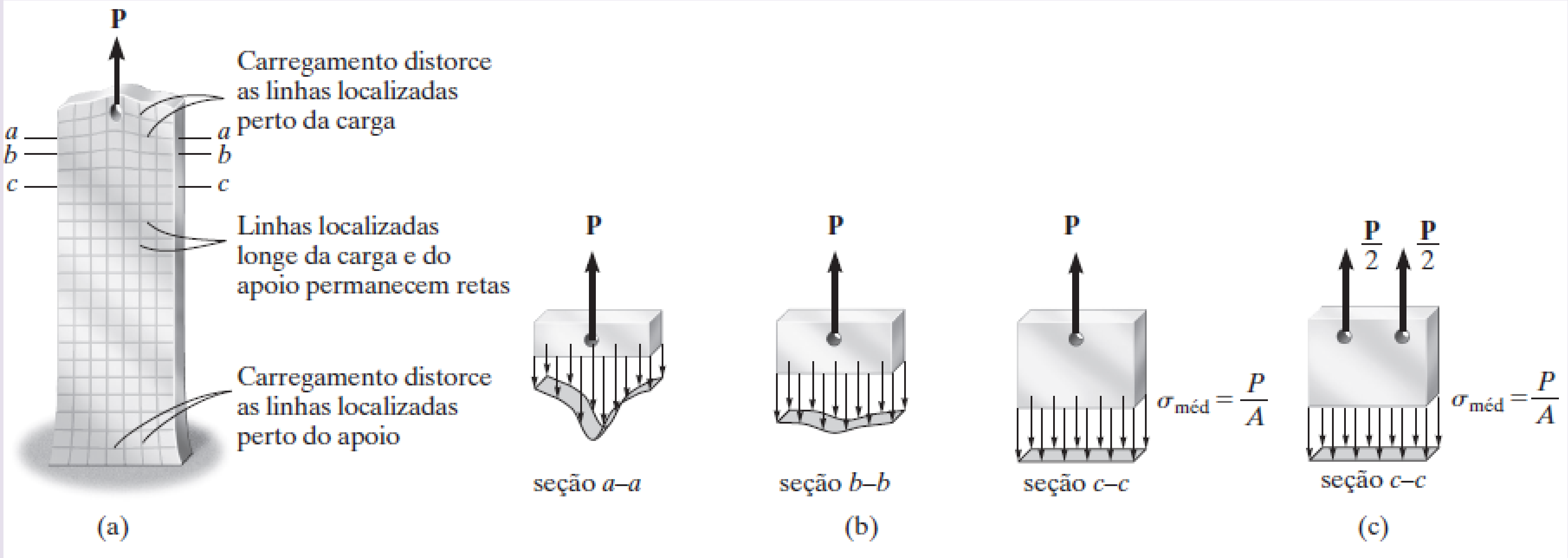
Carga axial

Princípio de Saint-Venant

- O ***princípio Saint-Venant*** afirma que a tensão e deformação localizadas nas regiões de aplicação de carga ou nos apoios tendem a "nivelar-se" a uma distância suficientemente afastada dessas regiões.



Deformação elástica de um elemento submetido a carga axial

- Usando a lei Hooke e as definições de tensão e deformação, pode-se determinar a deformação elástica de um elemento submetido a cargas axiais.
- Suponha um elemento sujeito a cargas,

$$\sigma = \frac{P(x)}{A(x)} \quad \text{e} \quad \varepsilon = \frac{d\delta}{dx} \quad \Rightarrow \quad \delta = \int_0^L \frac{P(x)\,dx}{A(x)E}$$

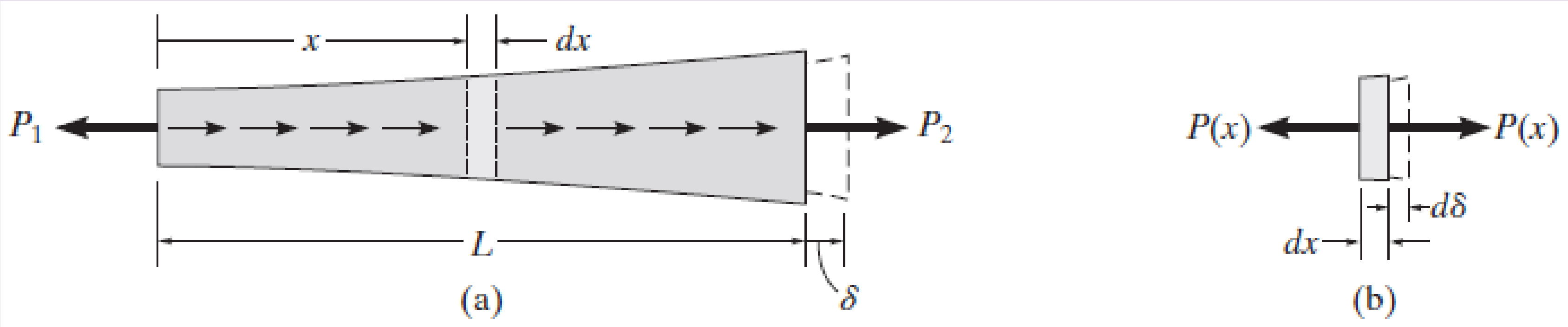
δ = deslocamento de um ponto da barra relativo a outro

L = distância original

P(*x*) = força axial interna na seção

A(*x*) = área da seção transversal da barra

E = módulo de elasticidade

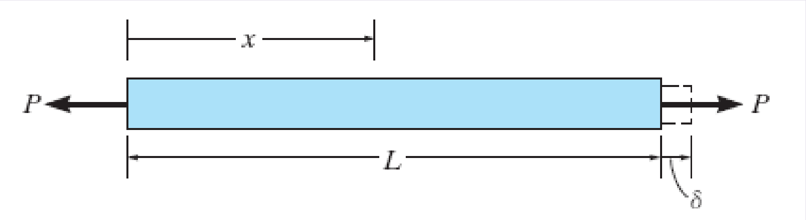


Deformação elástica de um elemento submetido a carga axial

1 caso. Carga e área de seção transversal constantes

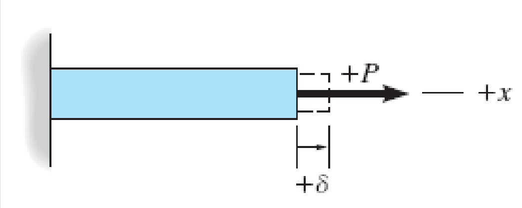
- Quando uma força constante externa é aplicada a cada extremidade da barra,

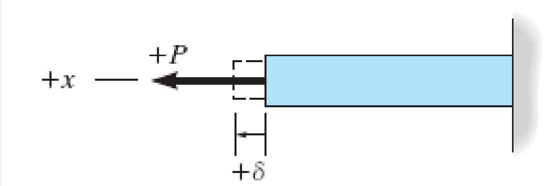
$$\delta = \frac{PL}{AE}$$



Convenção de sinais

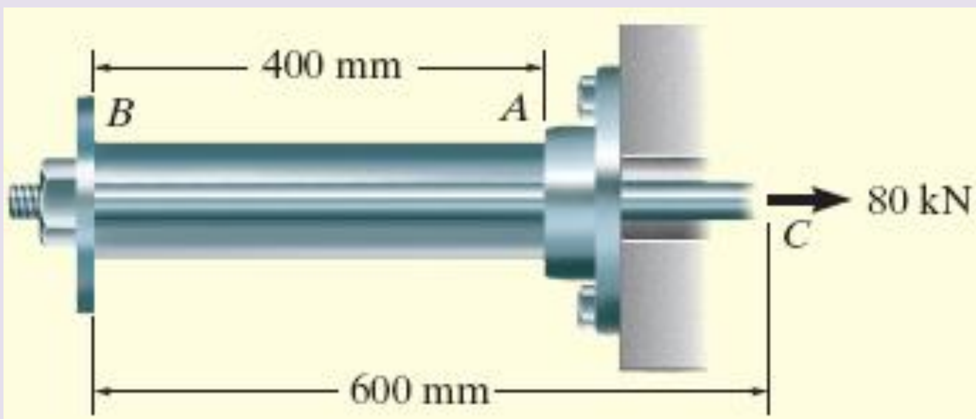
- Força e deslocamento são positivos se provocarem tração e alongamento; e negativos causarão compressão e contração.

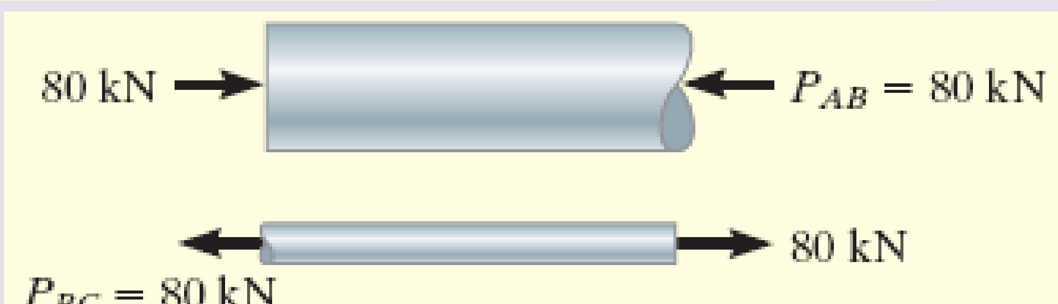




Exemplo 1

O conjunto é composto por um tubo de alumínio *AB* com área de seção transversal de 400 mm^2. Uma barra de aço com 10 mm de diâmetro está acoplada a um colar rígido e que passa pelo tubo. Se uma carga de tração de 80 kN for aplicada à barra, determine o deslocamento da extremidade *C* da barra. ($E_{aço}$ = 200 GPa, E_{al} = 70 GPa)

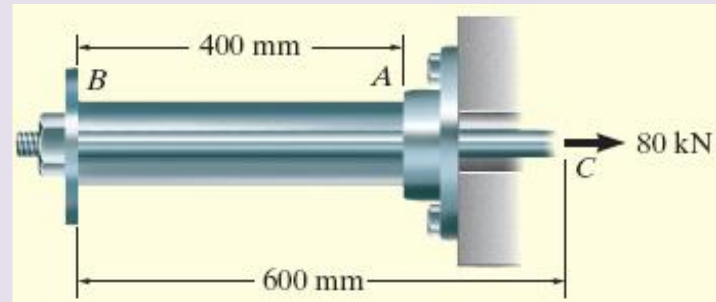




Solução:

Encontre o deslocamento da extremidade *C* em relação à extremidade *B*.

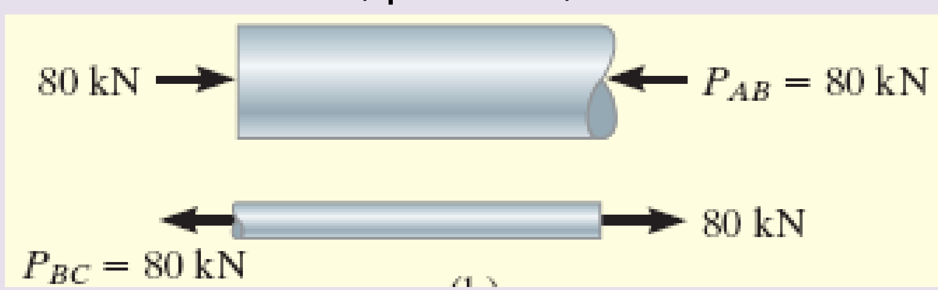
$$\delta_{C/B} = \frac{PL}{AE} = \frac{\left[+80\left(10^{3}\right)\right]\left(0{,}6\right)}{\pi\left(0{,}005\right)^{2}\left[200\left(10^{9}\right)\right]} = +0{,}003056\,\text{m} \rightarrow$$



O deslocamento da extremidade *B* em relação à *extremidade fixa A* é

$$\delta_{B} = \frac{PL}{AE} = \frac{\left[-80\left(10^{3}\right)\right]\left(0{,}4\right)}{\left[400\left(10^{-6}\right)\right]\left[70\left(10^{9}\right)\right]} = -0{,}001143 = 0{,}001143\text{m} \rightarrow$$

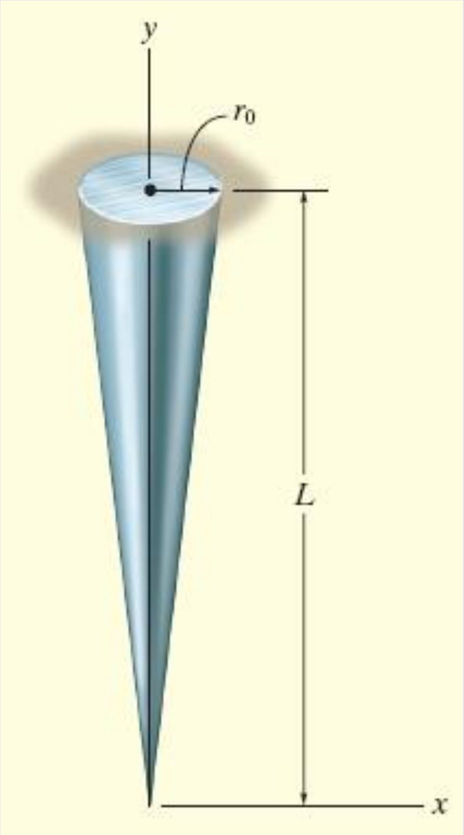
Visto que ambos os deslocamentos são para direita, o deslocamento resultante de *C* em relação à extremidade fixa *A* é, portanto,

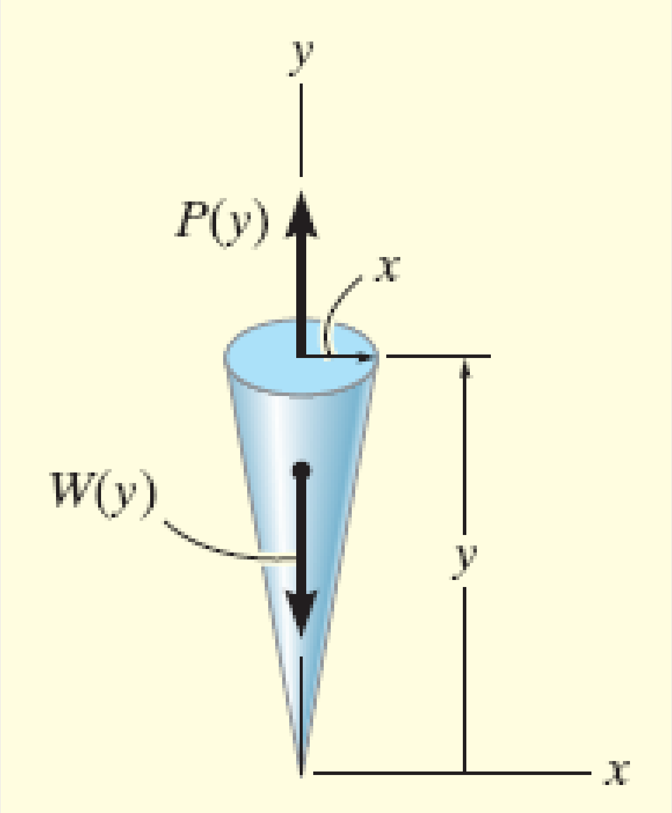


$$\delta_{C} = \delta_{C} + \delta_{C/B} = 0{,}0042\,\text{m} = 4{,}20\,\text{mm} \rightarrow \text{(Resposta)}$$

Exemplo 2

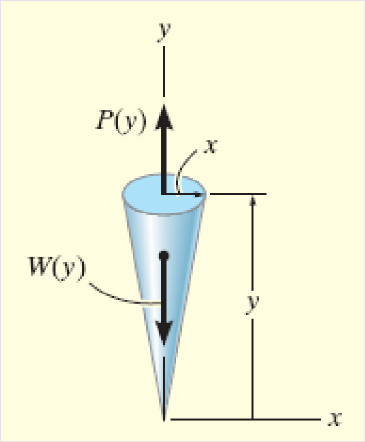
Um elemento é feito de um material com peso específico γ e módulo de elasticidade *E*. Se esse elemento tiver forma de um *cone*, determine até que distância sua extremidade se deslocará sob a força da gravidade, quando suspenso na posição vertical.





Exemplo 2

$$\delta = \int_0^L \frac{P(x)dx}{A(x)E}$$



Solução:

O raio *x* do cone em função de *y* é determinado por cálculo proporcional, isto é,

$$\frac{x}{y} = \frac{r_o}{L}; \qquad x = \frac{r_o}{L} y$$

O volume de um cone com raio r_0 base *x* e altura *y* é $V = \frac{\pi}{3} yx^2 = \frac{\pi r_o^2}{3L^2} y^3$

Como peso= γV, a força interna na seção torna-se $+\uparrow \sum F_y = 0;$ $\quad P(y) = \frac{\gamma \pi r_o^2}{3L^2} y^3$

A área de seção transversal também é função da posição *y*. $A(y) = \pi x^2 = \frac{\pi r_o^2}{L^2} y^2$

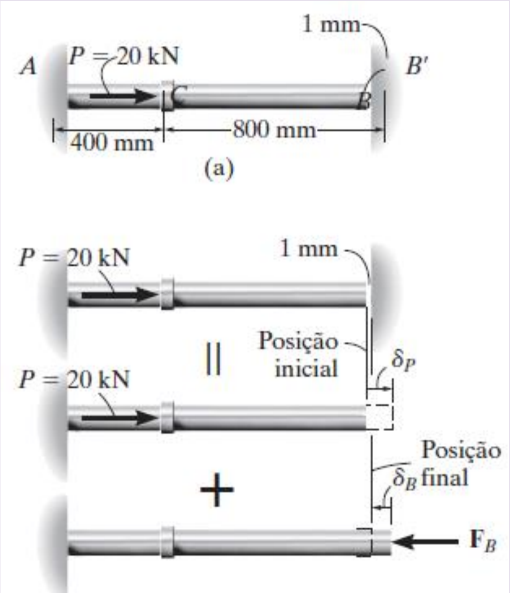
Entre os limites *y* = 0 e *y* = *L*, $\delta = \int_0^L \frac{P(y)dy}{A(y)E} = \int_0^L \frac{\left[\left(\gamma \pi r_o^2 / 3L^2\right)\right] dy}{\left[\left(\gamma \pi r_o^2 / L^2\right)\right] E} = \frac{\gamma L^2}{6E}$ (Resposta)

Princípio da superposição

- *Princípio da superposição* é frequentemente usado para determinar a tensão ou o deslocamento em um ponto de um elemento quando este estiver sujeito a um carregamento complicado.

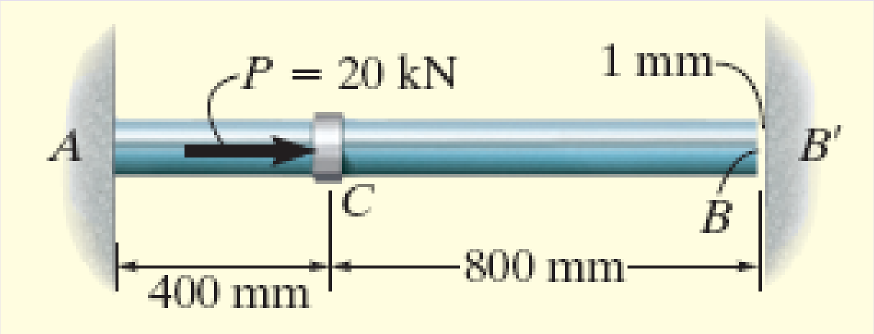
Elemento com carga axial estaticamente indeterminado

- A barra é ***estatisticamente indeterminada*** quando as equações de equilíbrio não são suficientes para determinar as reações.
- $\Sigma F = 0$ $F_A + F_B - P = 0$ (???)
- $\delta_{AB}=0$ (condição de compatibilidade) $\frac{F_A L_{AC}}{AE} - \frac{F_B L_{CB}}{AE} = 0$
- Ou por superposição! $\frac{P L_{AC}}{AE} - \frac{F_B L}{AE} = 0$



Exemplo 3

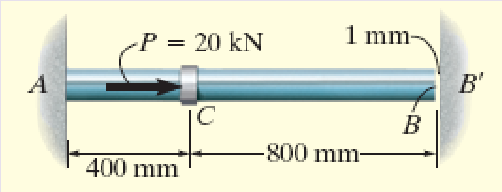
A haste de aço tem diâmetro de 5 mm e está presa à parede fixa em *A*. Antes de ser carregada, há uma folga de 1 mm entre a parede *B*' e a haste. Determine as reações em *A* e *B*' se a haste for submetida a uma força axial *P* = 20 kN. Despreze o tamanho do colar em *C*. ($E_{aço}$ = 200 GPa)



Solução:

O equilíbrio da haste exige $\quad + \rightarrow \sum F_x = 0; \quad -F_A - F_B + 20\left(10^3\right) = 0 \qquad (1)$

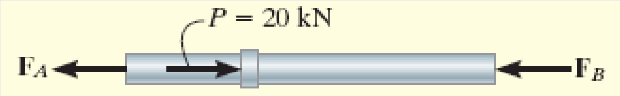
A condição de compatibilidade para a haste é $\quad \delta_{B/A} = 0{,}001\text{m}$

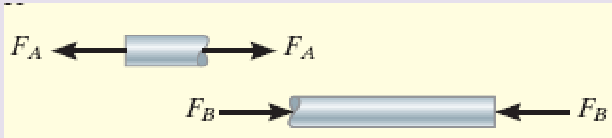


Usando a relação carga-deslocamento,

$$\delta_{B/A} = 0{,}001 = \frac{F_A L_{AC}}{AE} - \frac{F_B L_{CB}}{AE}$$

$$F_A(0{,}4) - F_B(0{,}8) = 3.927{,}0 \text{ N} \cdot \text{m} \qquad (2)$$

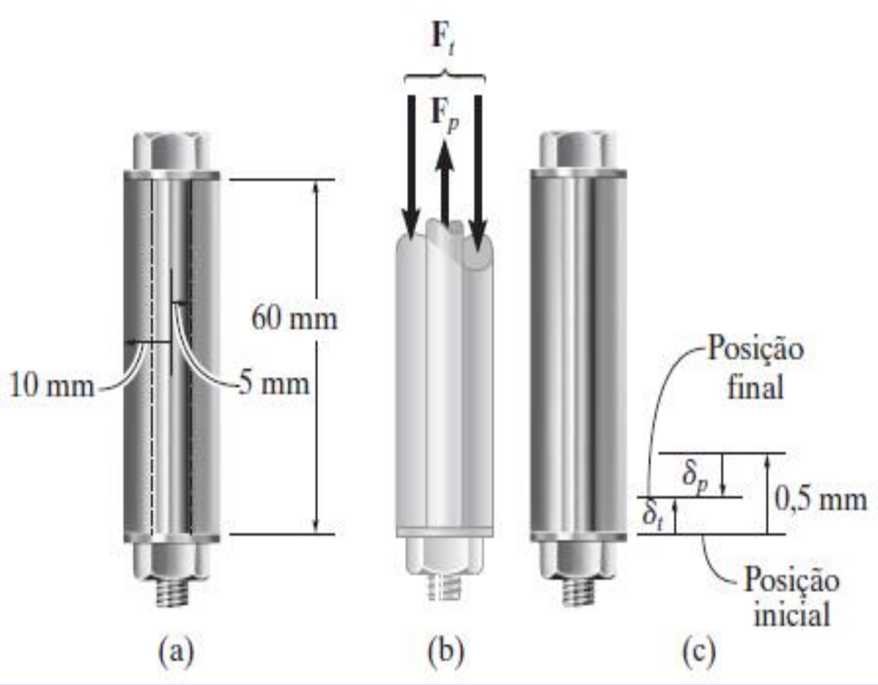




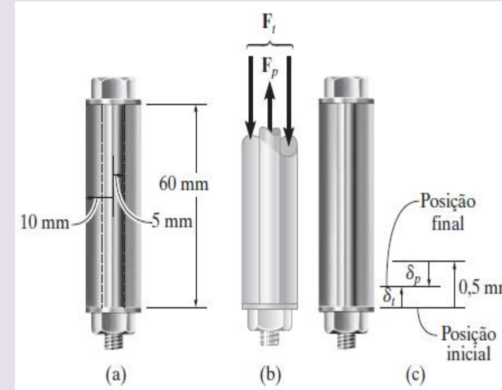
As equações 1 e 2 nos dão F_A = 16,6 kN e F_B = 3,39 kN. (Resposta)

Exemplo 4

O parafuso de liga de alumínio 2014-T6 (E = 75 GPa) é apertado de modo a comprimir um tubo cilíndrico de liga de magnésio Am 1004-T61 (E = 45 GPa). O tubo tem raio externo de 10 mm, e consideramos que o raio interno do tubo e o raio do parafuso são ambos 5 mm. As arruelas nas partes superior e inferior do tubo são consideradas rígidas e têm espessura desprezível. Inicialmente, a porca é apertada levemente a mão; depois é apertada mais meia-volta com uma chave de porca. Se o parafuso tiver 25,4 roscas (filetes) por polegada, determine a tensão no parafuso.



Solução:



O equilíbrio exige $+\uparrow \sum F_y = 0; \qquad F_p - F_t = 0 \qquad (1)$

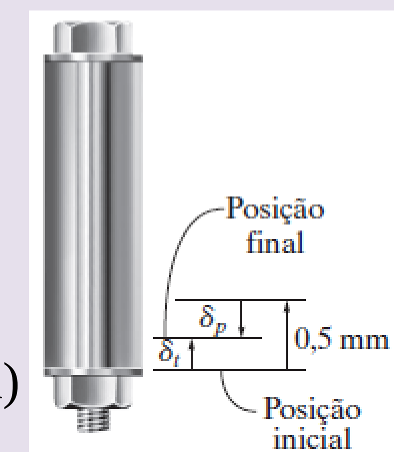
Quando a porca é apertada contra o parafuso, o tubo encurta.

$$\left(+\uparrow\right) \qquad \delta_t = 0{,}5 - \delta_p$$

Considerando dois módulos de elasticidade,

$$\frac{F_t(0{,}060)}{\pi\left[0{,}010^2 - 0{,}005^2\right]\left[45\left(10^9\right)\right]} = 0{,}0005 - \frac{F_p(0{,}060)}{\pi\left[0{,}005^2\right]\left[75\left(10^9\right)\right]} \qquad (2)$$

Resolvendo as equações 1 e 2 simultâneamente, temos $F_p = F_t = 31.556 = 31{,}56\ \text{kN}$



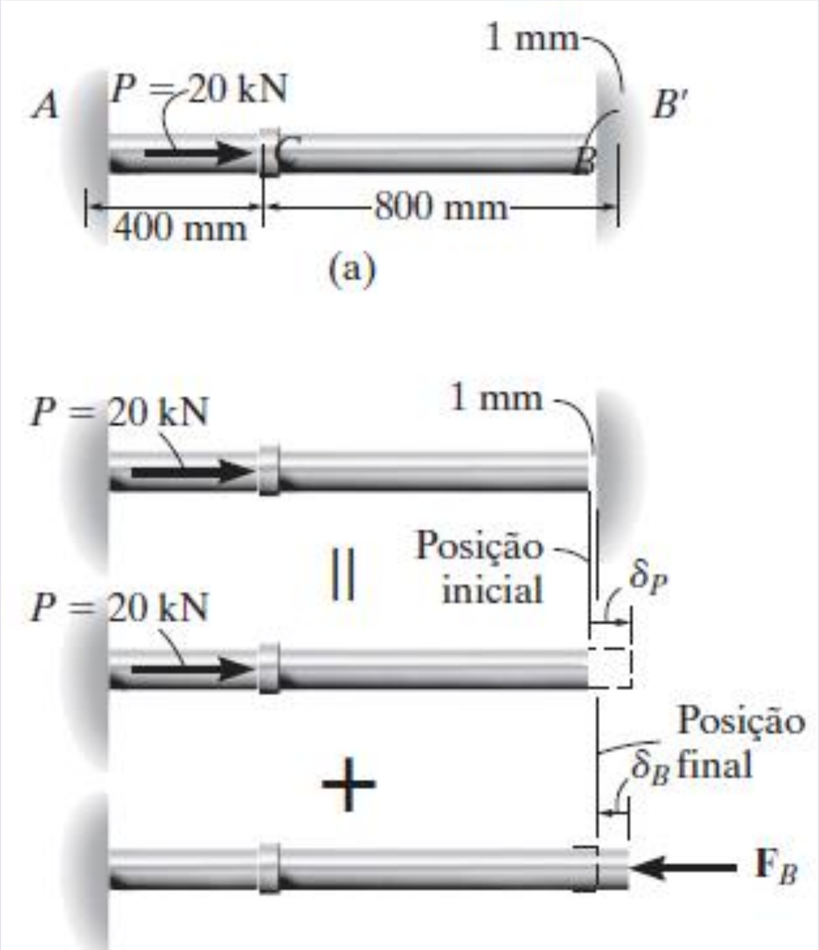
As tensões no parafuso e no tubo são, portanto,

$$\sigma_p = \frac{F_p}{A_p} = \frac{31.556}{\pi\left(5^2\right)} = 401{,}8\ \text{N/mm}^2 = 401{,}8\ \text{MPa (Resposta)}$$

$$\sigma_t = \frac{F_t}{A_t} = \frac{31.556}{\pi\left(10^2 - 5^2\right)} = 133{,}9\ \text{N/mm}^2 = 133{,}9\ \text{MPa (Resposta)}$$

Exemplo 5

A haste de aço A-36 tem diâmetro de 5 mm. Está presa à parede fixa em *A* e, antes de ser carregada, há uma folga de 1 mm entre a parede em *B*' e a haste. Determine as reações em *A* e *B*'.



Solução:

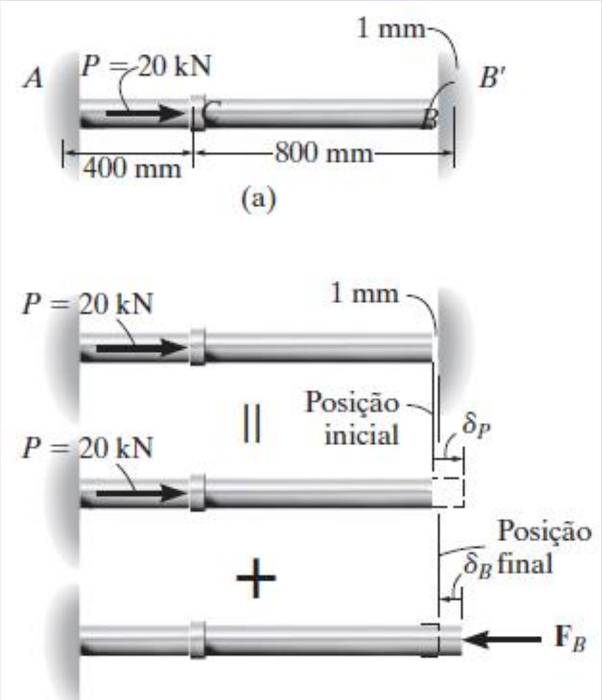
Considere o apoio em *B*' como redundante e usando o princípio da superposição

$$\xrightarrow{+} \quad 0{,}001 = \delta_P - \delta_B \qquad (1)$$

Além,

$$\delta_P = \frac{PL_{AC}}{AE} = \frac{\left[20\left(10^3\right)\right](0{,}4)}{\pi(0{,}0025)^2\left[200\left(10^9\right)\right]} = 0{,}002037 \text{ m}$$

$$\delta_B = \frac{F_B L_{AB}}{AE} = \frac{F_B(1{,}2)}{\pi(0{,}0025)^2\left[200\left(10^9\right)\right]} = 0{,}3056\left(10^{-6}\right)F_B$$



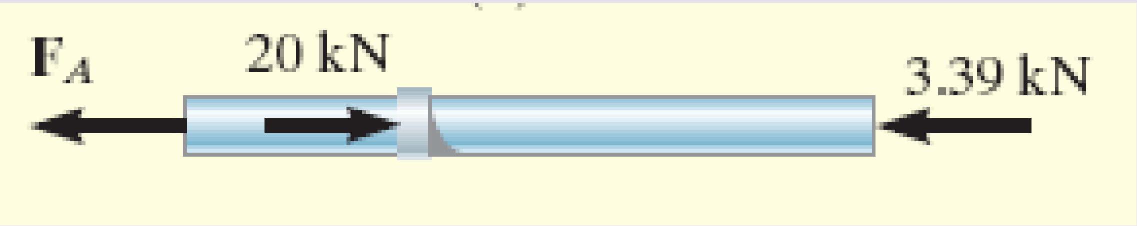
Substituindo na equação 1,temos

$$0{,}001 = 0{,}002037 - 0{,}3056\left(10^{-6}\right)F_B$$

$$F_B = 3{,}39\left(10^3\right) = 3{,}39 \text{ kN} \quad \text{(Resposta)}$$

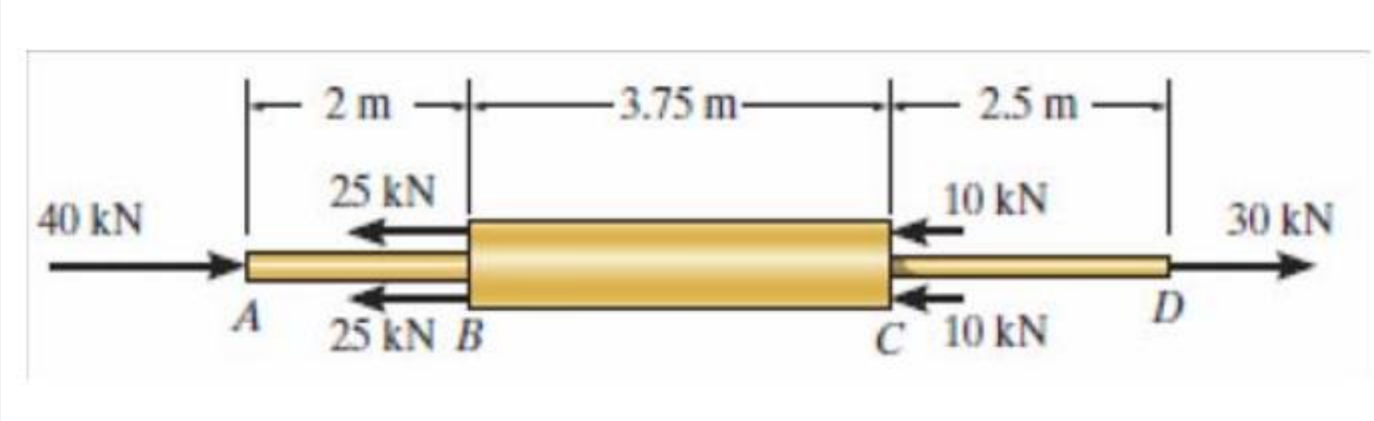
$$\xrightarrow{+} \sum F_x = 0; \qquad -F_A + 20 - 3{,}39 = 0$$

$$F_A = 16{,}6 \text{ kN} \quad \text{(Resposta)}$$



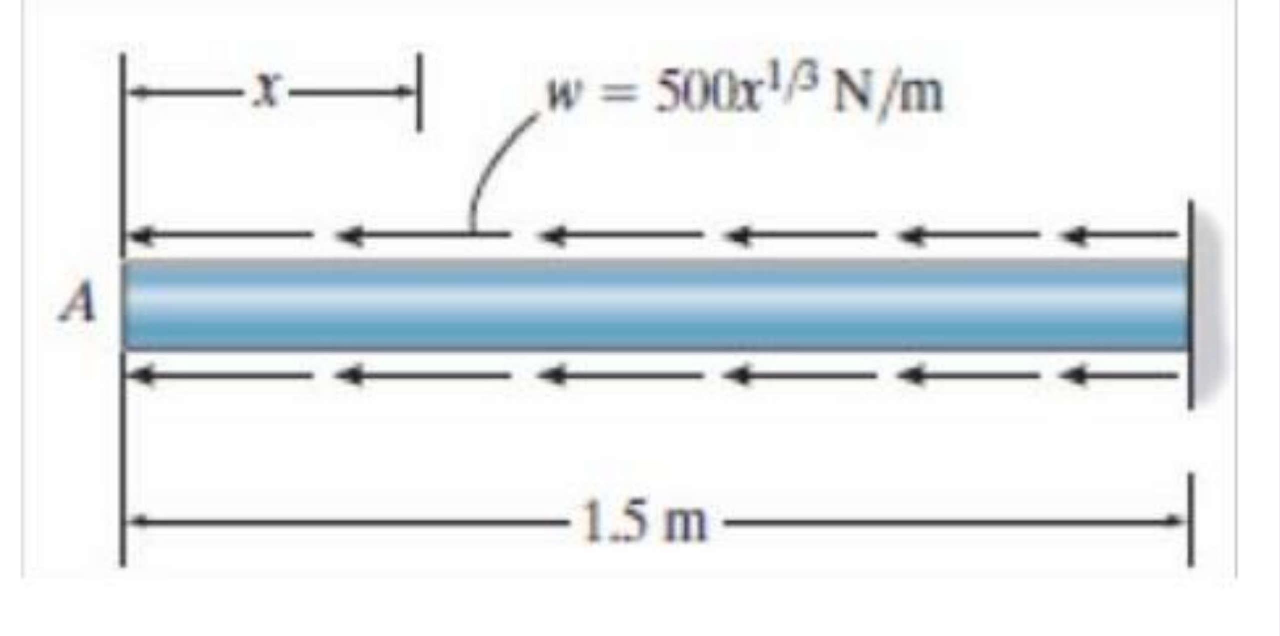
Exercícios

1. O eixo de cobre está sujeito às carga axiais mostradas na figura. Determine o deslocamento da extremidade A em relação à extremidade D se os diâmetros de cada segmento forem d_{AB} = 20 mm; d_{BC} = 25 mm e d_{CD} = 12 mm. Considere E_{cobre} = 126 GPa (4.4)



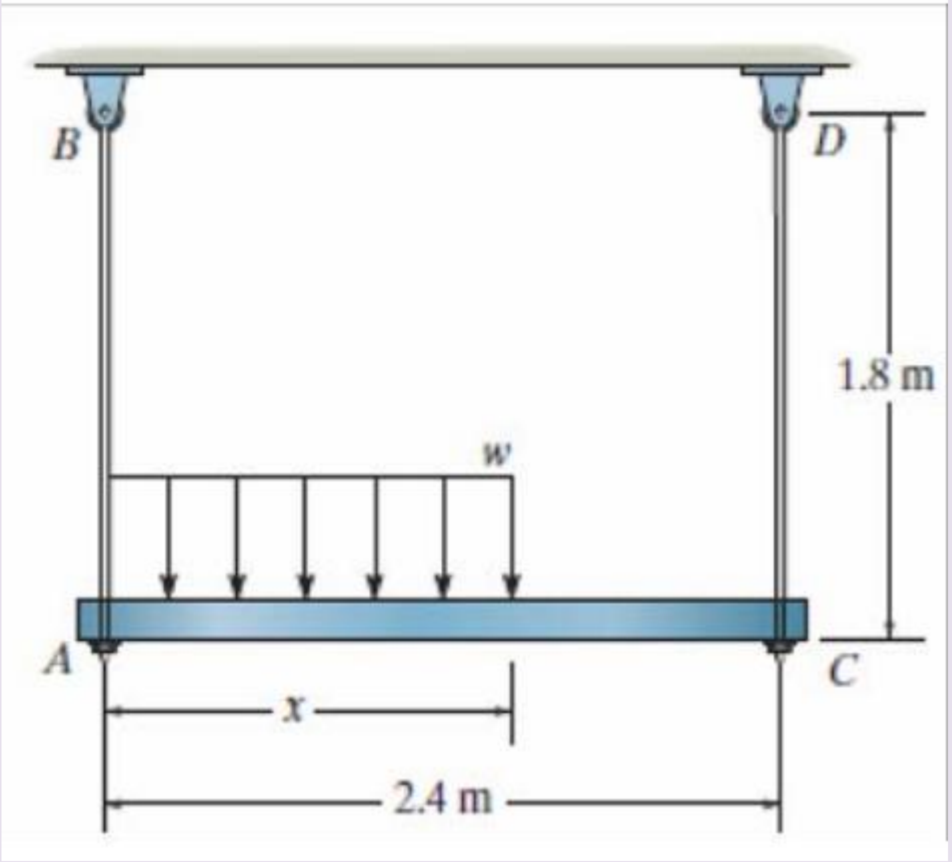
Exercícios

2. A barra tem área de seção transversal de 1800 mm^2 e E = 250 GPa. Determine o deslocamento da extremidade A da barra quando submetida ao carregamento distribuído (4.10).



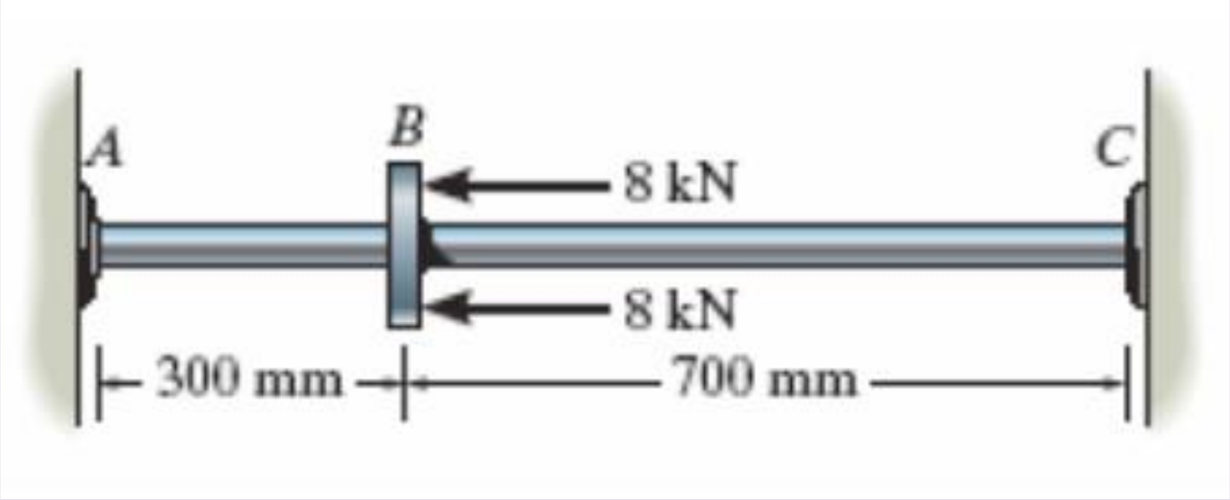
Exercícios

3. A viga rígida está apoiada em suas extremidades por dois tirantes de aço A36. Os diâmetros das hastes são d_{AB} = 12 mm e d_{CD} = 7,5 mm. Se a tensão admissível para o aço for σ_{adm} = 115 Mpa, determine a intensidade da carga distribuída w e seu comprimento x sobre a viga para que esta permaneça na posição horizontal quando carregada (4.21).



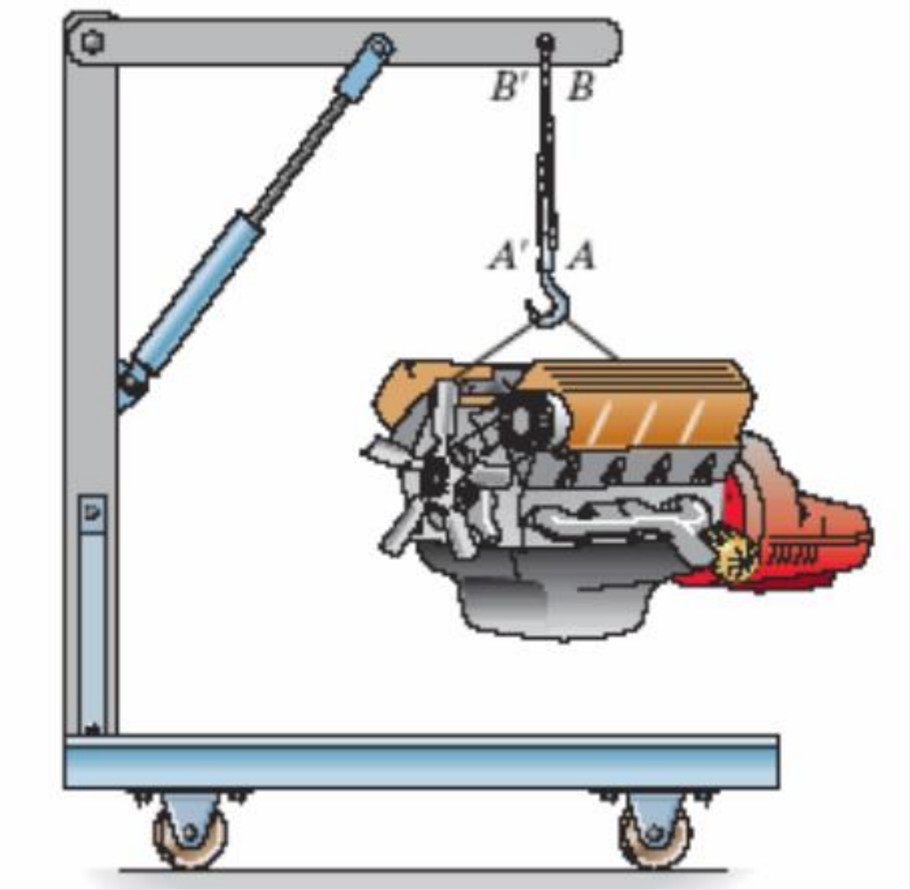
Exercícios

4. O tubo de aço A36 tem raio externo de 20 mm e raio interno de 15mm. Se ele se ajustar exatamente entre as paredes fixas antes de ser carregado, determine a reação nas paredes quando for submetido à carga mostrada (4.36).



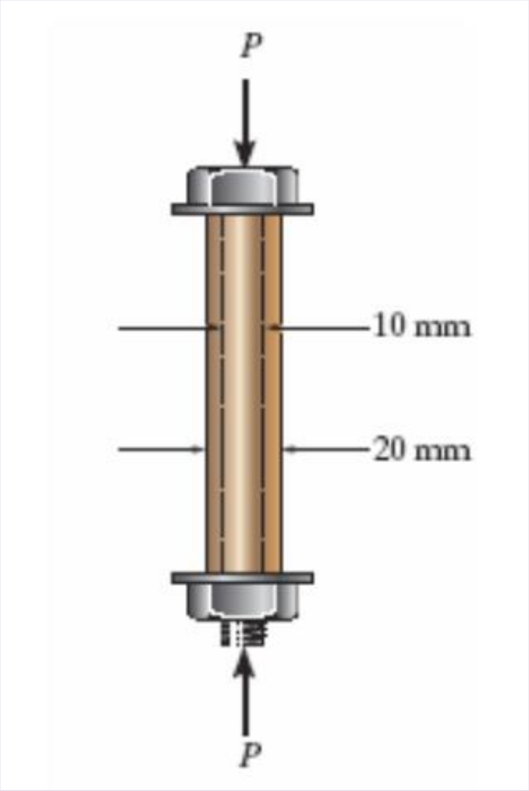
Exercícios

5. Dois cabos de aço A36 são utilizados para suportar o motor de 3,25 kN. O comprimento original de AB é 800mm e o de A´B´ é 800,2 mm. Determine a força suportada por cada cabo quando o motor é suspenso por eles. Cada cabo tem área de seção transversal de 6,25 mm^2 (4.42).



Exercícios

6. Um parafuso de aço com 10 mm de diâmetro está embutido em uma luva de bronze. O diâmetro externo dessa luva é 20 mm e seu diâmetro interno é 10 mm. Se a tensão de escoamento para o aço for $\sigma_{esc/aço}$ = 640 Mpa e para o bronze $\sigma_{esc/bronze}$ = 520 Mpa, determine o valor da maior carga elástica P que pode ser aplicada ao conjunto. $E_{aço}$ = 200 Gpa, E_{br} = 100 Gpa (4.54).



Tensão térmica

- Uma mudança na temperatura pode provocar alterações nas dimensões de um material.
- Se o material for homogêneo e isotrópico, $\delta_T = \alpha \Delta T L$

α = ***coeficiente linear de expansão térmica***, propriedade do material

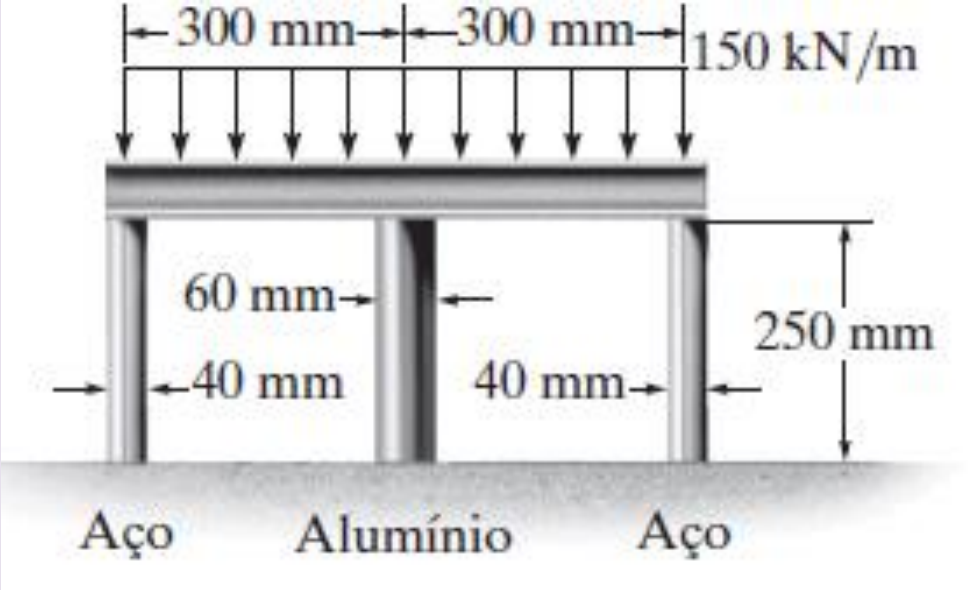
ΔT = variação na temperatura do elemento

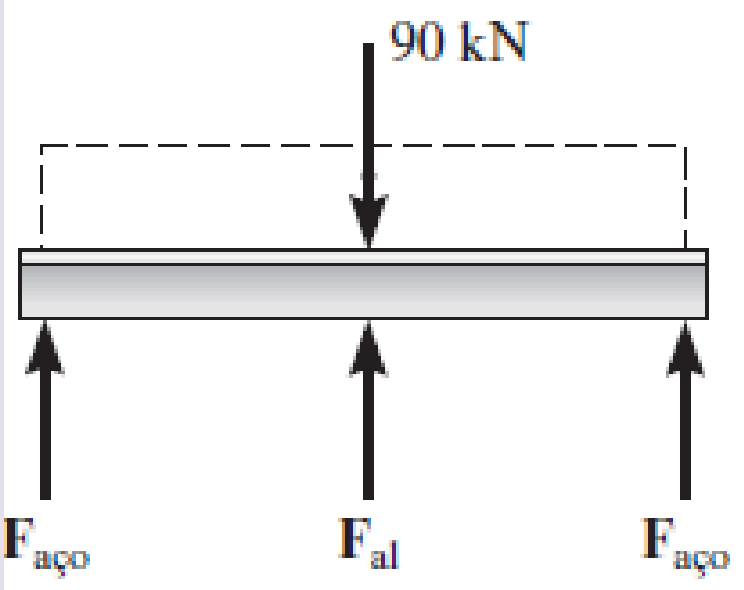
L = comprimento inicial do elemento

δ_T = variação no comprimento do elemento

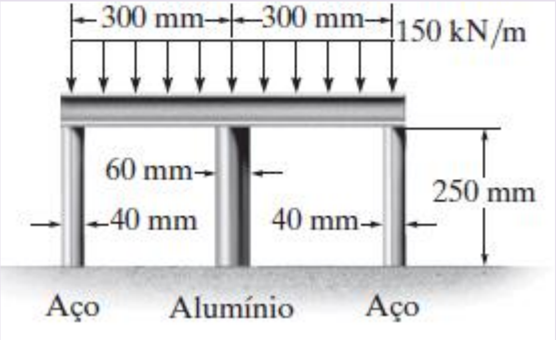
Exemplo 6

Uma barra rígida está presa à parte superior de três postes, feitos de aço A-36 e alumínio 2014-T6. Cada um dos postes tem comprimento de 250 mm quando não há nenhuma carga aplicada à barra e a temperatura é de $T_1 = 20^\circ$ C. Determine a força suportada por cada poste se a barra for submetida a um carregamento distribuído uniformemente de 150 kN/m e a temperatura aumentar até $T_2 = 80^\circ$ C.



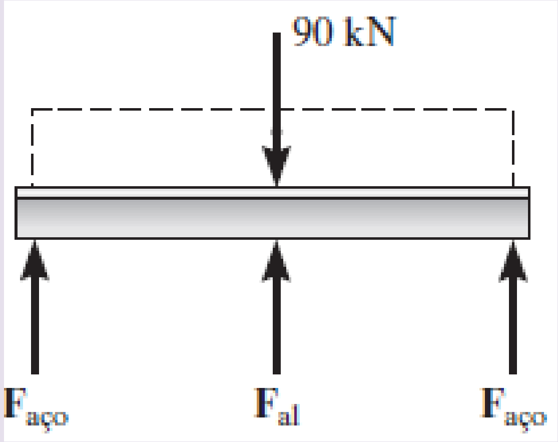


Solução:



Do diagrama de corpo livre nós temos

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad 2F_{\text{aço}} + F_{\text{al}} - 90\left(10^3\right) = 0 \qquad (1)$$

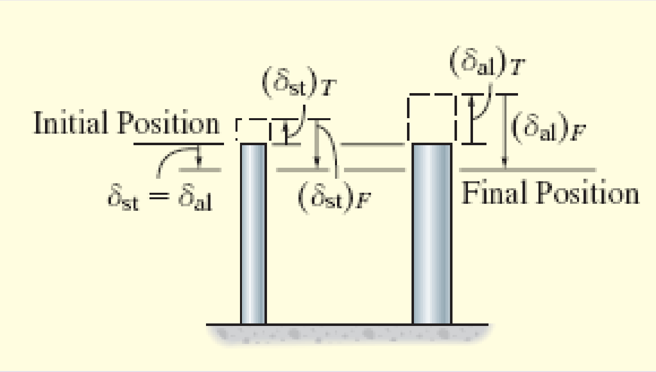


A parte superior de cada poste sofre o mesmo deslocamento. Em consequência, $(+\downarrow) \quad \delta_{\text{aço}} = \delta_{\text{al}} \qquad (2)$

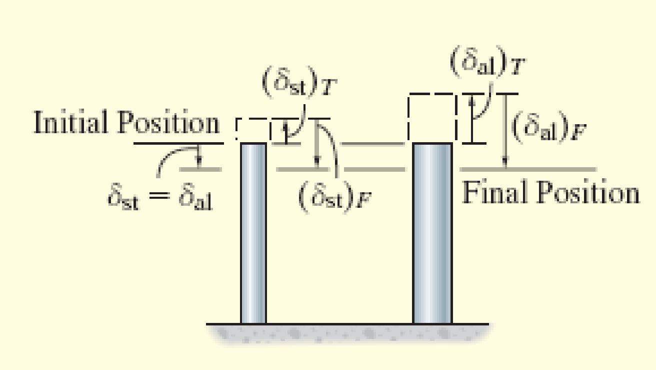
A posição final da parte superior de cada poste é igual ao deslocamento causado pelo aumento da temperatura e a força de compressão axial interna.

$$(+\downarrow) \qquad \delta_{\text{aço}} = -\left(\delta_{\text{aço}}\right)_T + \left(\delta_{\text{aço}}\right)_F$$

$$(+\downarrow) \qquad \delta_{\text{al}} = -\left(\delta_{\text{al}}\right)_T + \left(\delta_{\text{al}}\right)_F$$



Solução:



Aplicando a equação 2, temos

$$-\left(\delta_{\text{aço}}\right)_T + \left(\delta_{\text{aço}}\right)_F = -\left(\delta_{\text{aço}}\right)_T + \left(\delta_{\text{al}}\right)_F$$

Com referência às propriedades dos materiais, temos

$$-\left[12\left(10^{-6}\right)\right](80-20)(0{,}25) + \frac{F_{\text{aço}}(0{,}25)}{\pi(0{,}02)^2\left[200\left(10^9\right)\right]} = -\left[23\left(10^{-6}\right)\right](80-20)(0{,}25) + \frac{F_{\text{al}}(0{,}25)}{\pi(0{,}03)^2\left[73{,}1\left(10^9\right)\right]}$$

$$F_{\text{aço}} = 1{,}216F_{\text{al}} - 165{,}9\left(10^3\right) \qquad (3)$$

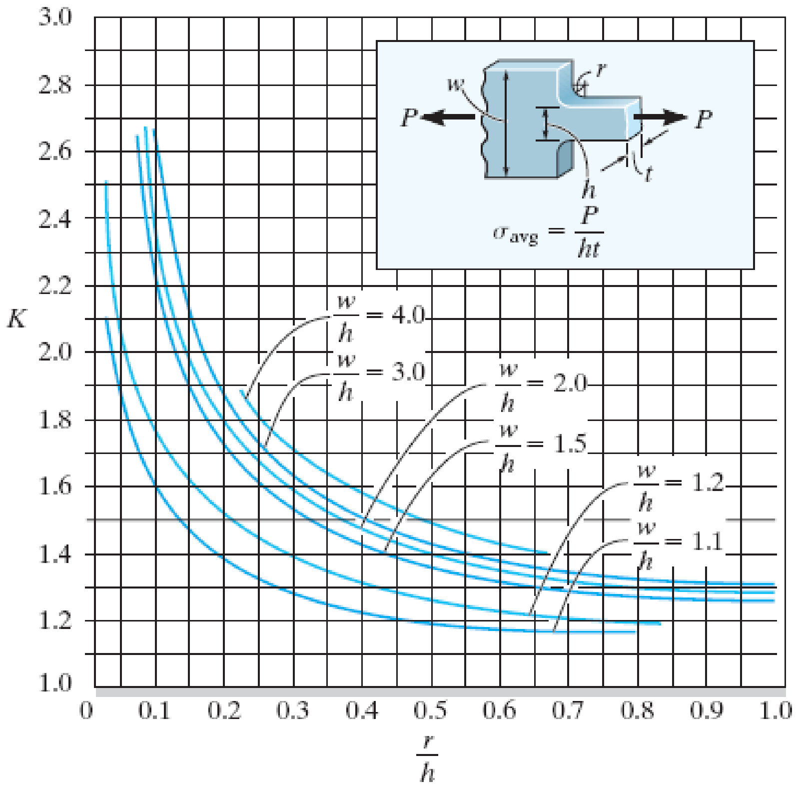
Resolvendo equações 1 e 3 simultaneamente, $F_{\text{aço}} = -16{,}4\ \text{kN}$ e $F_{\text{al}} = 123\ \text{kN}$ (Resposta)

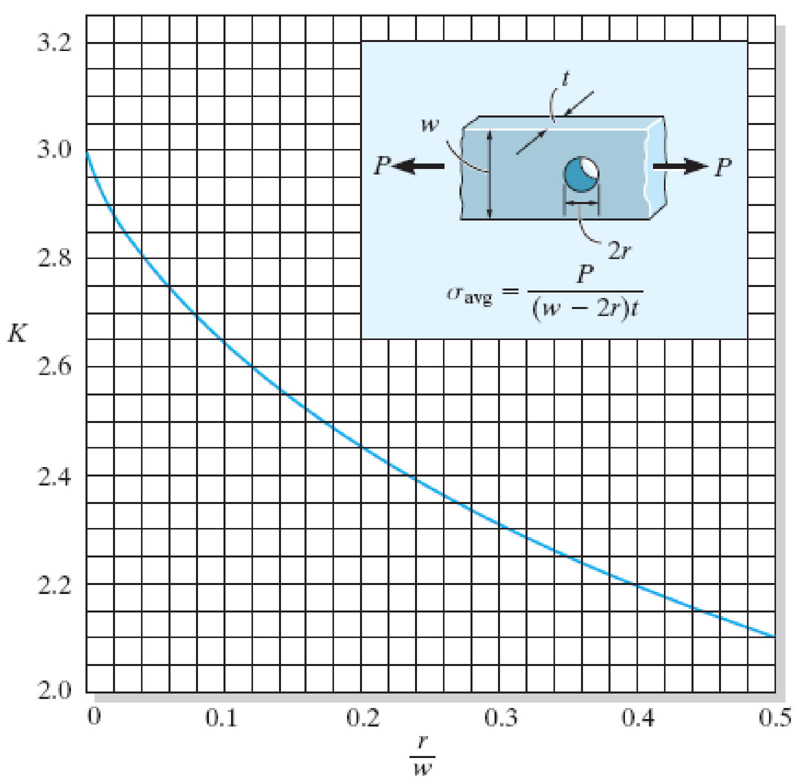
Concentrações de tensão

- *Concentrações de tensão* ocorrem em seções onde a área da seção transversal muda repentinamente.

$$K = \frac{\sigma_{\text{máx}}}{\sigma_{\text{méd}}}$$

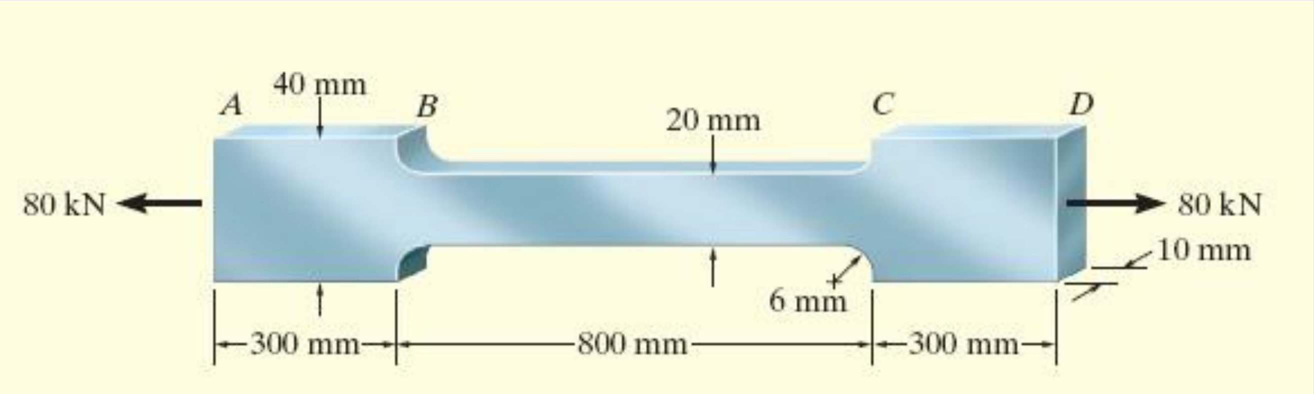
- Tensão máxima é determinada usando uma *fator de concentração de tensão*, *K*, o qual é uma função de geometria.





Exemplo 7

A tira de aço está sujeita a uma carga axial de 80 kN. Determine a tensão normal máxima desenvolvida na tira e o deslocamento de uma de suas extremidades em relação à outra. A tensão de escoamento do aço é de σ_e = 700 MPa e $E_{aço}$ = 200 GPa.



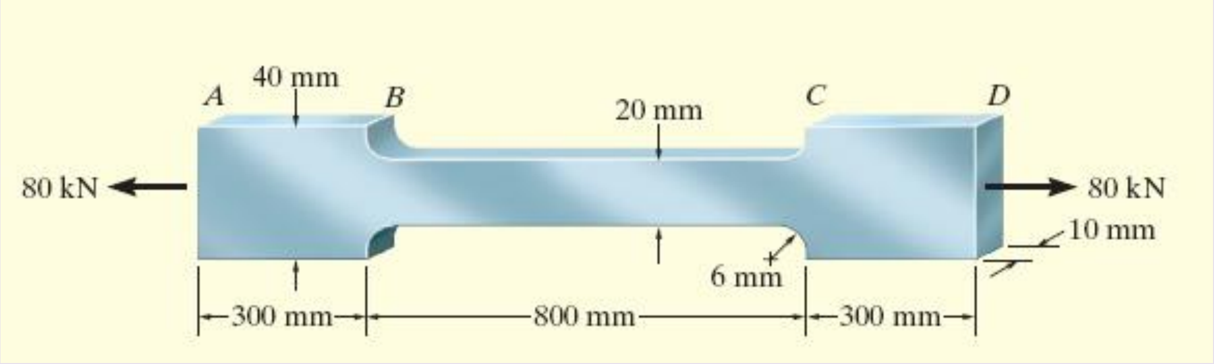
Solução:

A tensão normal máxima ocorre na menor seção transversal (*B*-*C*),

$$\frac{r}{h} = \frac{6}{20} = 0{,}3, \qquad \frac{w}{h} = \frac{40}{20} = 2$$

Usando a tabela de geometria, nós temos *K* = 1,6. Portanto, a tensão máxima é

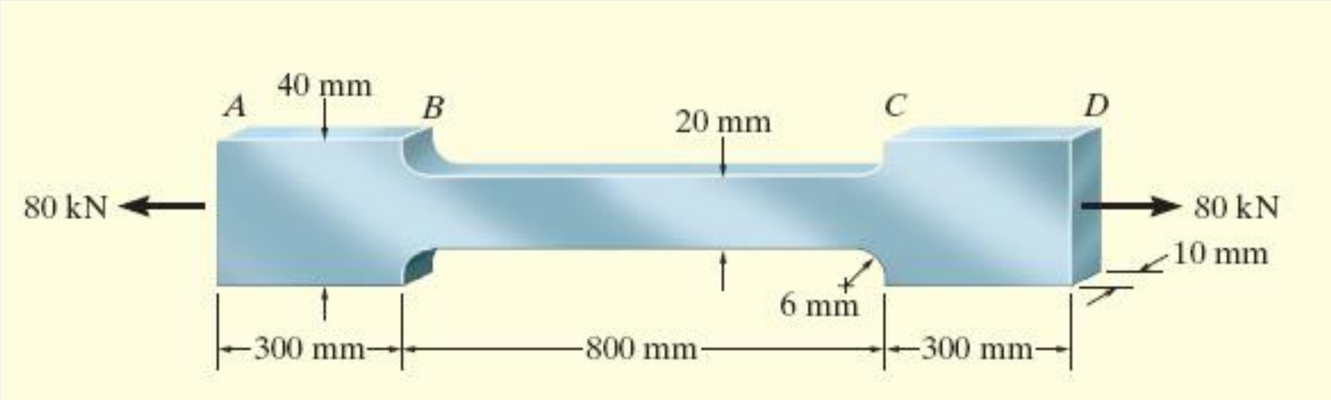
$$\sigma_{\text{máx}} = K\frac{P}{A} = 1{,}6\left[\frac{80\left(10^3\right)}{(0{,}02)(0{,}01)}\right] = 640\,\text{MPa} \quad \text{(Resposta)}$$



Desprezando as deformações localizadas ao redor da carga aplicada e na região de mudança repentina da seção transversal (princípio de Saint-Venant's), temos

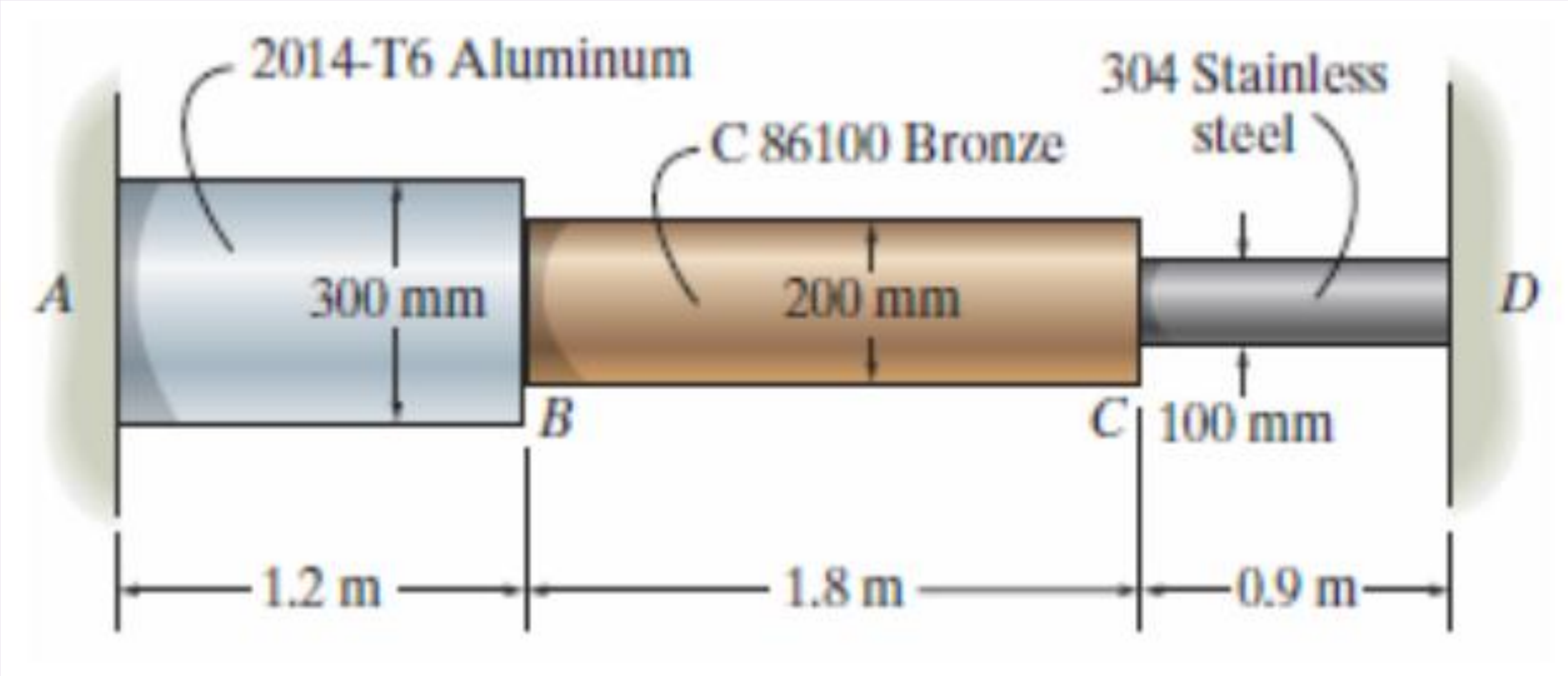
$$\delta_{A/D} = \sum \frac{PL}{AE} = 2\left\{ \frac{80\left(10^3\right)(0,3)}{(0,04)(0,01)\left[200\left(10^9\right)\right]} \right\} + \left\{ \frac{80\left(10^3\right)(0,8)}{(0,02)(0,01)\left[200\left(10^9\right)\right]} \right\}$$

$$= 2,20\,\text{mm} \quad \text{(Resposta)}$$



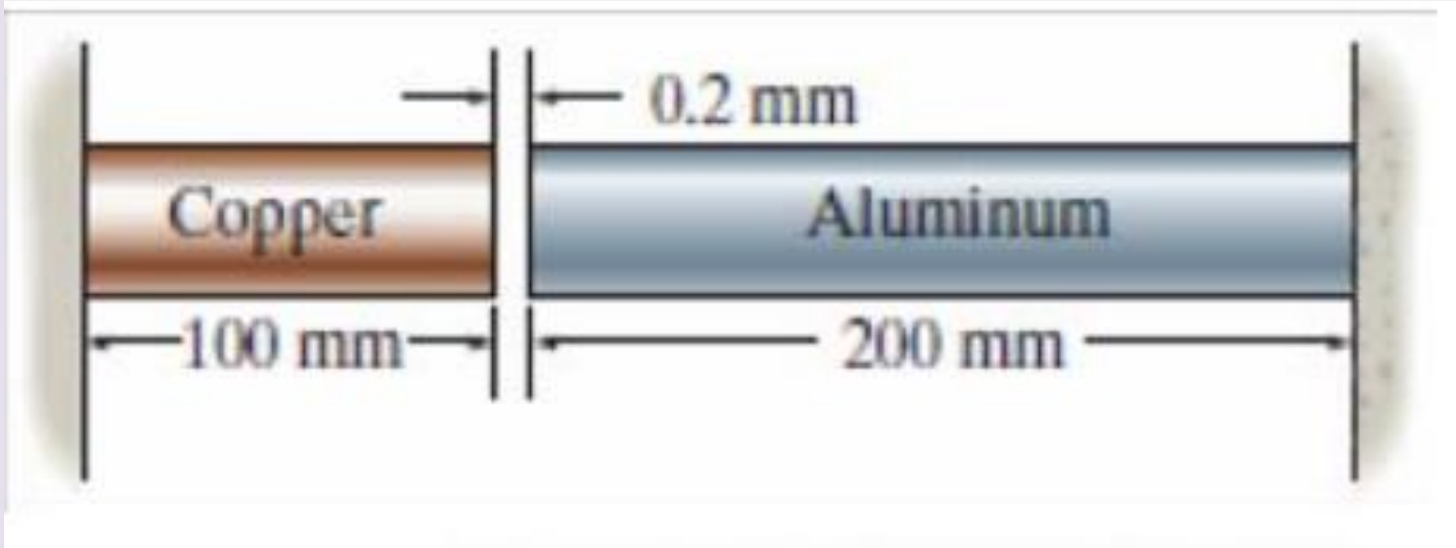
Exercícios

7. Os diâmetros e materiais de fabricação do conjunto são indicados na figura. Se o conjunto estiver bem ajustado entre seus apoios fixos quando a temperatura é T_1 = 20 ^oC, determine a tensão normal média em cada material quando a temperatura atingir T_2 = 40 ^oC (4.72).



Exercícios

8. Os dois segmentos de haste circular, um de alumínio e o outro de cobre, estão presos às paredes rígidas de tal modo que há uma folga de 0,2 mm entre eles quando T1 = 15 oC. Qual é a maior T_2 exigida para apenas fechar a folga? Cada haste tem diâmetro de 30 mm, α_{al} = 24 10^{-6} 1/ºC, E_{al} = 70 GPa α_{cu} = 17 10^{-6} 1/ºC, E_{al} = 126 Gpa. Determine a tensão normal média em cada haste se T_2 = 95 ºC (4.77).



Exercícios

9. Se a tensão normal admissível para a barra for σ_{adm}= 120 Mpa, determine a força axial máxima P que pode ser aplicada à barra (4.88).