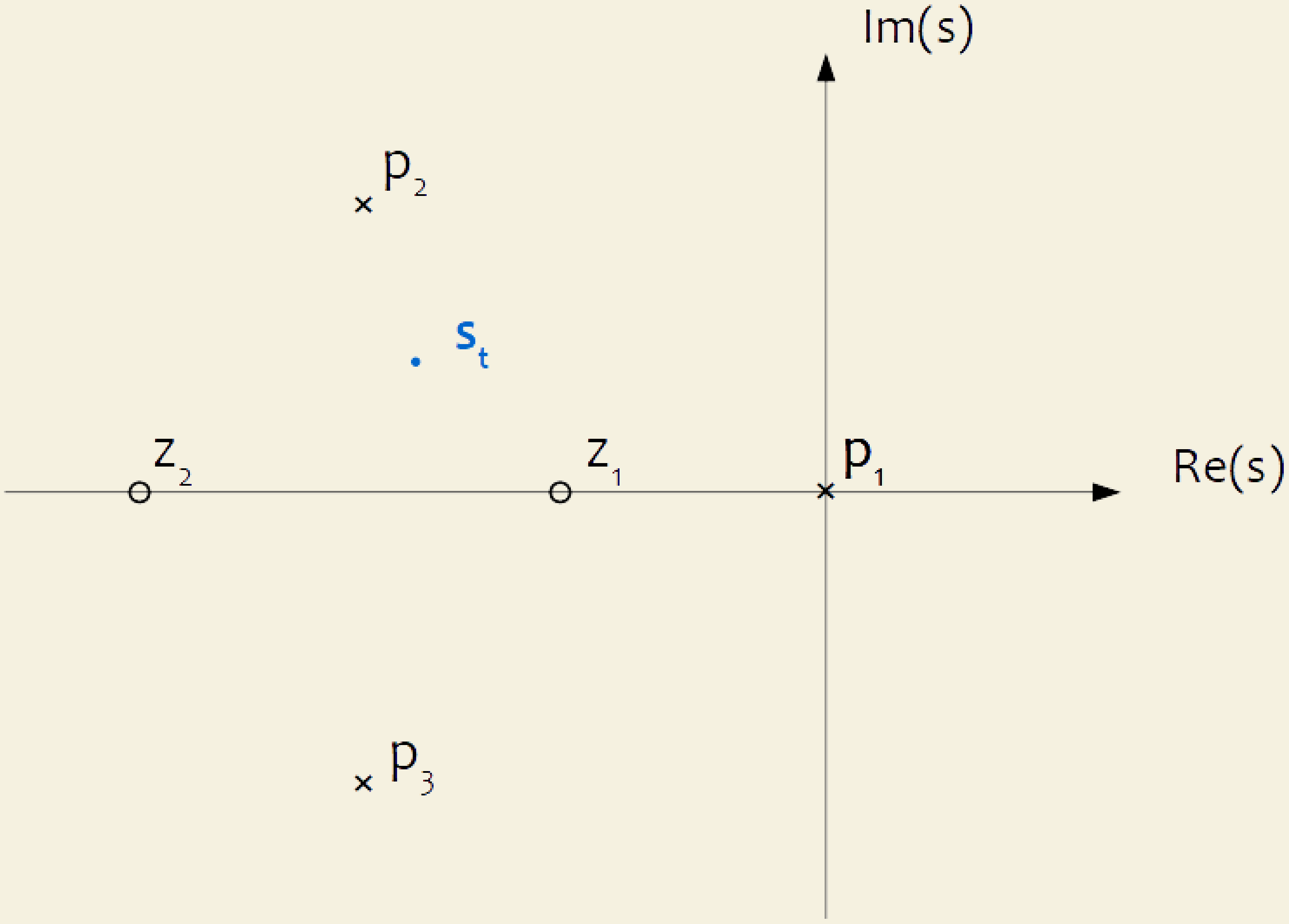
$$|KG(s)|=1$$

$$K=\frac{|s_t||s_t+p_2||s_t+p_3|}{|s_t+z_1||s_t+z_2|}$$

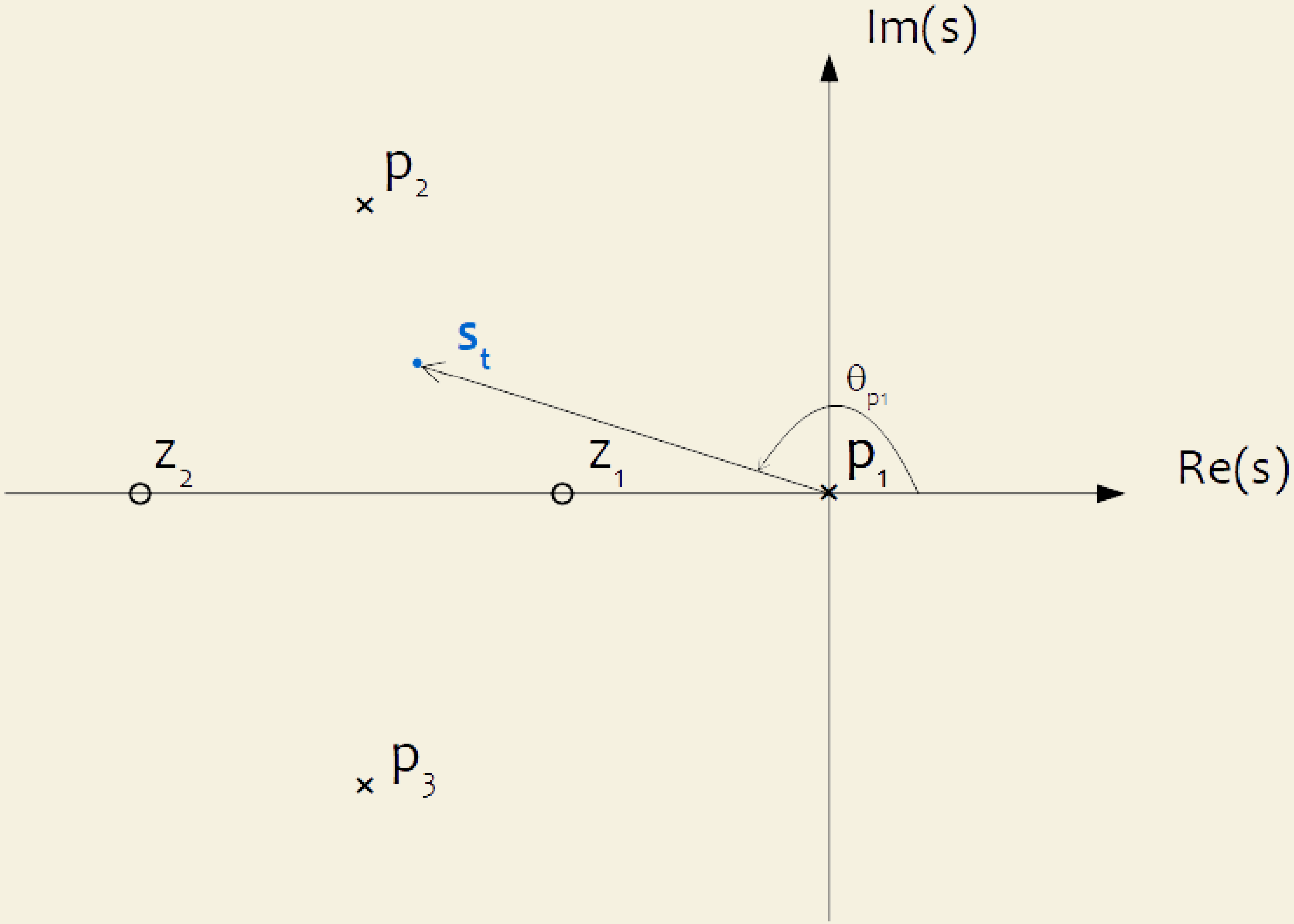
Lugar das raízes



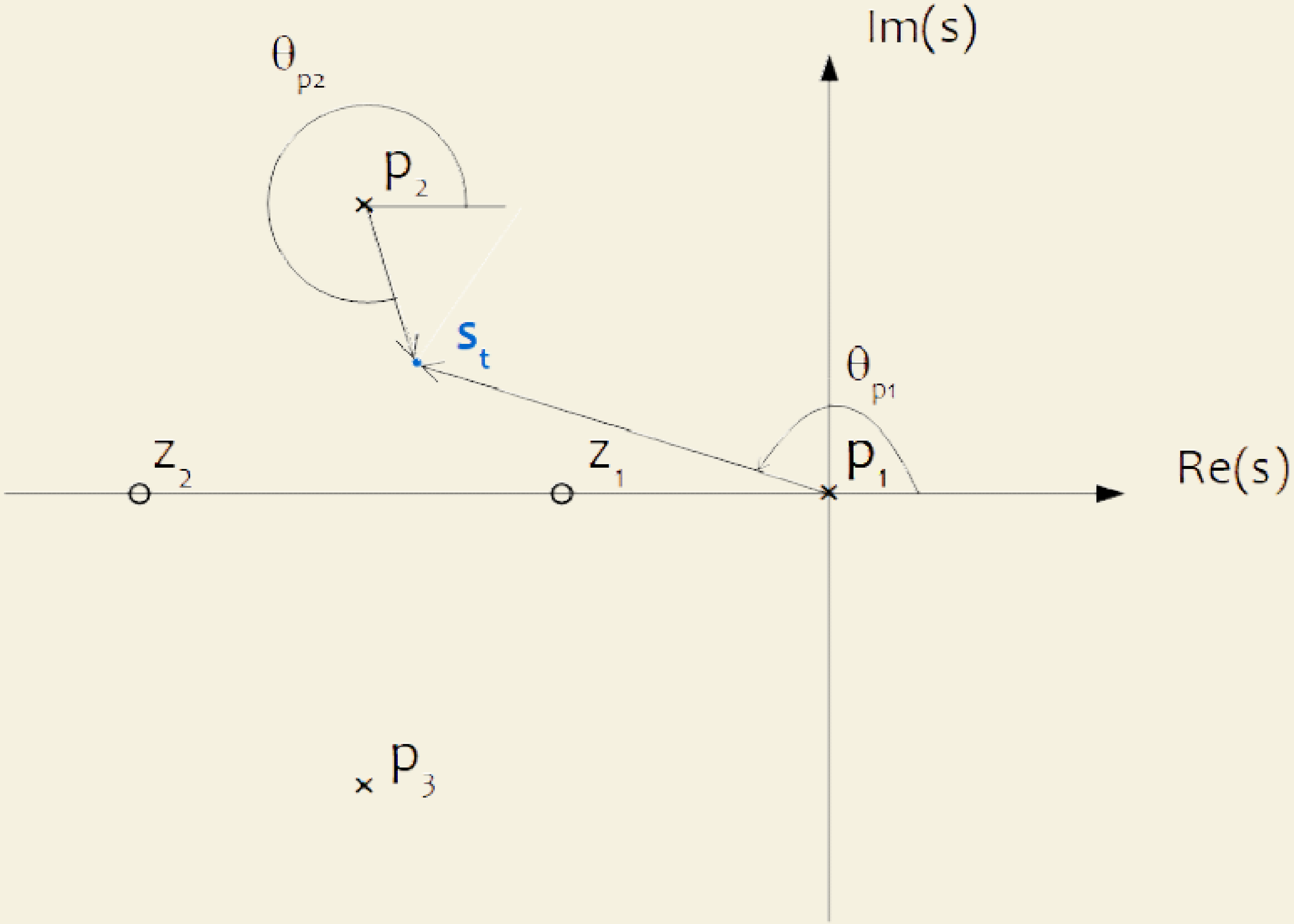
Lugar das raízes



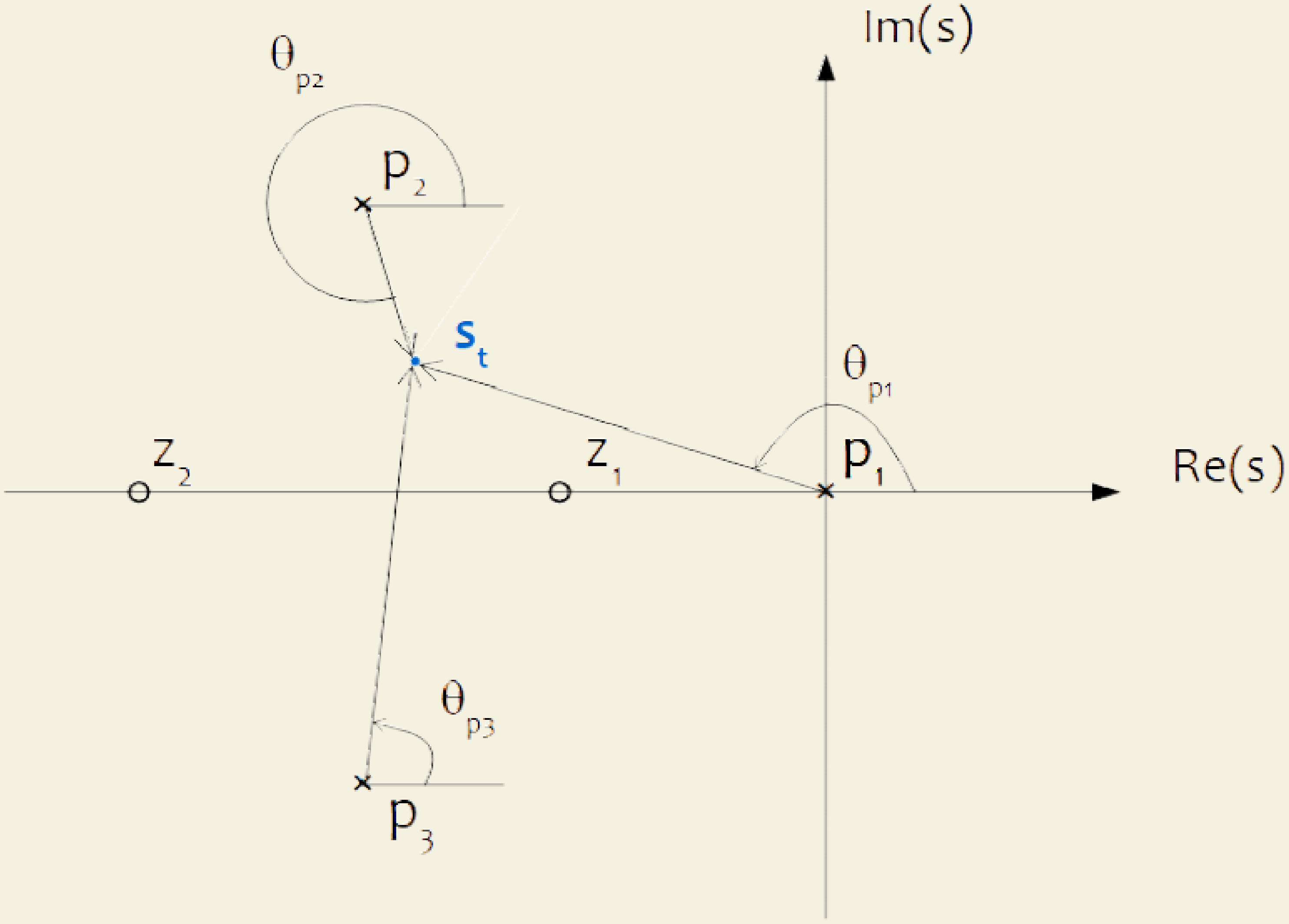
Lugar das raízes



Lugar das raízes



Lugar das raízes



Lugar das raízes