



# TE 339 – Sistemas Elétricos de Potência I

## Montagem Matriz Admitância

Prof. Mateus Duarte  
Teixeira

# Diagrama Unifilar

- Embora os Sistemas Elétricos de Potência em corrente alternada sejam trifásicas, é comum representá-los utilizando apenas uma das fase e o neutro (ou terra).
- Dessa forma todos os componentes (ou os mais importantes) de um sistema elétrico são agrupados em um diagrama unifilar e representados através de símbolos padronizados.

# Diagrama Unifilar

- A figura a seguir mostra um exemplo de diagrama unifilar para um sistema elétrico simples:

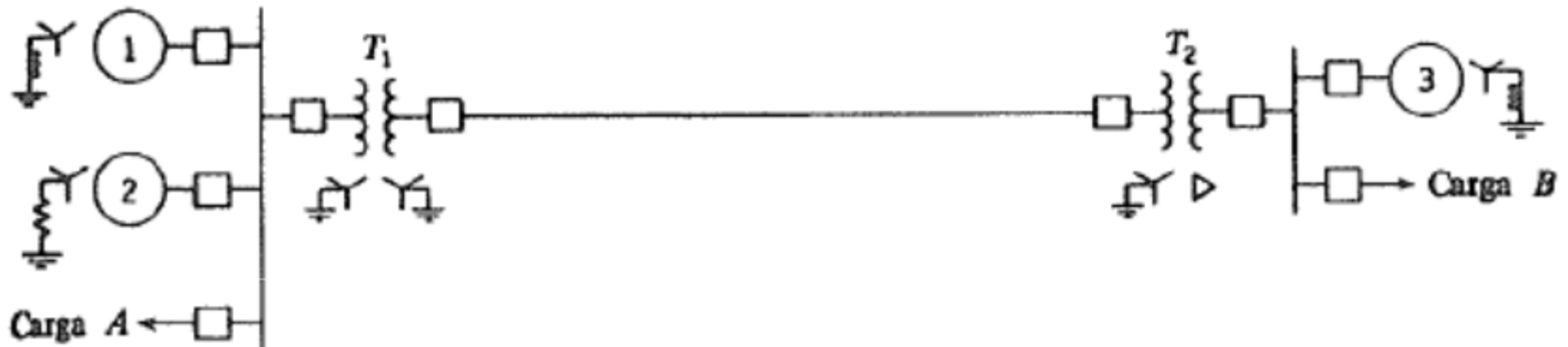


Fig. 1: Diagrama unifilar representando um Sistema Elétrico trifásico

# Diagrama Unifilar

Neste exemplo, temos:

- três geradores, dois aterrados através de reator e um através de resistência;
- dois transformadores, sendo T1 Y-Y aterrado e T2 Y $\Delta$  com Y aterrado;
- uma linha de transmissão de alta tensão (por ex.: 230 KV);
- duas cargas conectadas aos barramentos de baixa tensão (por ex.: 13,8 KV);
- 9 disjuntores de potência.

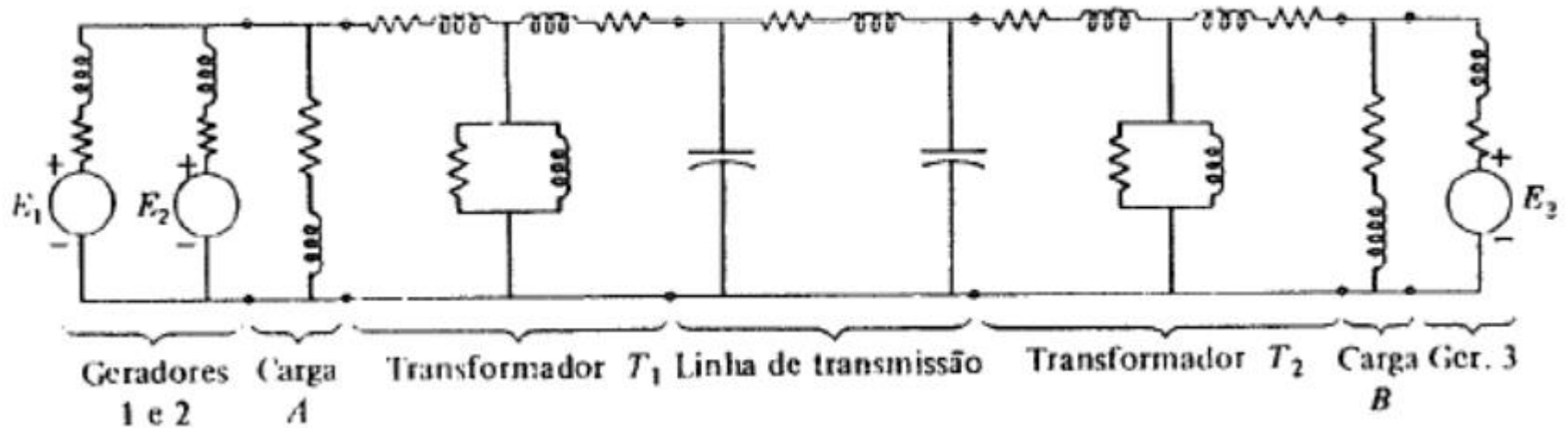


Fig. 1: Diagrama unifilar representando um Sistema Elétrico trifásico

# Diagrama de Impedância e Reatância

- Para efeito de cálculos e análise em Sistemas Elétricos, torna-se conveniente apresentar o diagrama unifilar com os componentes essenciais do sistema e suas respectivas impedâncias ou reatâncias.
- Para o sistema elétrico da figura anterior, temos o seguinte diagrama unifilar dos componentes e suas impedâncias, ou simplesmente, diagrama de impedância:

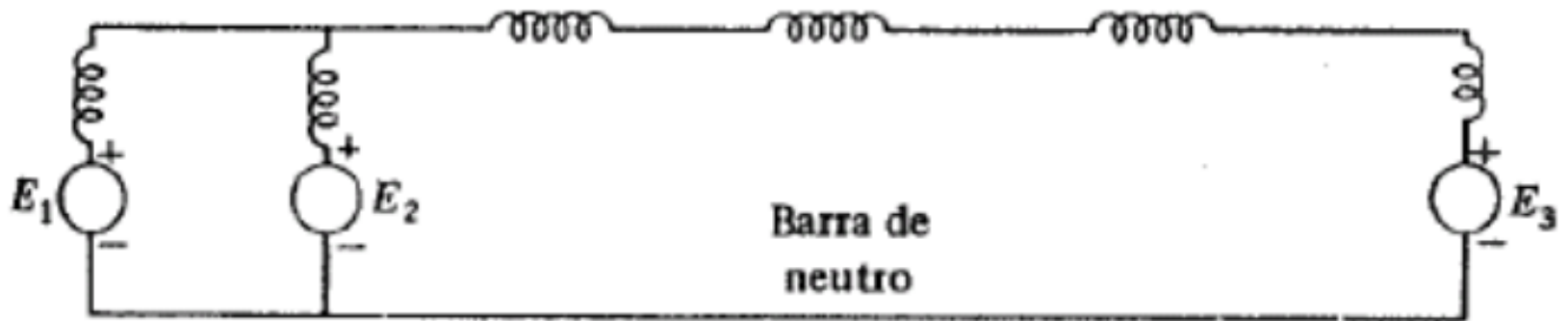
# Diagrama de Impedância e Reatância



# Diagrama de Impedância e Reatância

- Em estudos de curto-circuito, por exemplo, costuma-se desprezar as resistências dos componentes do SEP, acarretando num diagrama unifilar de reatâncias. Além disso, caso o valor das admitâncias ou susceptâncias em derivação (shunt) de linhas de transmissão ou trafos sejam relativamente pequenos, estas podem ser desprezadas também.
- Para o diagrama unifilar da figura 1 ou figura 2, temos o seguinte diagrama unifilar de reatância (desprezando todas as resistências e admitâncias shunt):

# Diagrama de Impedância e Reatância



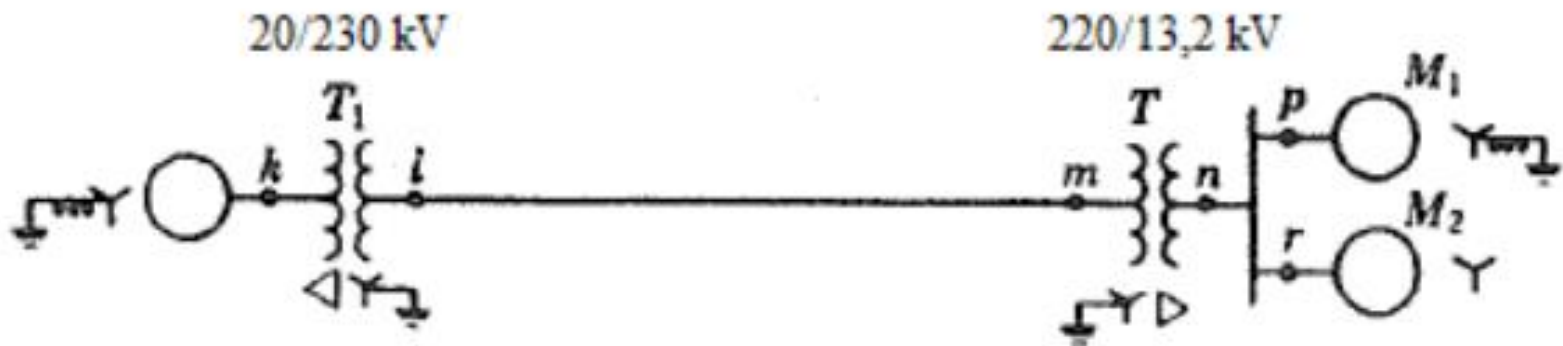


# Diagrama de Impedância e Reatância

Exercício:

- Um gerador trifásico de 300 MVA, 20KV, tem uma reatância subtransitória de 20%. O gerador alimenta 2 motores síncronos através de uma linha de transmissão de 64 km, tendo transformadores em ambas as extremidades, como mostra o diagrama unifilar da figura 4. Os motores, todos de 13,2 kV, estão representados por dois motores equivalentes. As entradas nominais para os motores são 200 MVA para M1 e 100 MVA para M2. Para ambos os motores  $X'' = 20\%$ . O trafo trifásico T1, 350 MVA, 230/20 kV, apresenta reatância de 10%. O trafo T2 (composto de 3 trafos monofásicos cada um de 100 MVA, 127/13,2 kV) apresenta potência nominal de 300 MVA, tensões nominais de 230/13,2 kV e reatância de 10%. A linha de transmissão apresenta reatância de 0,5 Ohm/km.
- Obtenha o diagrama de reatâncias com todas as reatâncias assinaladas em p.u., considerando os valores nominais do gerador como base deste circuito.

# Diagrama de Impedância e Reatância



# Matriz de Admitância de um Sistema Elétrico

- A determinação da matriz de admitância nodal ( $Y$ ) da rede tem grande importância para os cálculos de rede elétrica em Sistemas de Potência.
- A matriz  $Y$  relaciona as tensões elétricas nodais com as correntes elétricas injetadas ao sistema através de geradores (Lei de Kirchhoff das Correntes):

$$\dot{I} = Y \times \dot{V}$$

# Matriz de Admitância de um Sistema Elétrico

$$\dot{I} = Y \times \dot{V}$$

Sendo:

- $I$  é o vetor de injeção de corrente na rede por fontes independentes ( $N \times 1$ );
- $V$  é o vetor de tensão nodal, desconsiderando a barra de referência ( $N \times 1$ );
- $Y$  é a matriz de Admitância nodal ou de admitância de barra ( $N \times N$ );
- $N$  é o número de barras ou nós da rede.

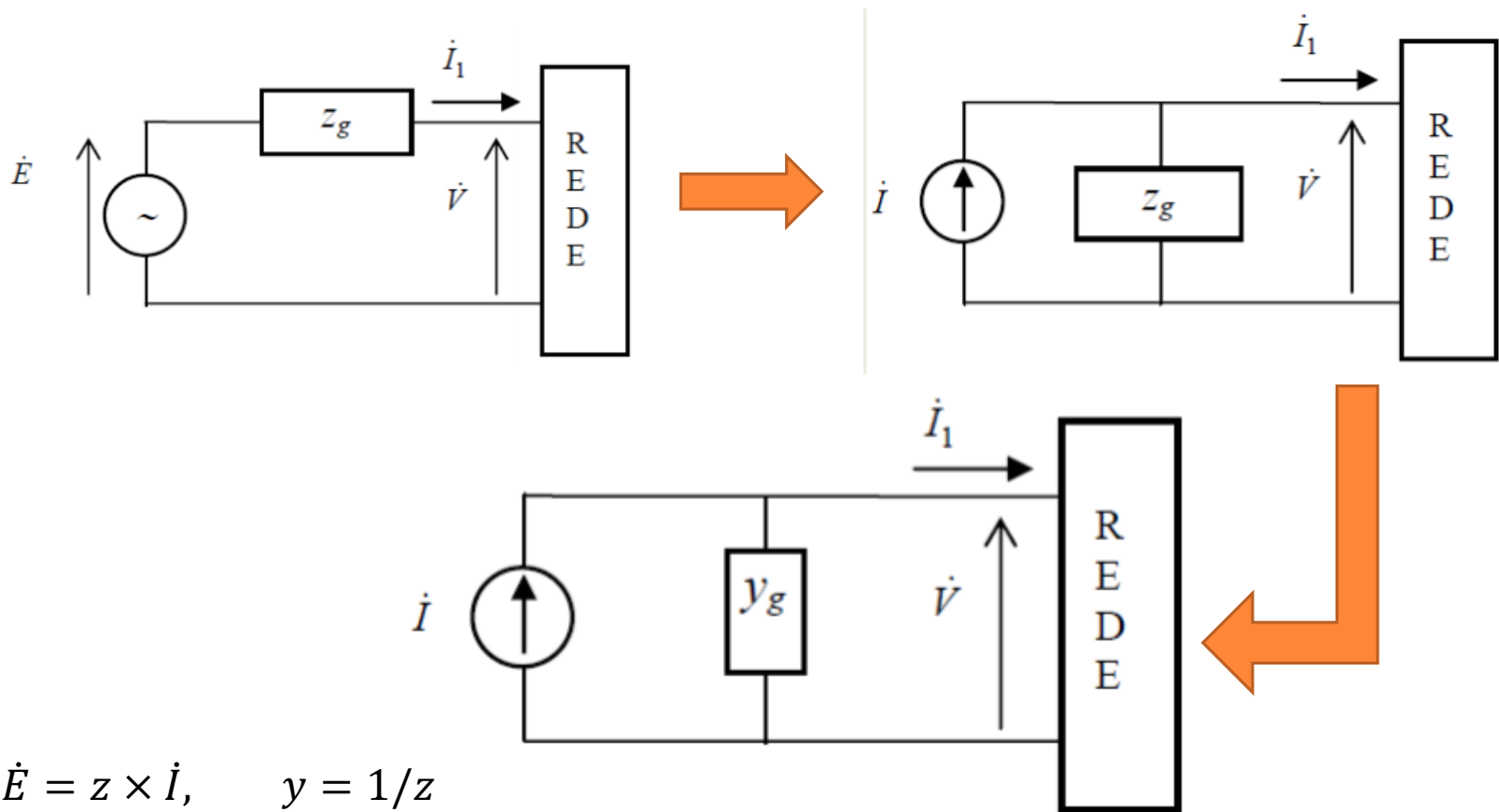
# Matriz de Admitância de um Sistema Elétrico

- Outra forma de relacionar as tensões e correntes elétricas de uma rede é através da matriz de Impedância da rede:

$$\dot{V} = Z \times \dot{I}$$

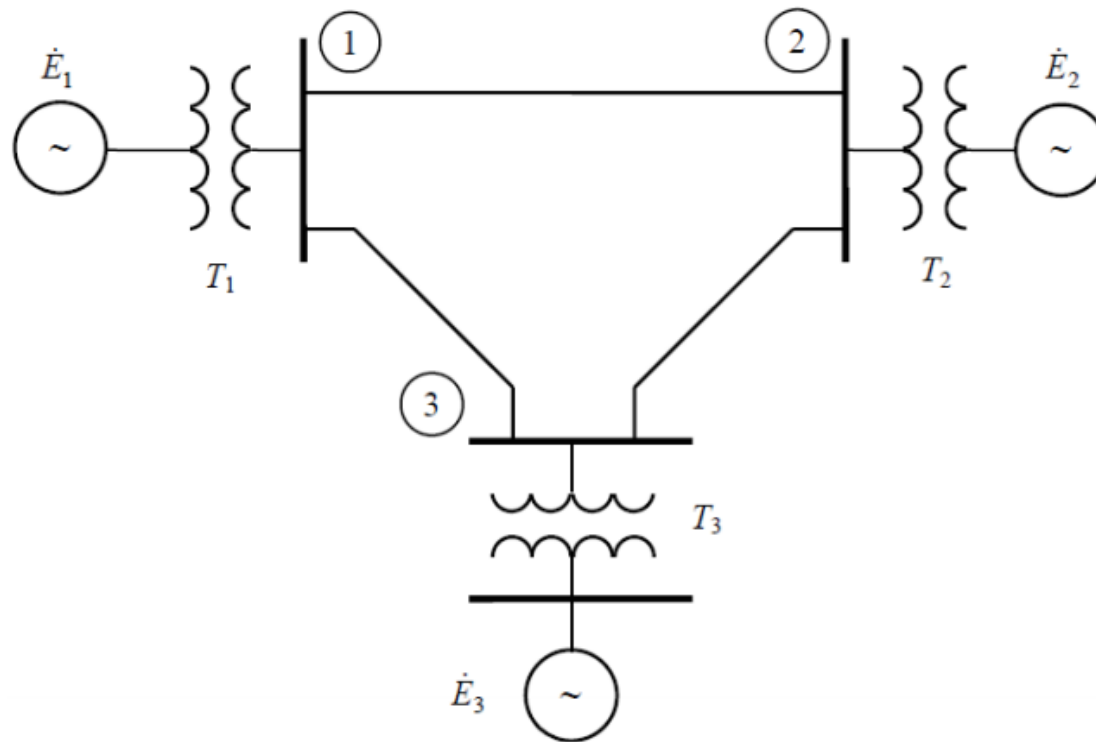
Sendo  $Z=Y^{-1}$

# Matriz de Admitância de um Sistema Elétrico



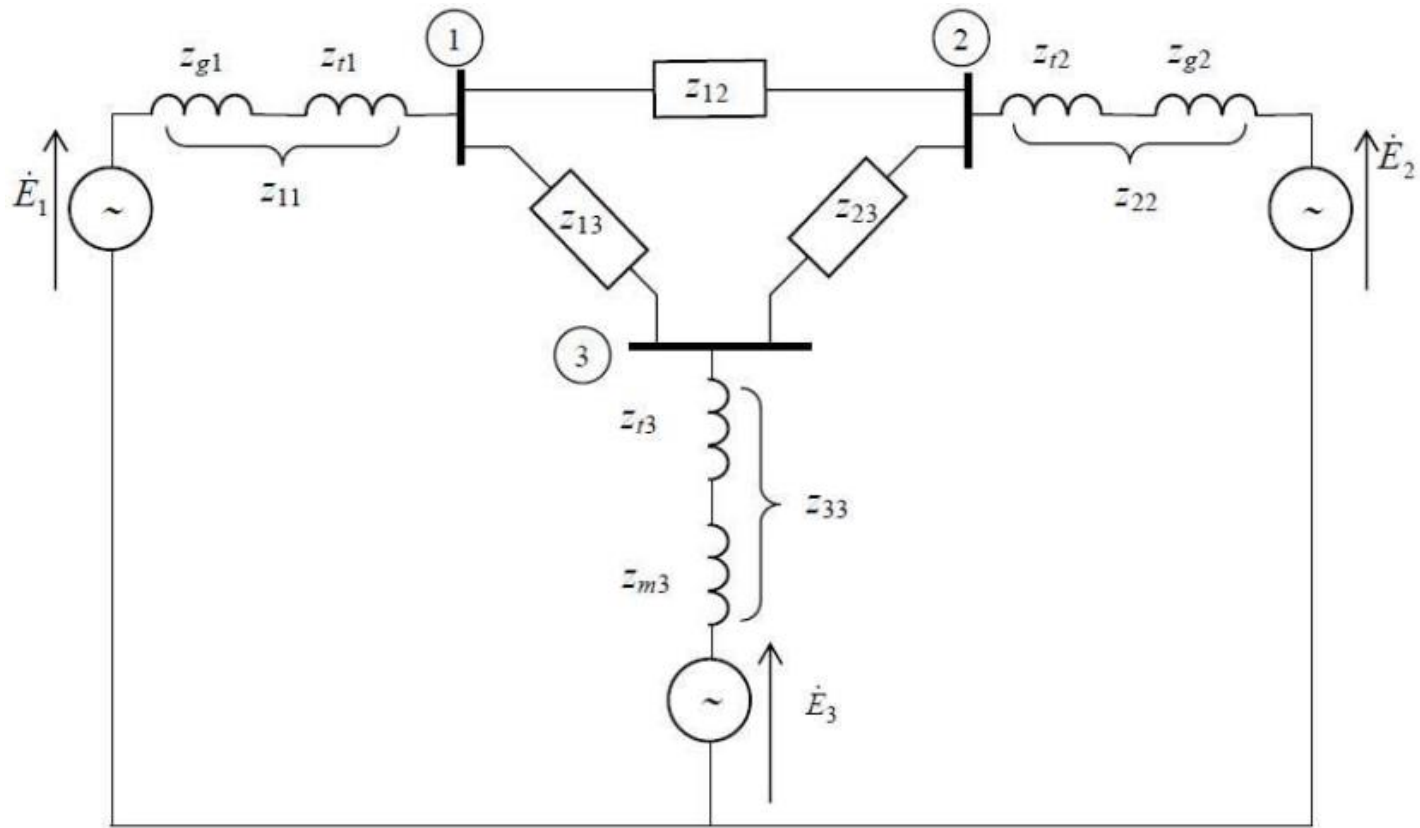
# Equações Nodais da Rede

- Equações Nodais da Rede quando Modelada por Admitância, onde  $E_3$  representa um motor:



# Equações Nodais da Rede

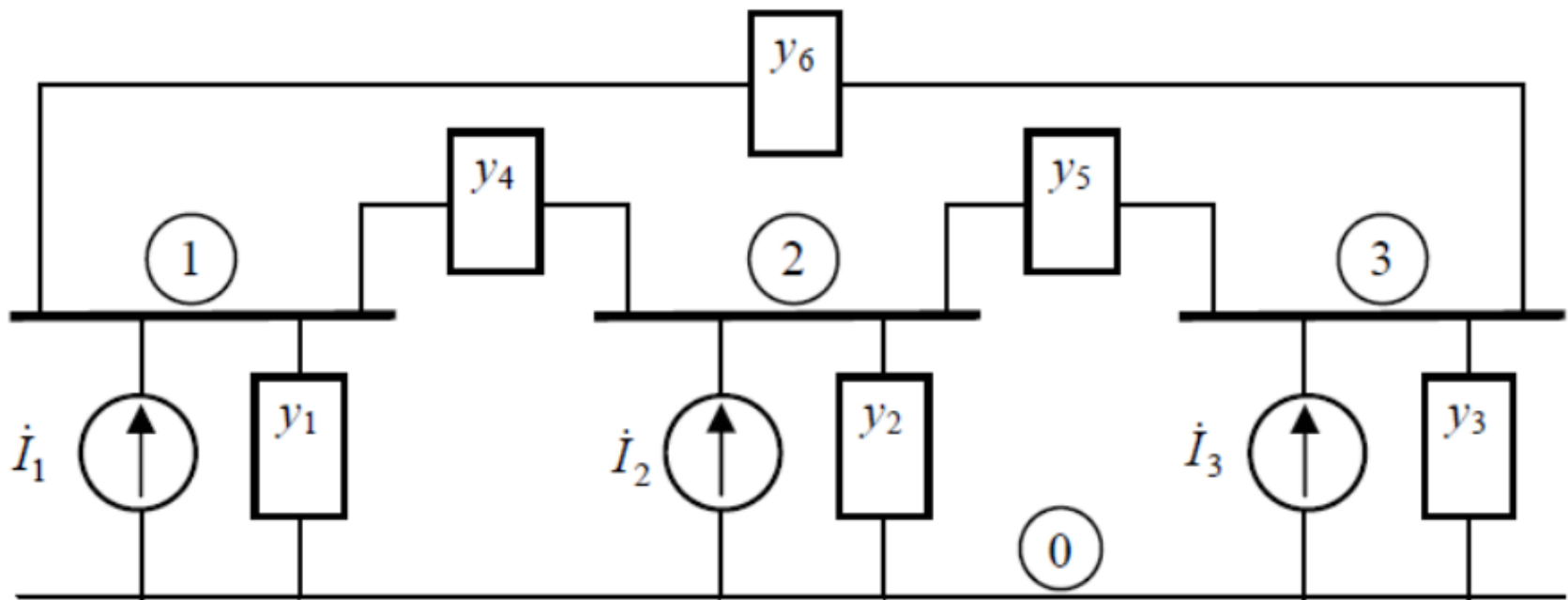
- Utilizando-se o modelo de cada elemento:



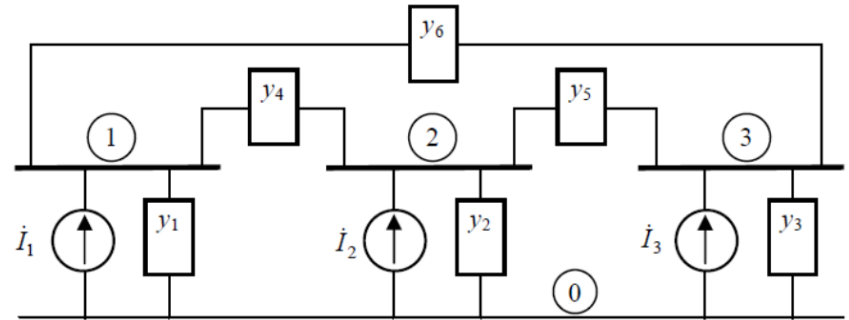


# Equações Nodais da Rede

- Cada fonte de tensão em série com uma impedância foi transformada em uma fonte de corrente em paralelo com uma admitância e as impedâncias das linhas foram transformadas em admitâncias.



# Equações Nodais da Rede



$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_1}{z_{11}} = \frac{\dot{E}_1}{z_{g1} + z_{t1}},$$

$$y_1 = \frac{1}{z_{11}} = \frac{1}{z_{g1} + z_{t1}},$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{E}_2}{z_{22}} = \frac{\dot{E}_2}{z_{g2} + z_{t2}},$$

$$y_2 = \frac{1}{z_{22}} = \frac{1}{z_{g2} + z_{t2}},$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{E}_3}{z_{33}} = \frac{\dot{E}_3}{z_{m3} + z_{t3}},$$

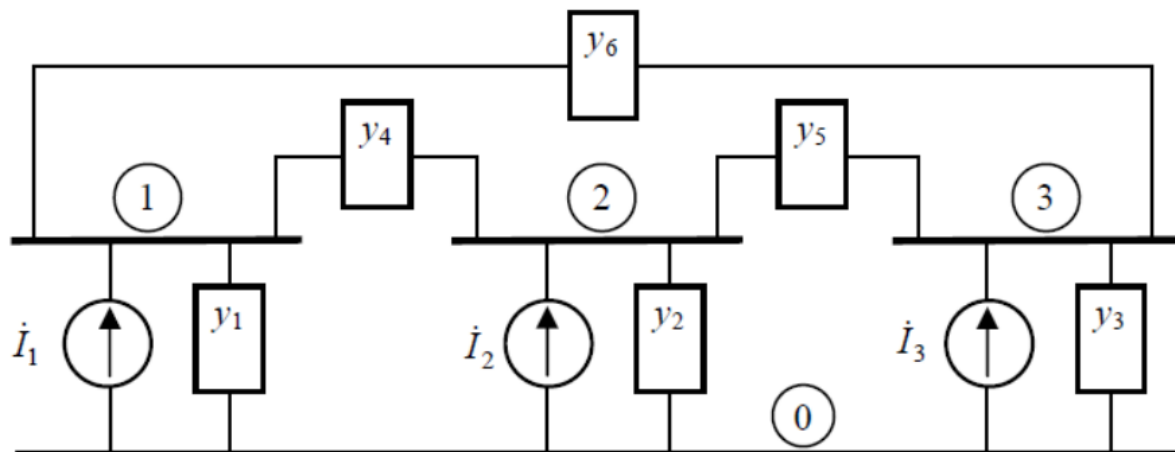
$$y_3 = \frac{1}{z_{33}} = \frac{1}{z_{m3} + z_{t3}},$$

$$y_4 = \frac{1}{z_{12}},$$

$$y_5 = \frac{1}{z_{23}},$$

$$y_6 = \frac{1}{z_{13}}.$$

# Equações Nodais da Rede



$$\text{Barra 1: } \dot{I}_1 = y_4 \times (\dot{V}_1 - \dot{V}_2) + y_6 \times (\dot{V}_1 - \dot{V}_3) + y_1 \times (\dot{V}_1 - \dot{V}_0),$$

$$\text{Barra 2: } \dot{I}_2 = y_5 \times (\dot{V}_2 - \dot{V}_3) + y_4 \times (\dot{V}_2 - \dot{V}_1) + y_2 \times (\dot{V}_2 - \dot{V}_0),$$

$$\text{Barra 3: } \dot{I}_3 = y_5 \times (\dot{V}_3 - \dot{V}_2) + y_6 \times (\dot{V}_3 - \dot{V}_1) + y_3 \times (\dot{V}_3 - \dot{V}_0).$$

$$\text{Barra 0: } (-\dot{I}_1 - \dot{I}_2 - \dot{I}_3) = y_1 \times (\dot{V}_0 - \dot{V}_1) + y_2 \times (\dot{V}_0 - \dot{V}_2) + y_3 \times (\dot{V}_0 - \dot{V}_3).$$

# Equações Nodais da Rede

- Agrupando-se os termos das equações para as barras 1, 2 e 3 vem:

$$\dot{I}_1 = (y_1 + y_4 + y_6) \times \dot{V}_1 - y_4 \times \dot{V}_2 - y_6 \times \dot{V}_3,$$

$$\dot{I}_2 = -y_4 \times \dot{V}_1 + (y_2 + y_4 + y_5) \times \dot{V}_2 - y_5 \times \dot{V}_3,$$

$$\dot{I}_3 = -y_6 \times \dot{V}_1 - y_5 \times \dot{V}_2 + (y_3 + y_5 + y_6) \times \dot{V}_3.$$

- Colocando-se as equações na forma matricial:

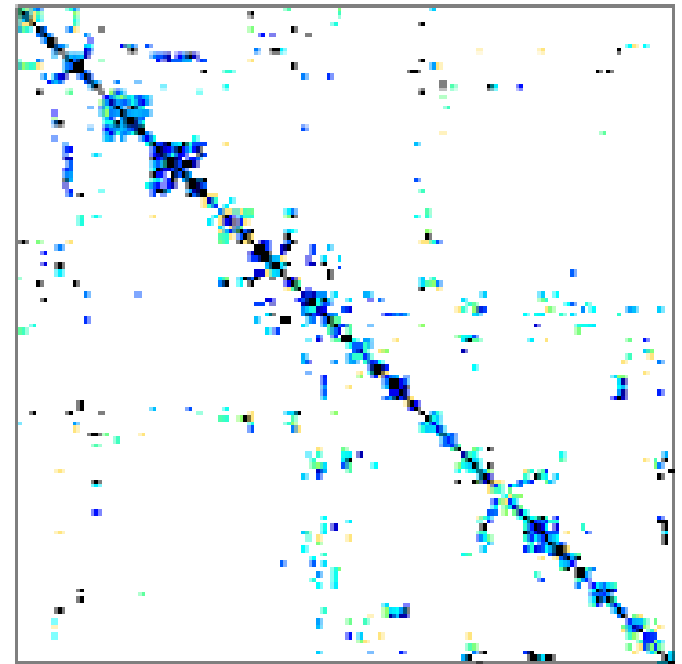
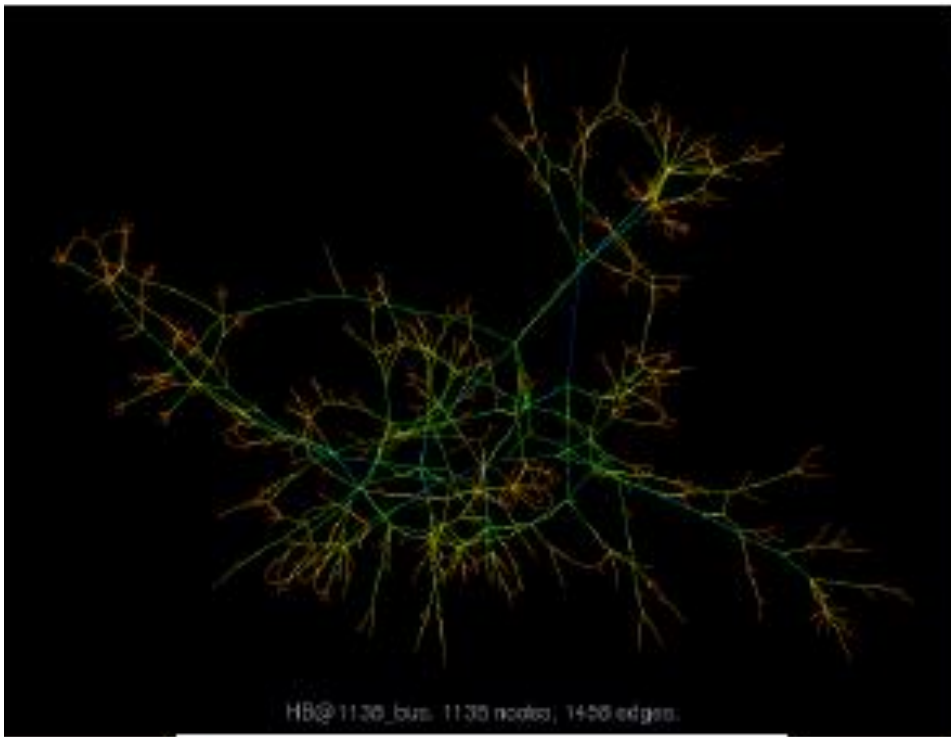
$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + y_4 + y_6 & -y_4 & -y_6 \\ -y_4 & y_2 + y_4 + y_5 & -y_5 \\ -y_6 & -y_5 & y_3 + y_5 + y_6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \dot{V}_3 \end{bmatrix}$$

# Equações Nodais da Rede

- A matriz  $Y_{bus}$  em SEP:
  - Simétrica;
  - Complexa;
  - Quadrada de dimensão  $n$ , onde  $n$  é o número de barras (exceto ref.);
  - Esparsa (>95%);
  - Diagonal principal dominante
  - Elementos da diagonal principal  $Y_{kk}$  são o somatório das admitâncias diretamente ligadas à barra;
  - Elementos fora da diagonal principal  $Y_{kj}$ : soma das admitâncias que ligam as barras  $k$  e  $j$  (sinal contrário).

# Equações Nodais da Rede

- A matriz  $Y_{bus}$  em SEP:



# Matriz Impedância Nodal (Zbarra, Zbus)

- Obtenção direta dos elementos de Zbus não é prática, sendo a seu cálculo através da inversa de Ybus mais conveniente.

$$[\mathbf{V}] = [\mathbf{Y}^{BUS}]^{-1} \cdot [\mathbf{I}] = [\mathbf{Z}^{BUS}] \cdot [\mathbf{I}]$$

$$[\mathbf{Z}^{BUS}] = \begin{bmatrix} \bar{Y}_{11} & \bar{Y}_{12} & \dots & \bar{Y}_{1N} \\ \bar{Y}_{21} & \bar{Y}_{22} & \dots & \bar{Y}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{Y}_{N1} & \bar{Y}_{N2} & \dots & \bar{Y}_{NN} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} & \dots & \bar{Z}_{1N} \\ \bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{22} & \dots & \bar{Z}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{Z}_{N1} & \bar{Z}_{N2} & \dots & \bar{Z}_{NN} \end{bmatrix}$$

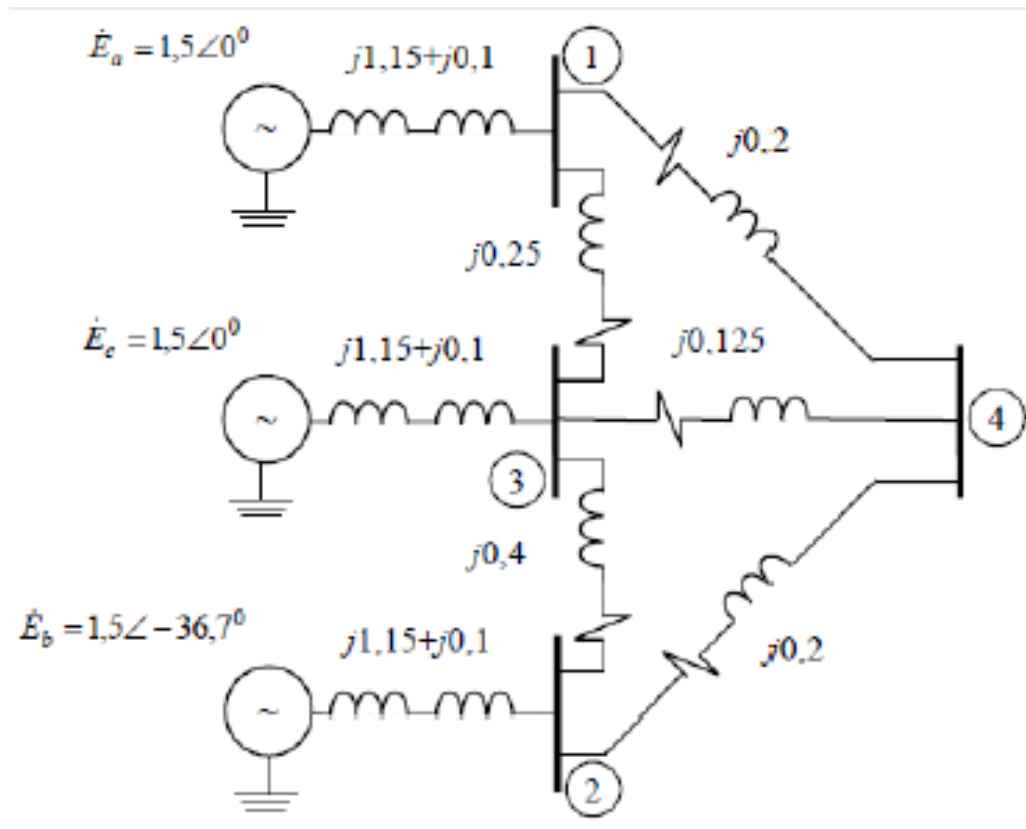
# Matriz Impedância Nodal (Zbarra, Zbus)

- A matriz Zbus em SEP:
  - Simétrica;
  - Complexa;
  - Quadrada de dimensão  $n$ , onde  $n$  é o número de barras (exceto ref.);
  - Matriz cheia.



# Matriz Impedância Nodal (Zbarra, Zbus)

- Exemplo: Construir a Matriz de Admitância e impedância do circuito abaixo:



# Matriz Impedância Nodal (Zbarra, Zbus)

- Cálculo dos parâmetros:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}_a}{z_g + z_f} = \frac{1,5 \angle 0^\circ}{j1,25} = 1,2 \angle -90^\circ = -j1,2.$$

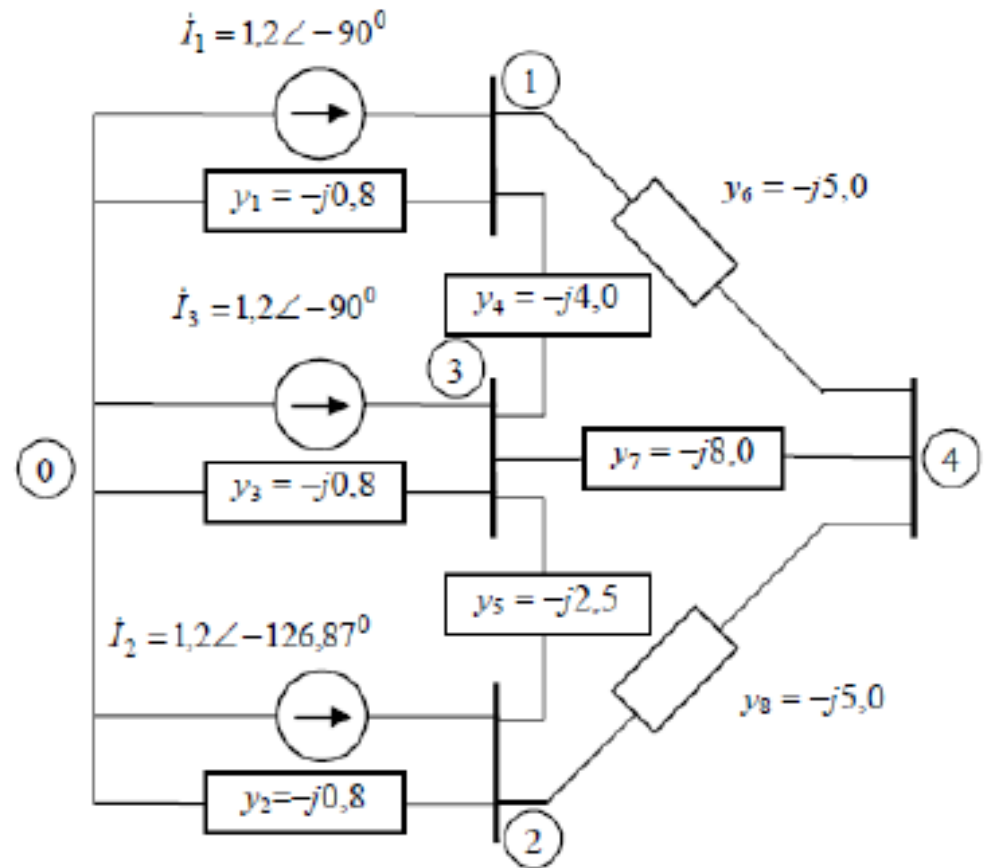
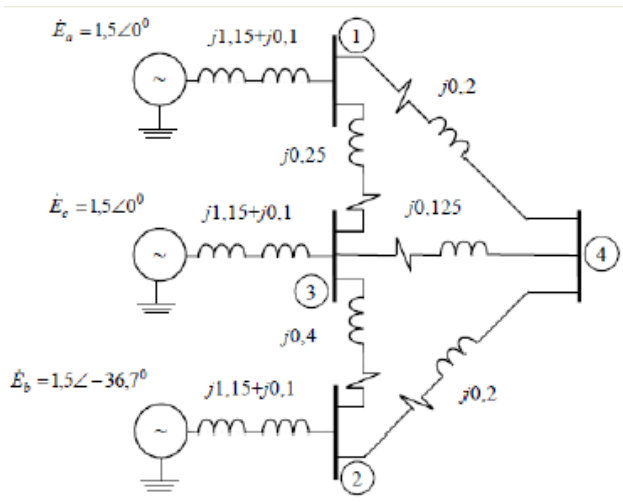
$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{E}_b}{z_g + z_f} = \frac{1,5 \angle -36,7^\circ}{j1,25} = 1,2 \angle -126,87^\circ = -0,72 - j0,96.$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{E}_c}{z_g + z_f} = \frac{1,5 \angle 0^\circ}{j1,25} = 1,2 \angle -90^\circ = -j1,2.$$

$$y_1 = 1/j1,25 = -j0,8, \quad y_2 = 1/j1,25 = -j0,8, \quad y_3 = 1/j1,25 = -j0,8, \quad y_4 = 1/j0,25 = -j4,0, \\ y_5 = 1/j0,4 = -j2,5, \quad y_6 = 1/j0,2 = -j5,0, \quad y_7 = 1/j0,125 = -j8,0, \quad y_8 = 1/j0,2 = -j5,0.$$

# Matriz Impedância Nodal (Zbarra, Zbus)

- Circuito de admitâncias



# Matriz Impedância Nodal (Zbarra, Zbus)

## Montagem da $Y_{\text{barra}}$ :

$$Y_{11} = -j0,8 - j4,0 - j5,0 = -j9,8,$$

$$Y_{22} = -j0,8 - j2,5 - j5,0 = -j8,3,$$

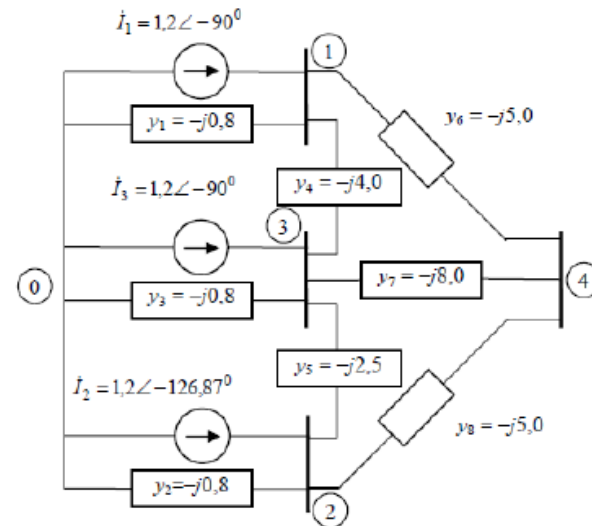
$$Y_{33} = -j0,8 - j4,0 - j2,5 - j8,0 = -j15,3,$$

$$Y_{44} = -j5,0 - j8,0 - j5,0 = -j18,0,$$

$$Y_{12} = Y_{21} = 0,0, \quad Y_{13} = Y_{31} = j4,0,$$

$$Y_{14} = Y_{41} = j5,0, \quad Y_{23} = Y_{32} = j2,5,$$

$$Y_{24} = Y_{42} = j5,0, \quad Y_{34} = Y_{43} = j8,0.$$



$$\begin{bmatrix} 1,2\angle -90^\circ \\ 1,2\angle -126,87^\circ \\ 1,2\angle -90^\circ \\ 0,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j9,8 & 0,0 & j4,0 & j5,0 \\ 0,0 & -j8,3 & j2,5 & j5,0 \\ j4,0 & j2,5 & -j15,3 & j8,0 \\ j5,0 & j5,0 & j8,0 & -j18,0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \dot{V}_3 \\ \dot{V}_4 \end{bmatrix}.$$

# Matriz Impedância Nodal (Zbarra, Zbus)

- Invertendo-se a matriz  $Y_{\text{barra}}$ :

$$\begin{bmatrix} j0,4774 & j0,3706 & j0,4020 & j0,4142 \\ j0,3706 & j0,4872 & j0,3922 & j0,4126 \\ j0,4020 & j0,3922 & j0,4558 & j0,4232 \\ j0,4142 & j0,4126 & j0,4232 & j0,4733 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 - j1,20 \\ -0,72 - j0,96 \\ 0 - j1,20 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \dot{V}_3 \\ \dot{V}_4 \end{bmatrix}$$

- vetor tensão de barra é encontrado efetuando-se a multiplicação indicada:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \dot{V}_3 \\ \dot{V}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,4111 - j0,2668 \\ 1,3830 - j0,3508 \\ 1,4059 - j0,2824 \\ 1,4009 - j0,2971 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,436 \angle -10,71^\circ \\ 1,427 \angle -14,24^\circ \\ 1,434 \angle -11,36^\circ \\ 1,432 \angle -11,97^\circ \end{bmatrix}$$

# Matriz Impedância Nodal (Zbarra, Zbus)

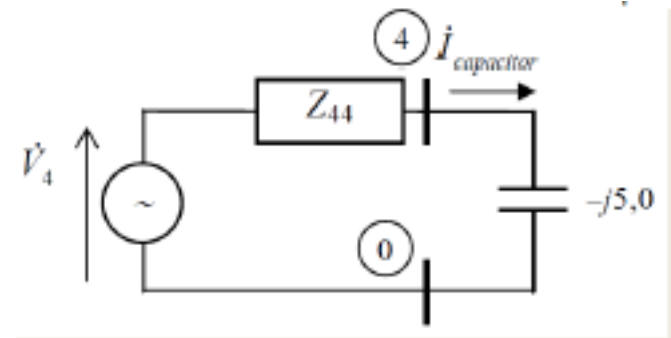
- Um capacitor com reatância de 5 pu nas bases do sistema é conectado entre a barra 4 e a referência do circuito. Calcular a corrente que passa pelo capacitor e a nova tensão da barra 4.

- $Z_{44}$  é a impedância equivalente da rede vista da barra 4.

$$Z_{44} = j0,47$$

- $V_4$  é a tensão da barra 4 antes do capacitor ser colocado

$$\dot{V}_4 = 1,432 \angle -11,97^\circ$$



# Matriz Impedância Nodal (Zbarra, Zbus)

## Solução:

$$\dot{I}_{capacitor} = \frac{\dot{V}_4}{Z_{44} - j5,0} = \frac{1,432 \angle -11,97^0}{j0,4733 - j5,0} = 0,3163 \angle 78,03^0 .$$

A nova tensão da barra 4 passa a ser:  $0,3163 \angle 78,03^0 \times -j5,0 = 1,582 \angle -11,97^0$

Notar que a nova tensão na barra 4 aumentou de valor.