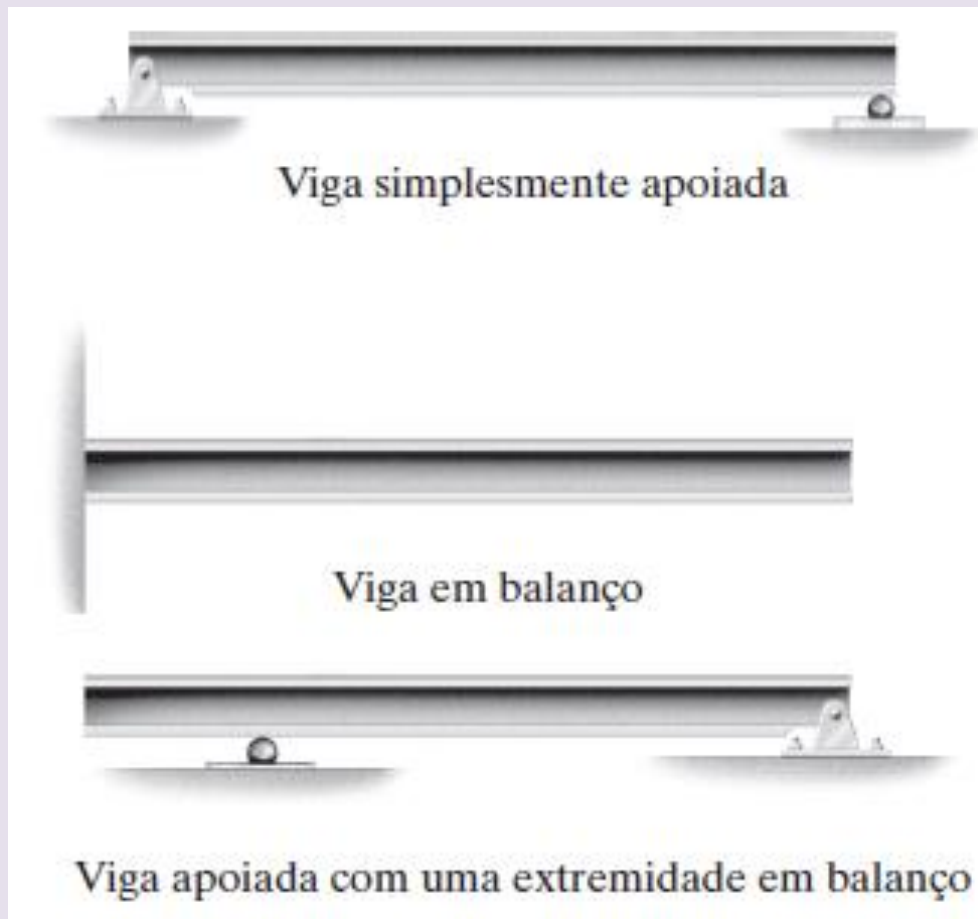


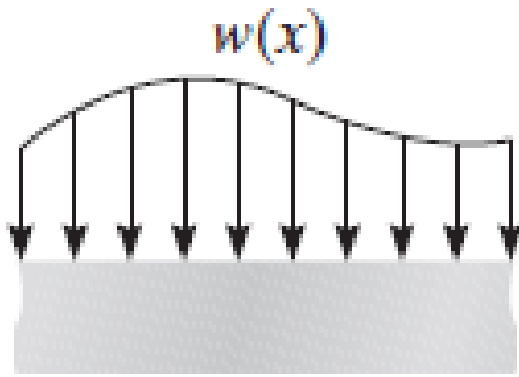
Flexão

Vamos lembrar os diagramas de força cortante e momento fletor

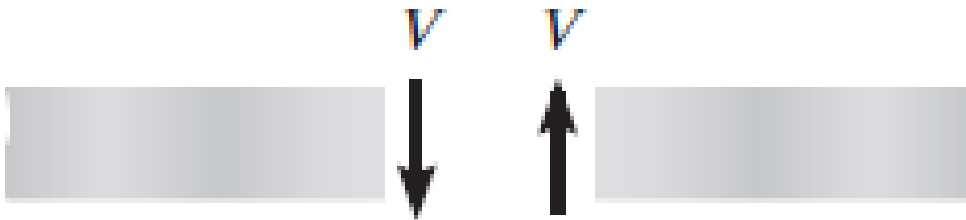
- Elementos longos e retos que suportam cargas perpendiculares a seu eixo longitudinal são denominados *vigas*.
- Vigas são classificadas de acordo com o modo como são apoiadas.



Flexão



Carga distribuída positiva



Cisalhamento interno positivo



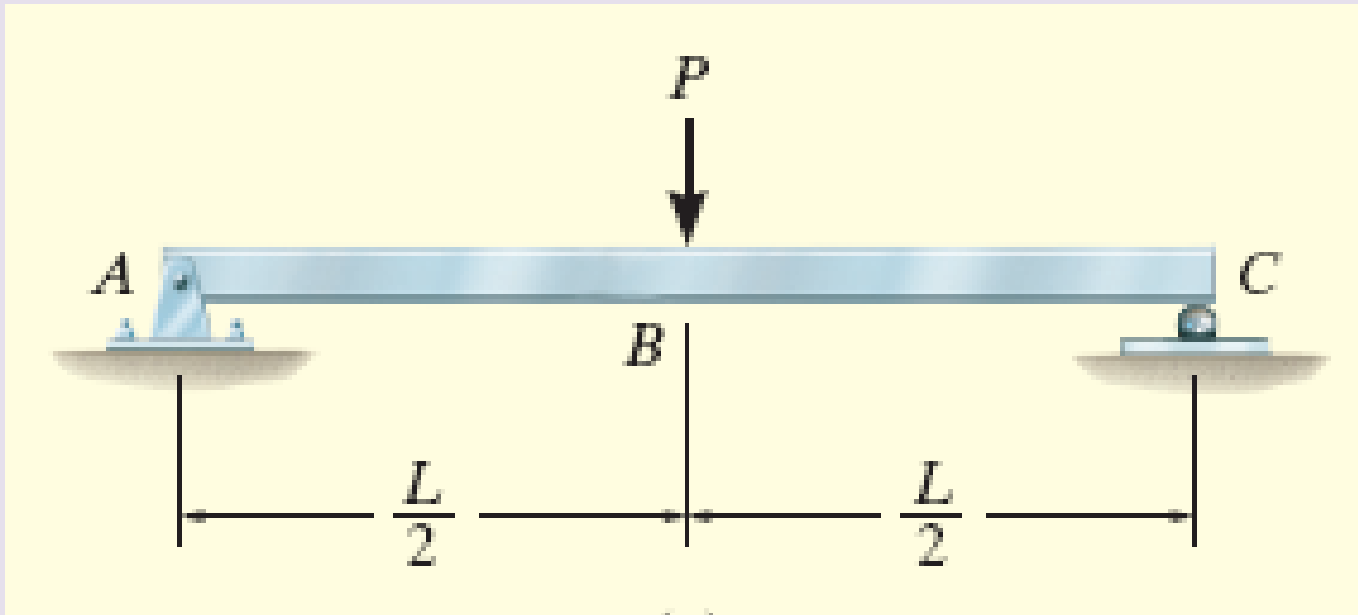
Momento interno positivo

Convenção de sinal para a viga

- Como sabemos, as tensões de *cisalhamento e momento* podem ser representadas em gráficos denominados **diagramas de esforço cortante e de momento fletor**.
- Neste exemplo, *direções positivas* indicam que a *carga distribuída* age para *baixo* na viga e a força cortante interna provoca uma rotação em sentido *horário*.
- Vamos lembrar como resolver:

Exemplo 1

Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga dada.

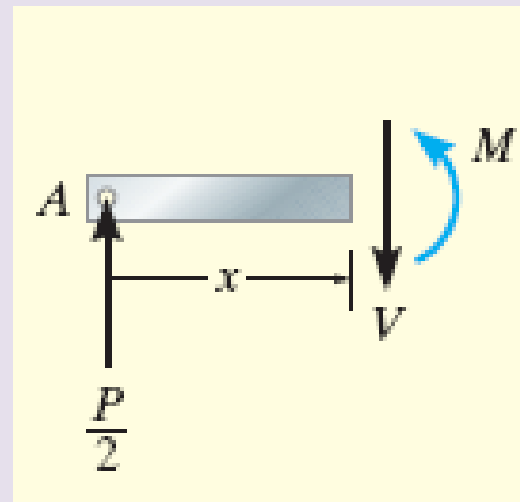


Solução:

Um diagrama de corpo livre do segmento esquerdo é mostrado abaixo. A aplicação das equações de equilíbrio produz no segmento AB:

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad V = \frac{P}{2} \quad (1)$$

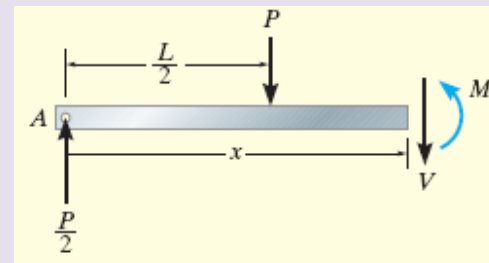
$$+\curvearrowleft \sum M = 0; \quad M = \frac{P}{2} x \quad (2)$$

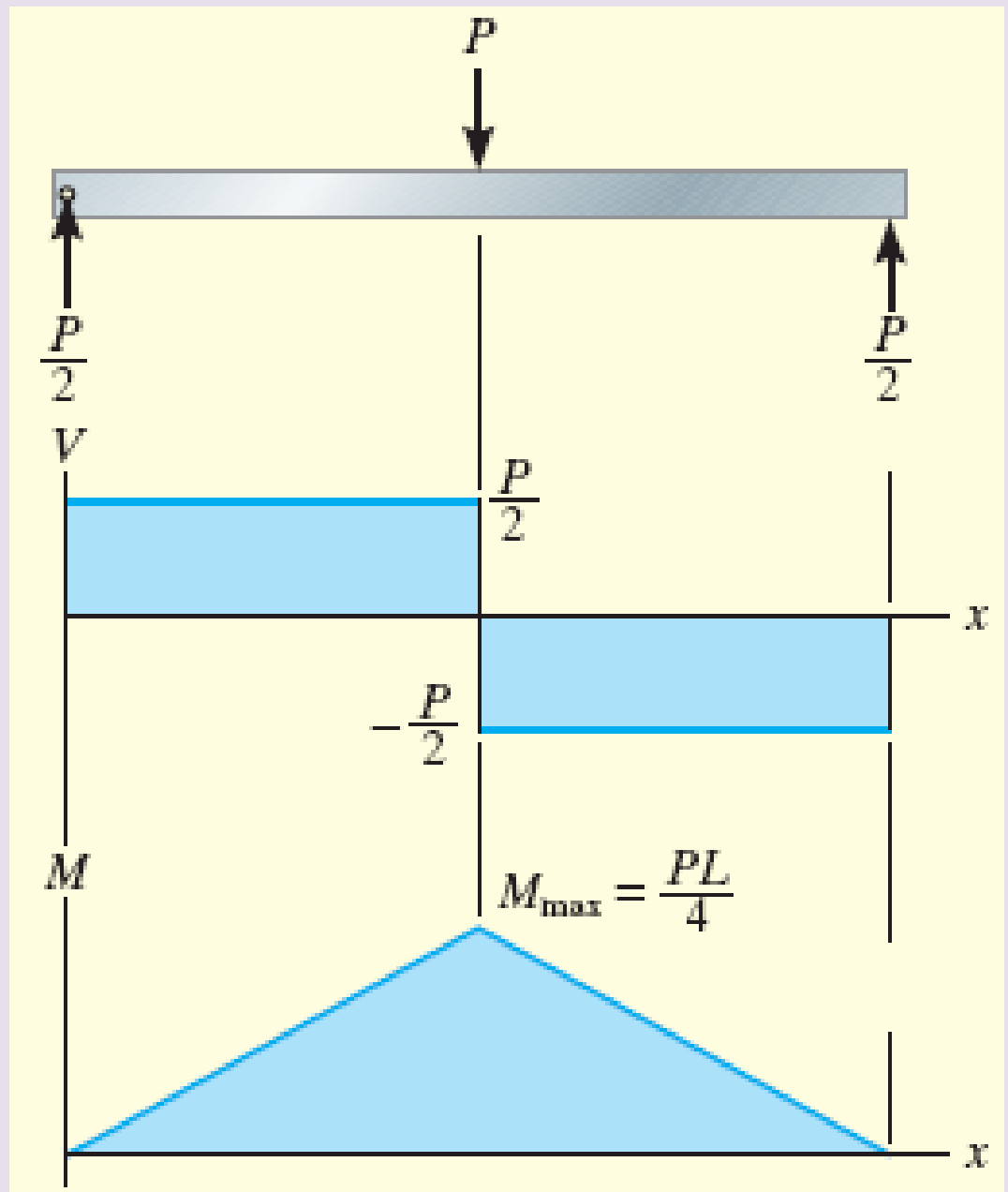


No segmento esquerdo da viga, que se estende até a distância x na região BC , temos:

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad \frac{P}{2} - P - V = 0 \Rightarrow V = -\frac{P}{2} \quad (3)$$

$$+\curvearrowleft \sum M = 0; \quad M + P\left(x - \frac{L}{2}\right) - \frac{P}{2}x \Rightarrow M = \frac{P}{2}(L - x) \quad (4)$$



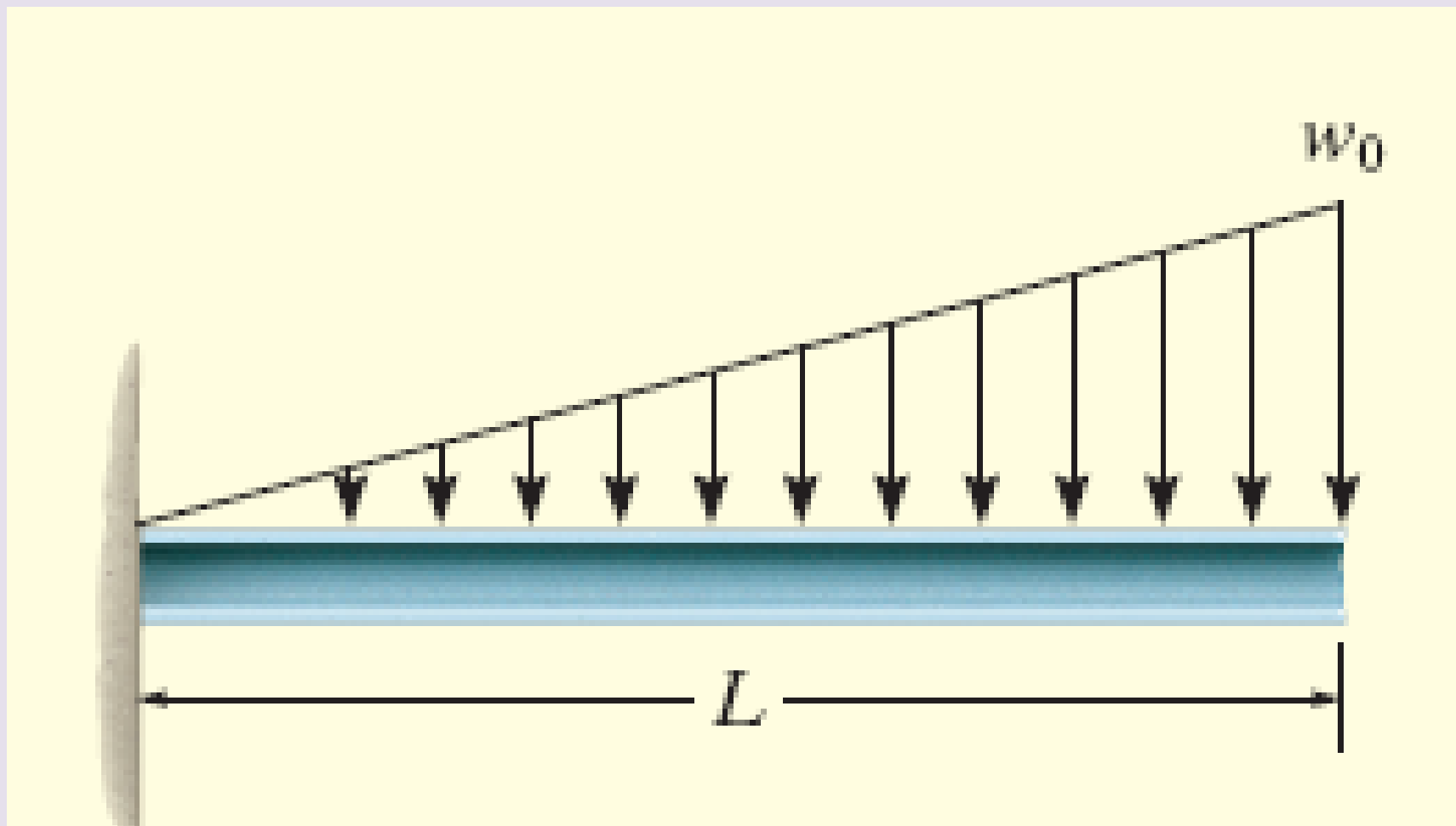


O diagrama do esforço e corte descrito pelas equações 1 e 3 →

O diagrama de momento fletor descrito pelas equações 2 e 4 →

Exemplo 2

Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga mostrada na figura.



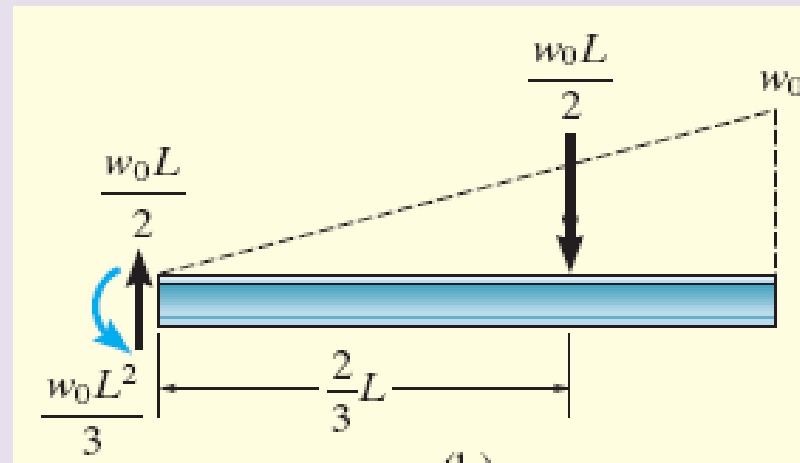
Solução:

Calculamos as reações no apoio.

A carga distribuída é substituída por sua força resultante.

A intensidade da carga triangular na seção é determinada por cálculo proporcional:

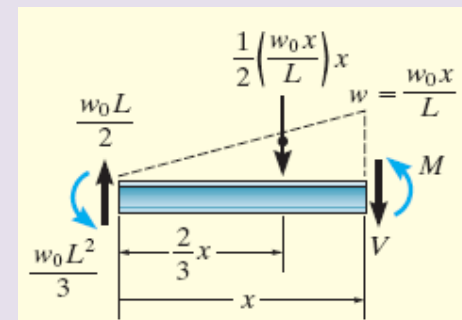
$$\frac{w}{x} = \frac{w_0}{L} \text{ ou } w = \frac{w_0}{L}x$$



A resultante do carregamento distribuído é determinada pela área sob o diagrama:

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad \frac{w_0L}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{w_0x}{L} \right) x - V = 0 \Rightarrow V = \frac{w_0}{2L} (L^2 - x^2) \quad (1)$$

$$+\curvearrowright \sum M = 0; \quad \frac{w_0L^2}{3} - \frac{w_0L}{2} (x) + \frac{1}{2} \left(\frac{w_0x}{L} \right) x \left(\frac{1}{3}x \right) + M = 0 \quad (2)$$



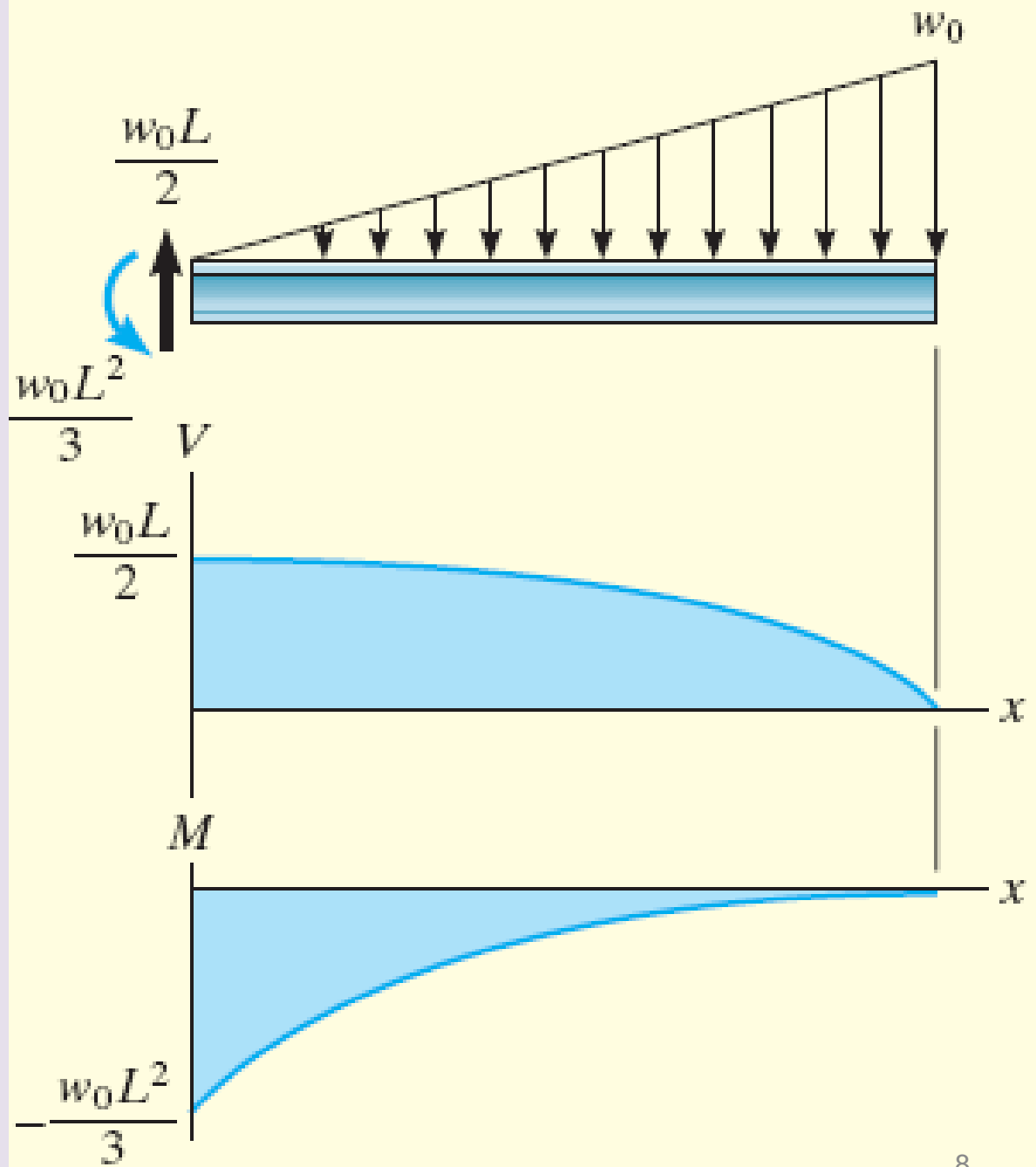
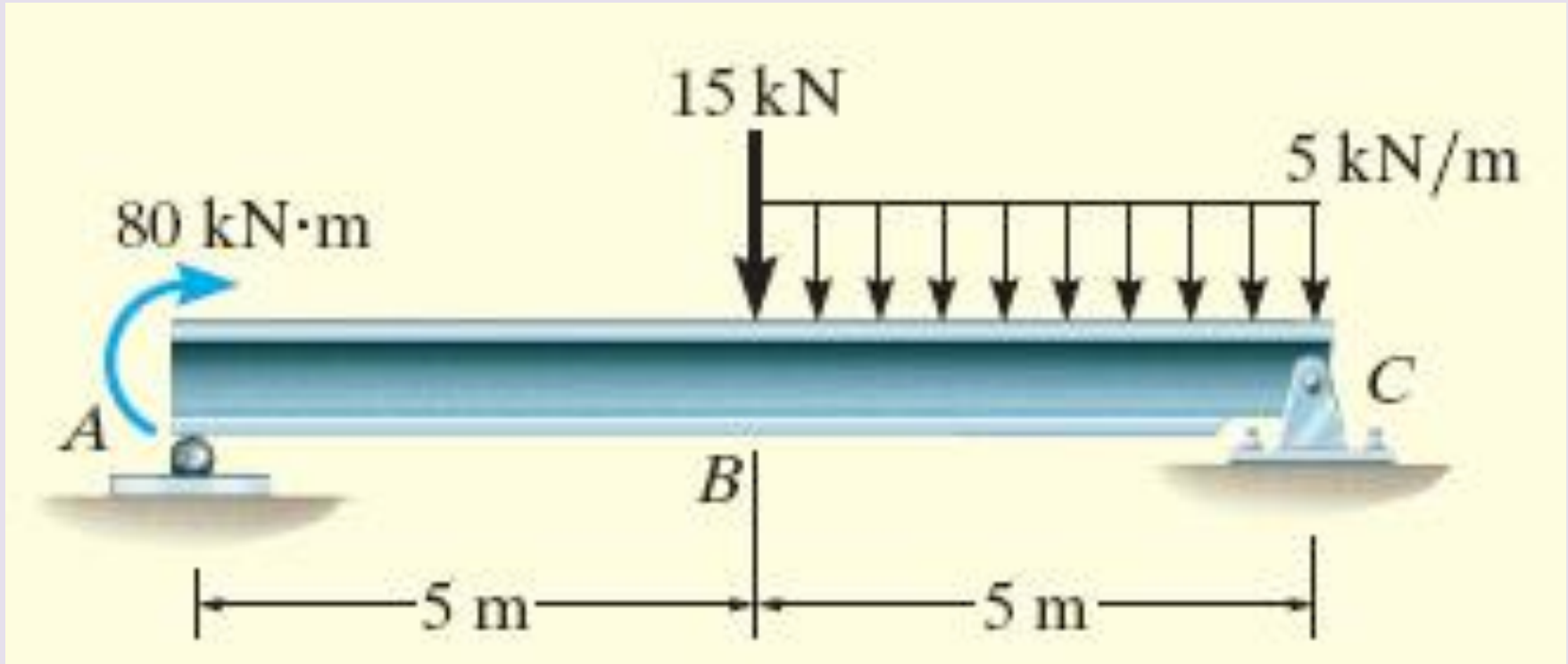


Diagrama do esforço de corte determinado pela equação 1 →

Diagrama do momento fletor determinado pela equação 2 →

Exemplo 3

Represente graficamente os diagramas do esforço cortante e do momento fletor para a viga mostrada a seguir



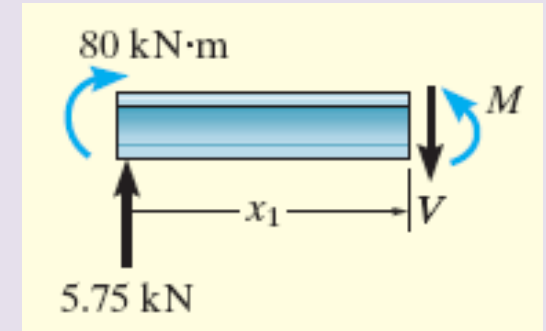
Solução:

Duas regiões devem ser consideradas para descrever o esforço de cisalhamento e o momento da viga inteira.

$$0 \leq x_1 < 5 \text{ m},$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad 5,75 - V = 0 \Rightarrow V = 5,75 \text{ kN} \quad (1)$$

$$+\curvearrowleft \sum M = 0; \quad -80 - 5,75x_1 + M = 0 \Rightarrow M = (5,75x_1 + 80) \text{ kNm} \quad (2)$$



$$5 \text{ m} < x_1 \leq 10 \text{ m},$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad 5,75 - 15 - 5(x_2 - 5) - V = 0 \Rightarrow V = (15,75 - 5x_2) \text{ kN} \quad (3)$$

$$+\curvearrowleft \sum M = 0; \quad -80 - 5,75x_2 + 15(x_2 - 5) + 5(x_2 - 5)\left(\frac{x_2 - 5}{2}\right) + M = 0$$

$$M = (-2,5x_2^2 + 15,75x_2 + 92,5) \text{ kNm} \quad (4)$$

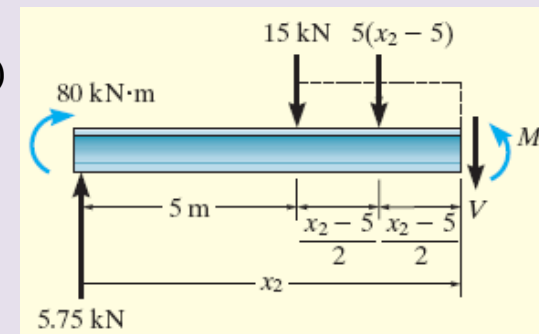
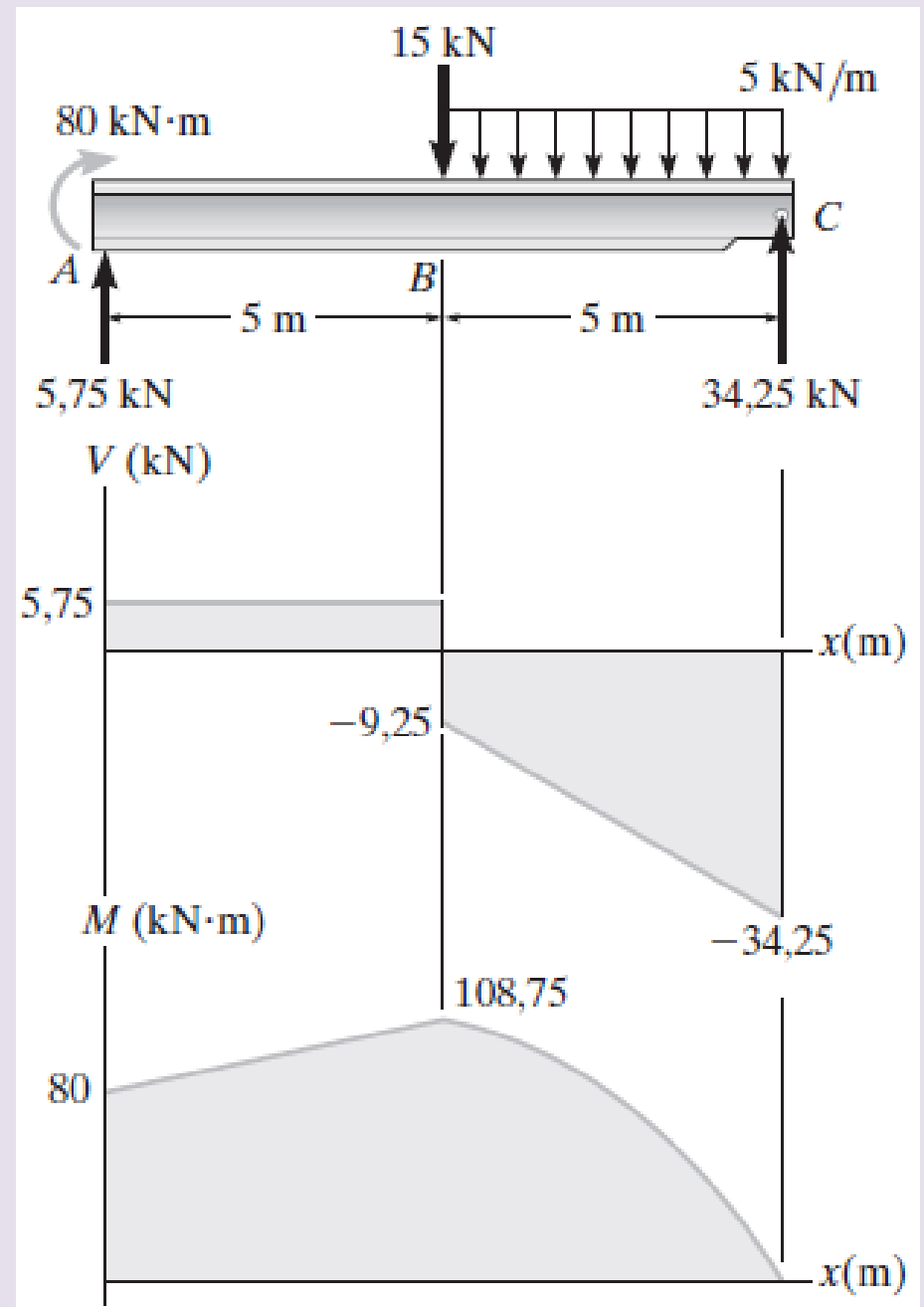


Diagrama do esforço de corte determinado pelas equações 1 e 3 →

Diagrama do momento fletor determinado pelas equações 2 e 4 →



Método gráfico para construir diagramas de esforço cortante e momento fletor

Regiões de carga distribuída

- Essas duas equações proporcionam um meio conveniente para se obter rapidamente os diagramas de força cortante e momento fletor para uma viga:

inclinação do diagrama de força cortante em cada ponto

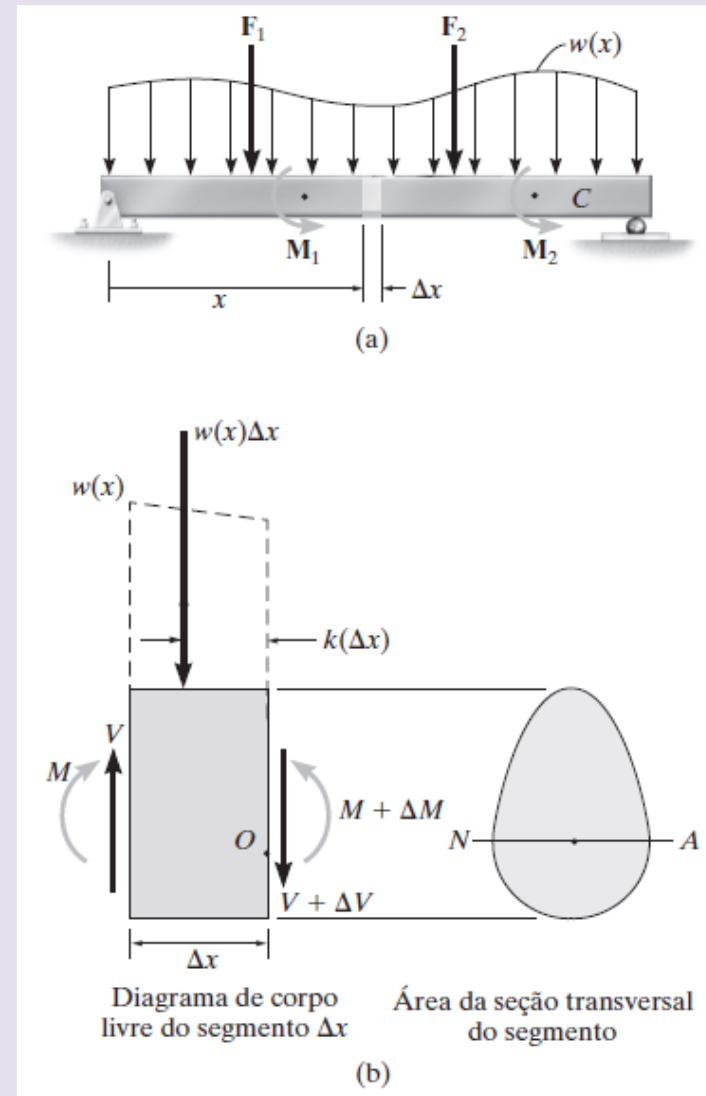
$$\frac{dV}{dx} = -w(x)$$

–intensidade da carga distribuída em cada ponto

inclinação do diagrama de momento em cada ponto

$$\frac{dM}{dx} = V$$

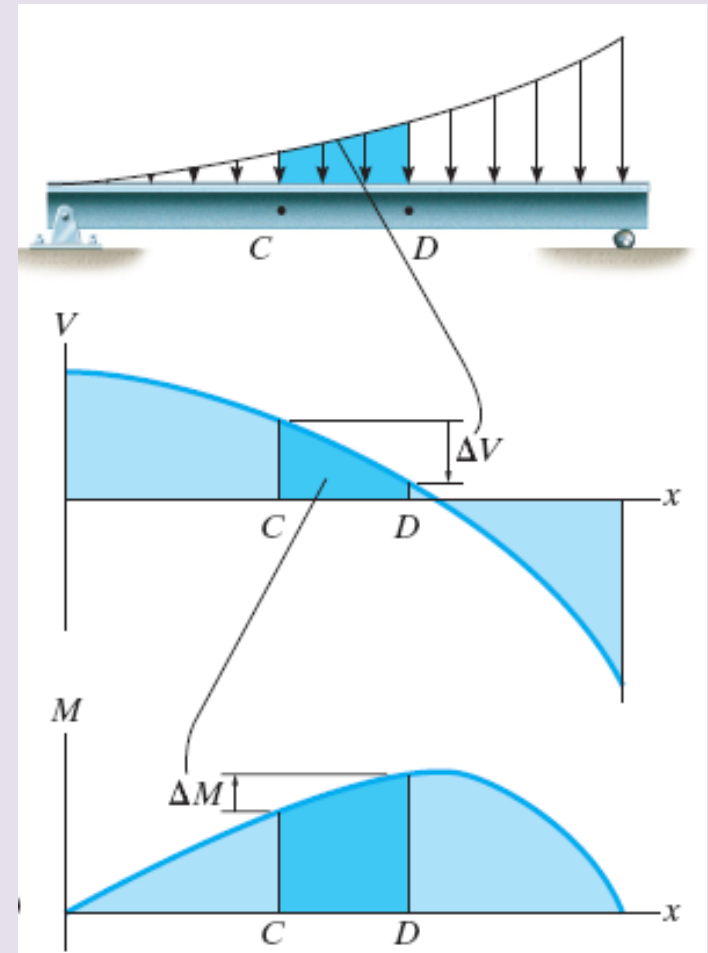
Cisalhamento (força cortante) em cada ponto



- Podemos integrar essas áreas entre quaisquer dois pontos para determinar as mudanças nos diagramas:

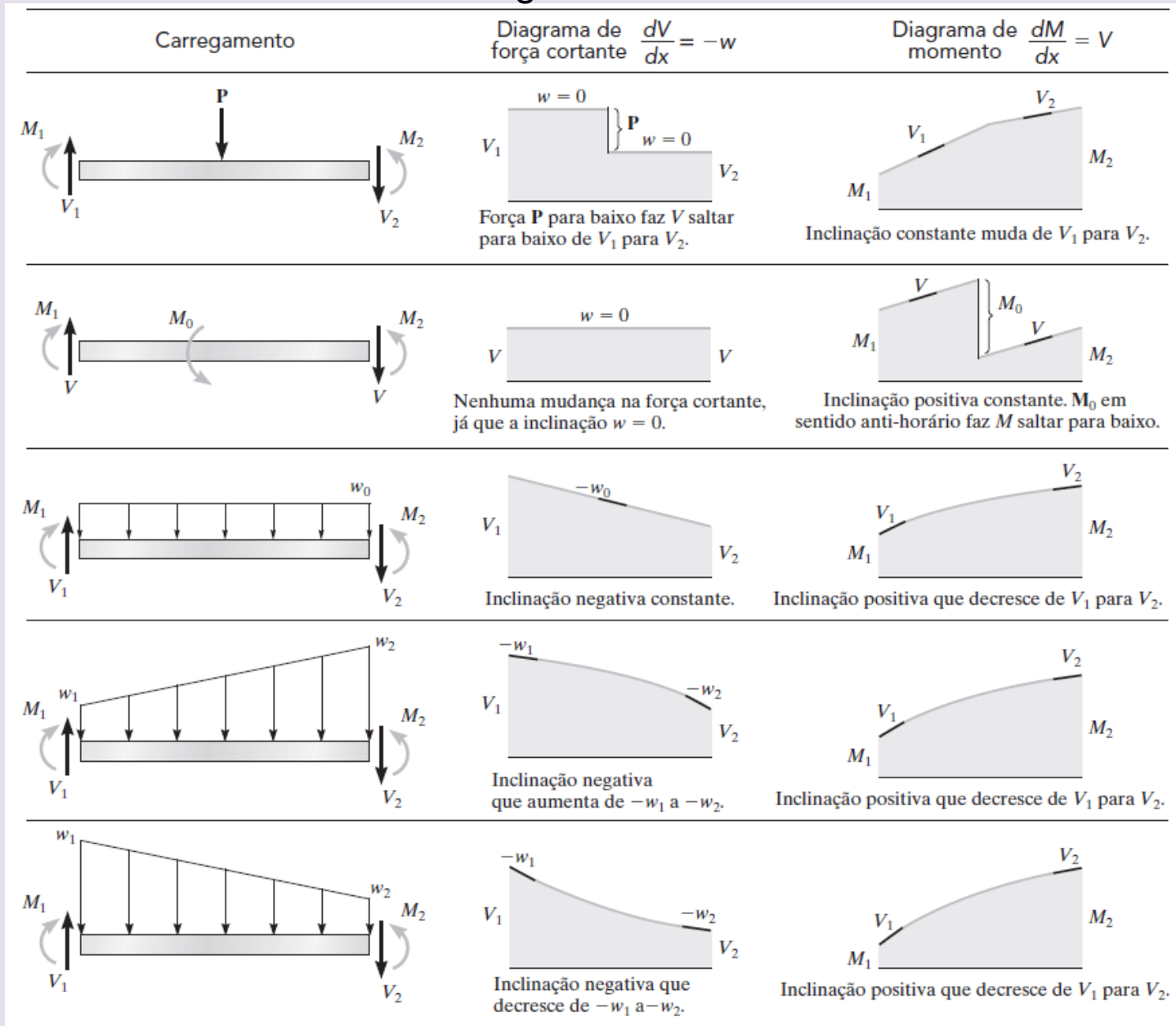
mudança no esforço de corte $\Delta V = -\int w(x)dx$ –área sob a carga distribuída

mudança no momento $\Delta M = \int V(x)dx$ área sob o diagrama de força cortante



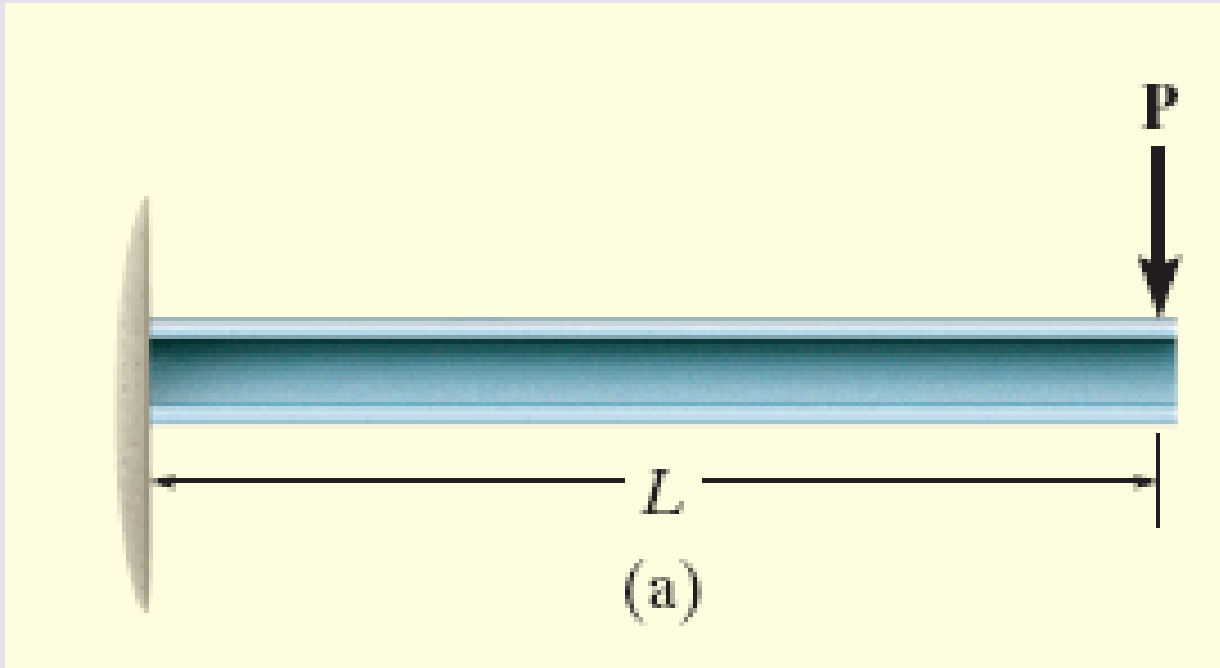
Regiões de força e momento concentrados

- Alguns dos casos comuns de carregamento:



Exemplo 4

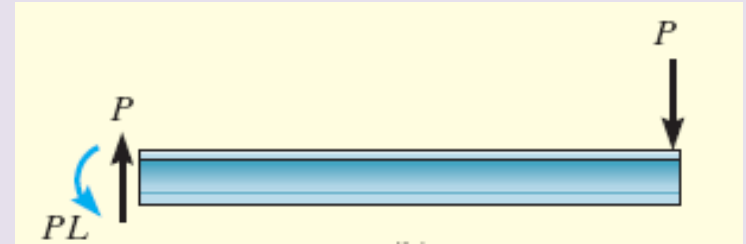
Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga.



Solução:

As reações são mostradas no diagrama de corpo livre :

De acordo com a convenção de sinal, em $x = 0$, $V = +P$ e em $x = L$, $V = -P$.



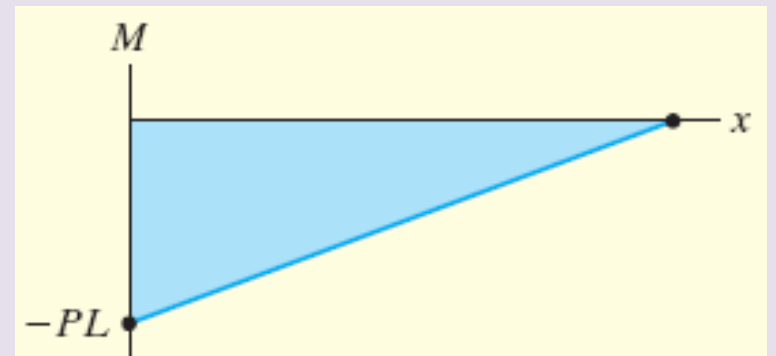
Visto que $w = 0$, a *inclinação* do diagrama de força cortante será zero, portanto:

$$dV/dx = -w = 0 \text{ em todos os pontos}$$

Para o diagrama de força cortante de acordo com a convenção de sinal, em $x = 0$, $M = -PL$ e em $x = L$, $M = 0$.

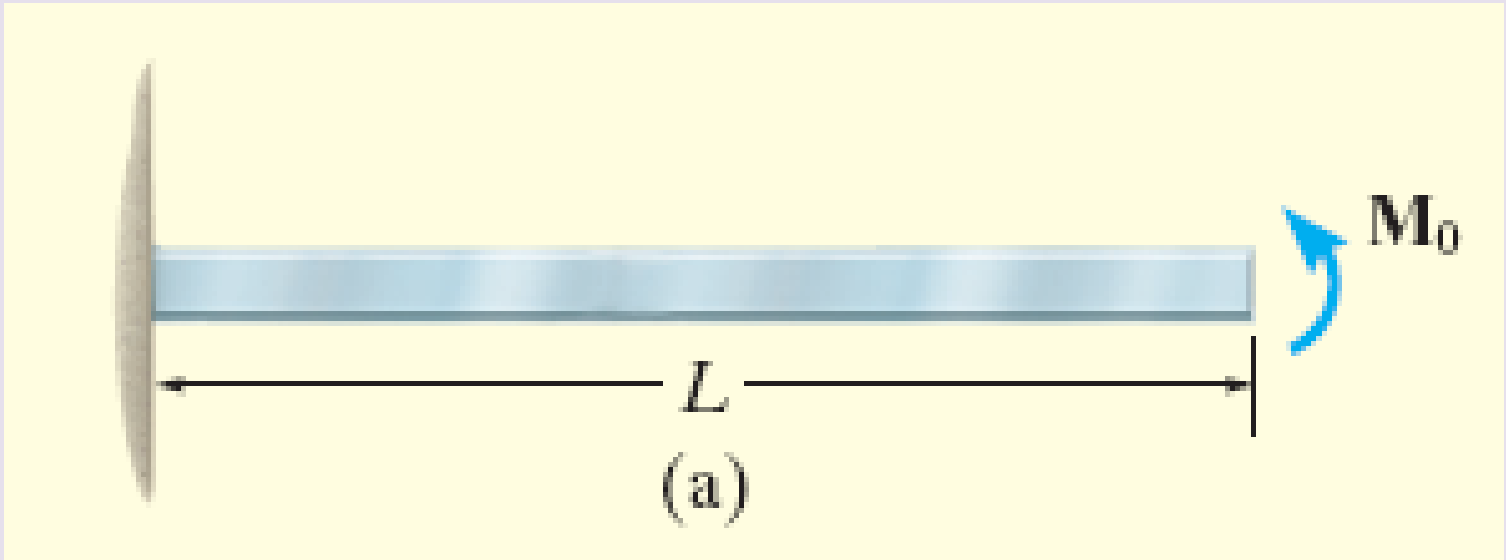
O diagrama de força cortante indica que o cisalhamento é positivo constante. Portanto,

$$dM/dx = V = +P \text{ em todos os pontos}$$



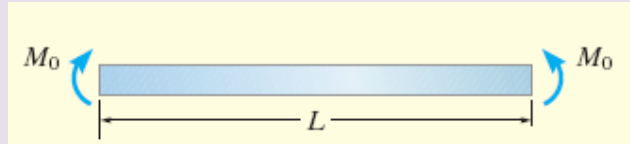
Exemplo 5

Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga.

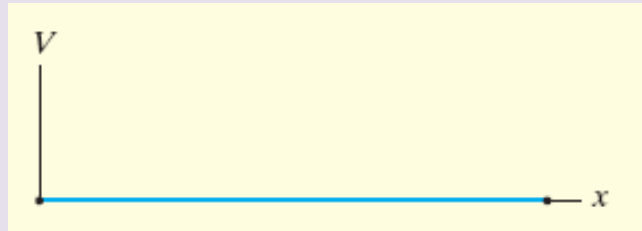


Solução:

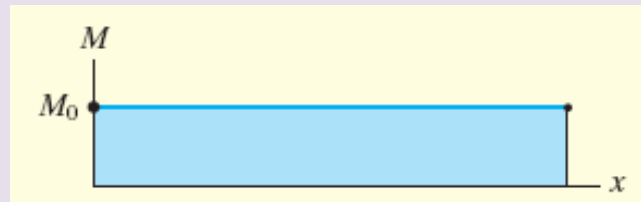
A reação no apoio fixo é mostrada no diagrama de corpo livre:



Visto que não existe nenhuma carga distribuída na viga, o diagrama de força cortante terá *inclinação nula* em todos os pontos.

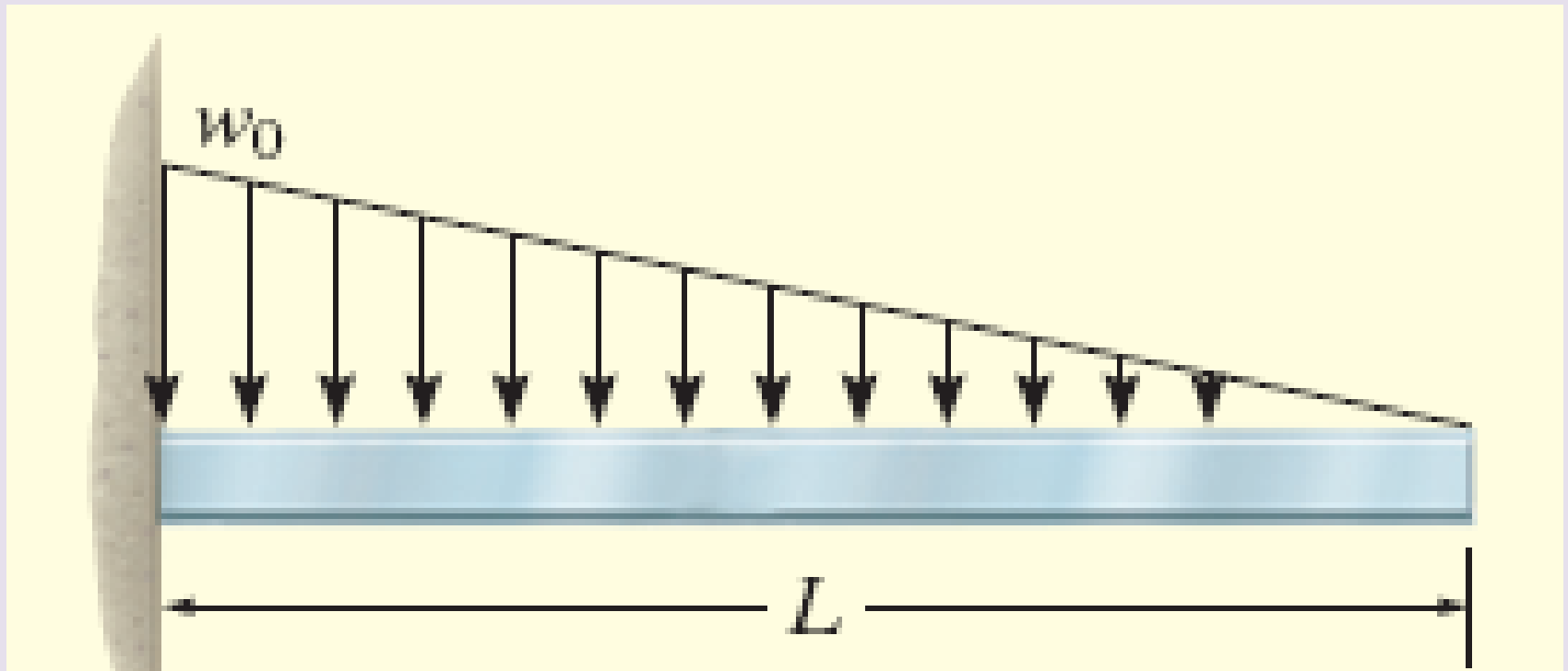


Pelo diagrama de força cortante, a *inclinação* do diagrama de momento será nula. $V = 0$.



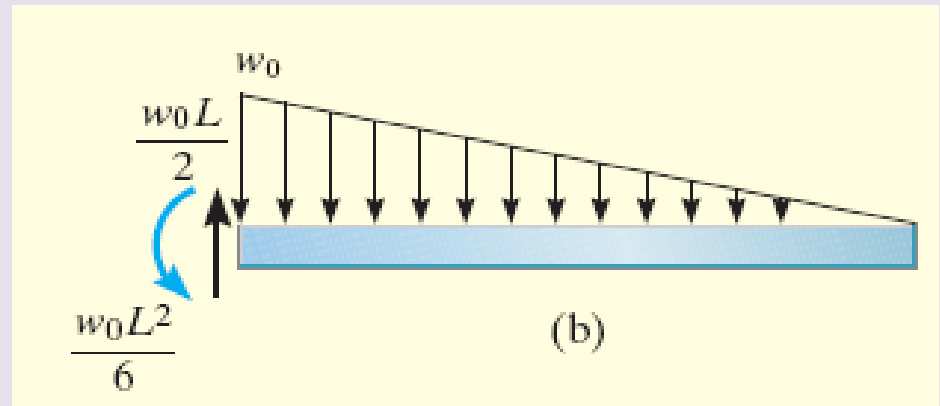
Exemplo 6

Represente graficamente os diagramas de força cortante e momento fletor para a viga.

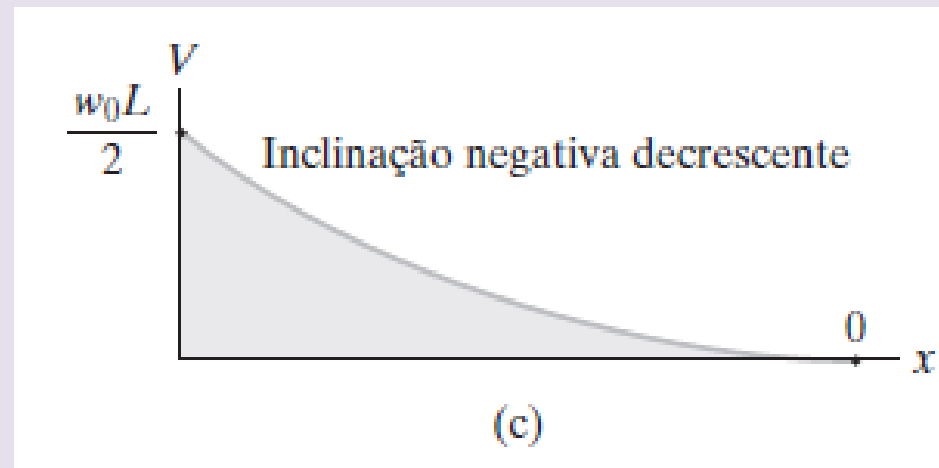


Solução:

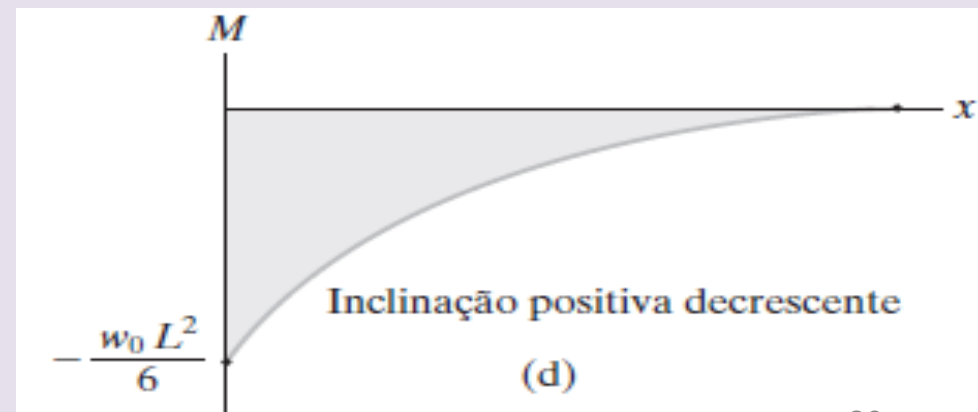
A reação nos apoios foram calculadas e são mostradas no diagrama de corpo livre:



A carga distribuída na viga é positiva, porém decrescente. Portanto, a inclinação é negativa decrescente.

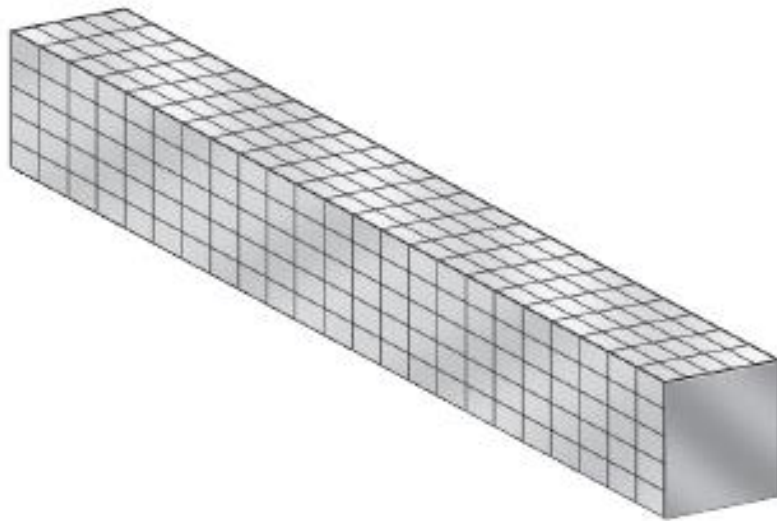


A curva do diagrama de momento que apresenta esse comportamento de inclinação é uma função *cúbica* de x .



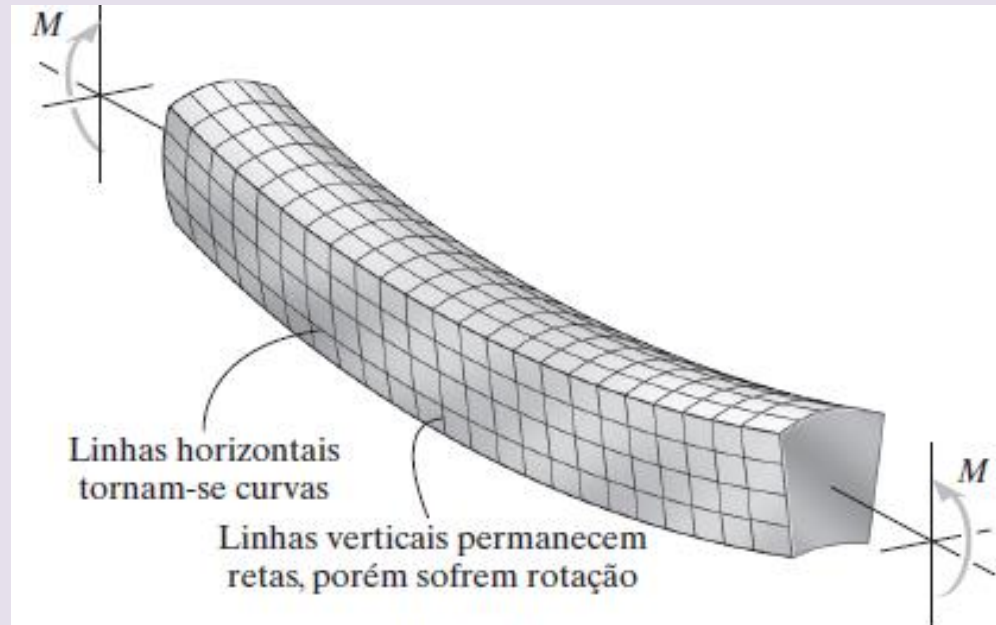
Deformação por flexão de um elemento reto

- Analisaremos vigas submetidas exclusivamente a esforços de flexão.
- Supomos que a seção transversal de uma viga reta *permanece plana* quando a viga se deforma por flexão (somente por flexão, sem esforços de cisalhamento).
- O esforço de flexão provoca uma tensão de tração de um lado da viga e uma tensão de compressão do outro lado.



Antes da deformação

(a)



Linhas horizontais tornam-se curvas

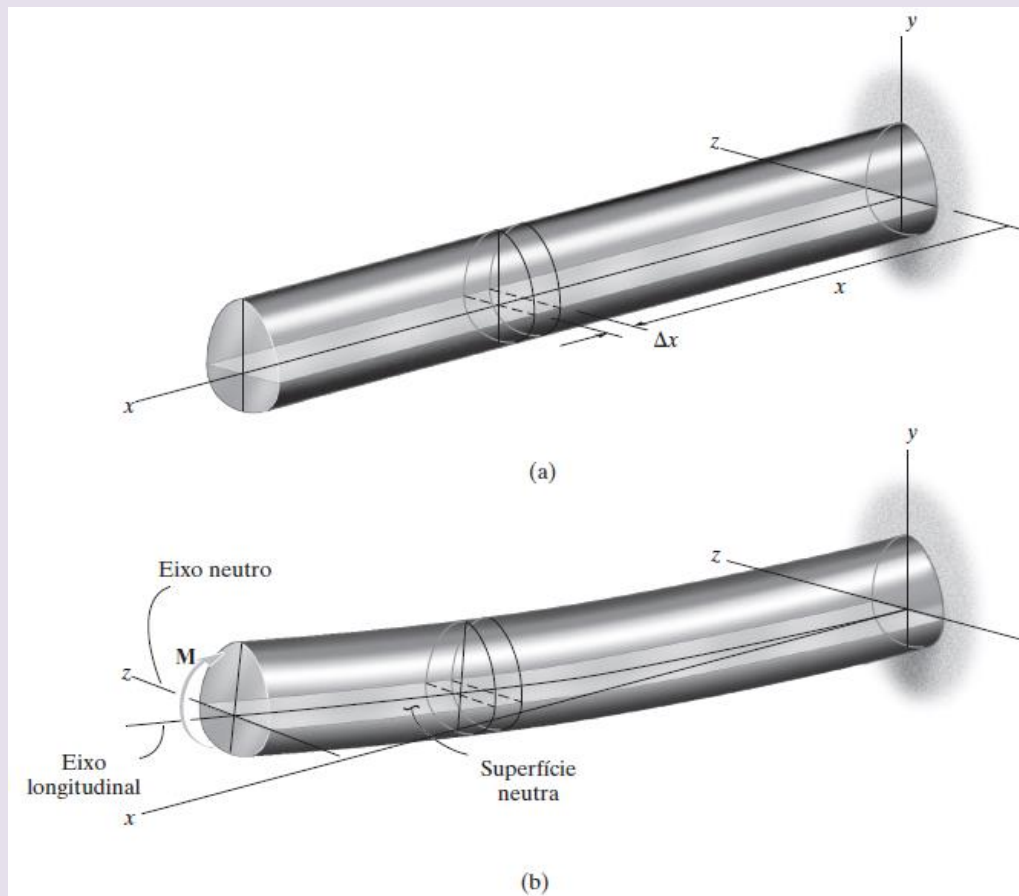
Linhas verticais permanecem retas, porém sofrem rotação

Após a deformação

(b)

Deformação por flexão de um elemento reto

- Existe um plano no interior da viga onde os elementos longitudinais não apresentam variação de comprimento (superfície neutra). Ela define os eixos neutros.
- A *deformação longitudinal* varia *linearmente* a partir do eixo neutro (onde é zero).
- A lei de Hooke permite calcular as tensões normais desenvolvidas, devidas às deformações longitudinais (quando o material é homogêneo).



A fórmula da flexão

- Um desenvolvimento relativamente simples permite obter a fórmula da flexão, a partir da igualdade do momento interno resultante M na seção transversal e o momento produzido pela distribuição linear das tensões normais em torno do eixo neutro.

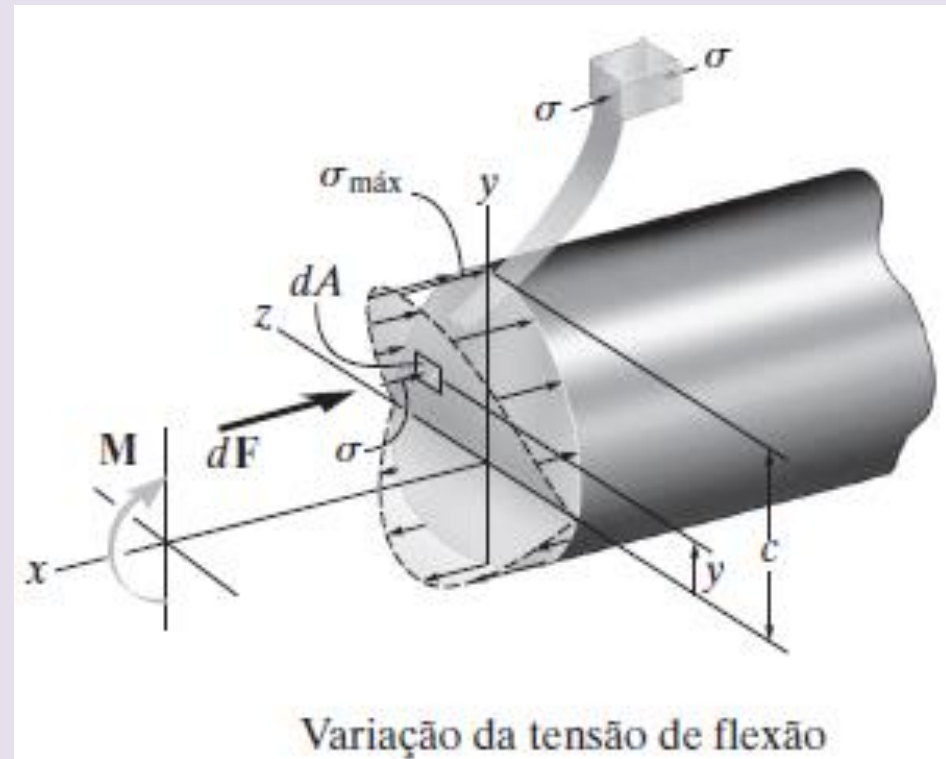
$$\sigma = -\frac{My}{I}$$

σ = tensão normal no membro

M = momento interno

I = momento de inércia

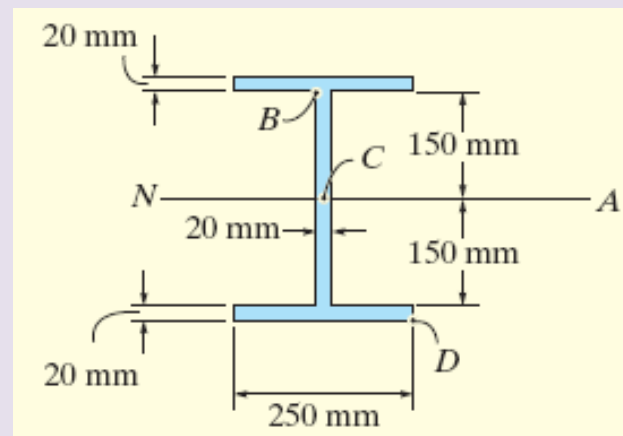
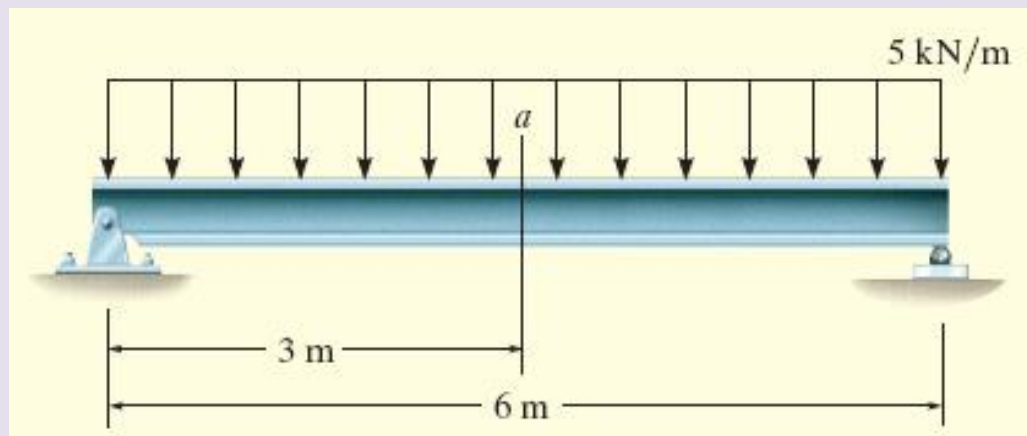
y = distância perpendicular ao eixo neutro



- Pela regra da mão direita, na figura, o sinal negativo é de compressão já que age na direção negativa de x .

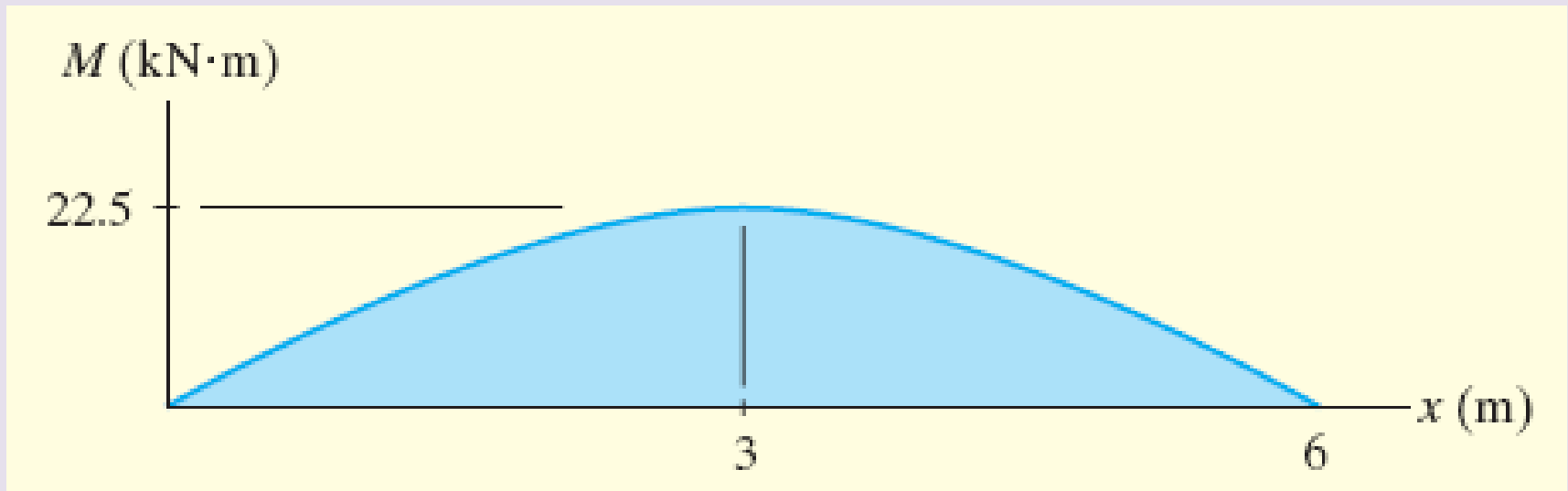
Exemplo 8

A viga simplesmente apoiada tem a área de seção transversal mostrada na figura abaixo. Determine a tensão de flexão máxima absoluta na viga e represente a distribuição de tensão na seção transversal nessa localização.



Solução:

O momento máximo interno na viga é $M = 22,5 \text{ kNm}$.



Por razões de simetria, o centroide C e, portanto, o eixo neutro, passa a meia altura da viga, e o momento de inercia é

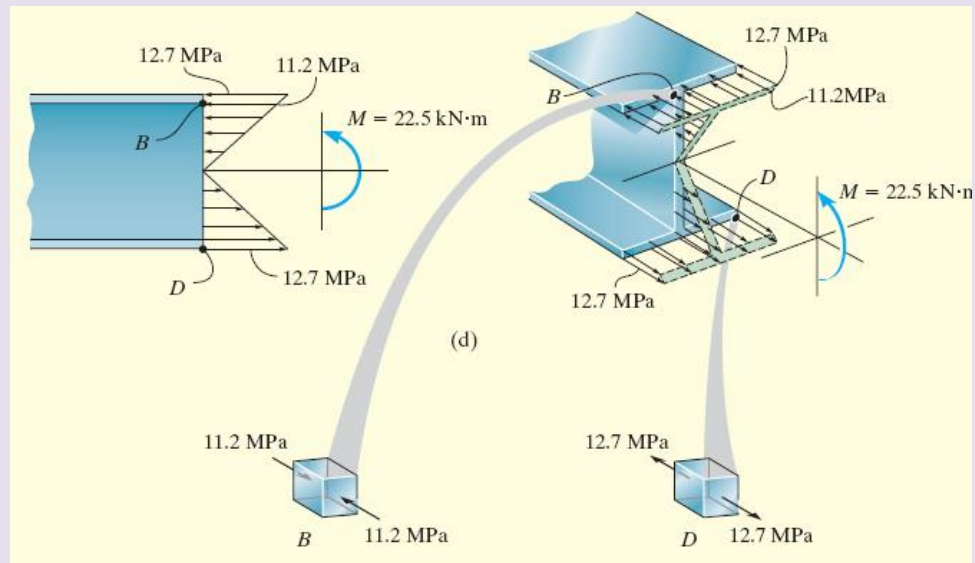
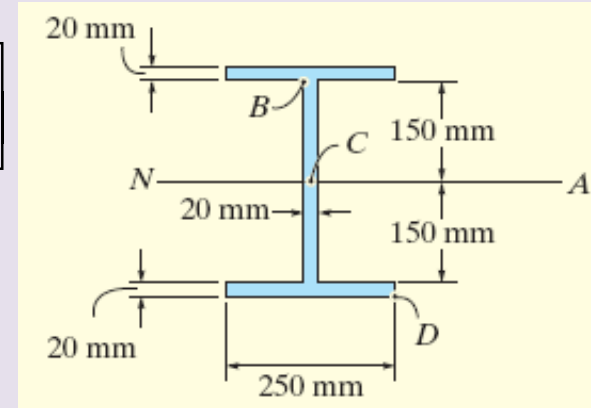
$$I = \sum (\bar{I} + Ad^2)$$

$$= 2 \left[\frac{1}{12} (0,25)(0,02)^3 + (0,25)(0,002)(0,16)^2 \right] + \left[\frac{1}{12} (0,02)(0,3)^3 \right]$$

$$= 301,3(10^{-6}) \text{ m}^4$$

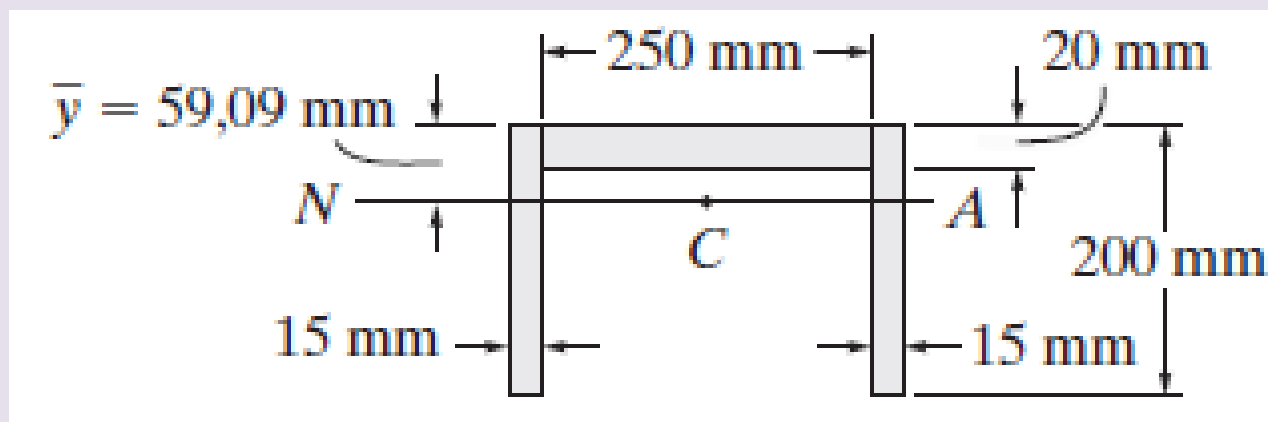
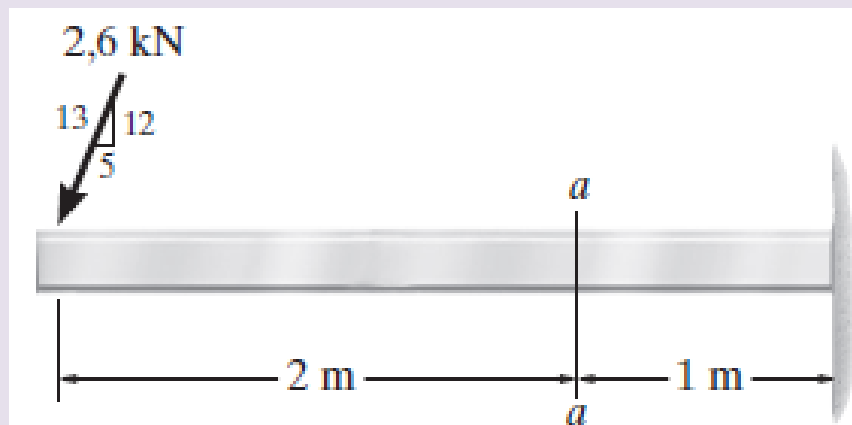
Aplicando a fórmula da flexão, para $c = 150 \text{ mm}$,

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I}; \quad \sigma_{\text{máx}} = \frac{22,5(0,15)}{301,3(10^{-6})} = 11,2 \text{ MPa (Resposta)}$$



Exemplo 9

A viga mostrada na figura tem área de seção transversal em forma de um canal. Determine a tensão de flexão máxima que ocorre na viga na seção a – a .



Solução:

O momento interno resultante deve ser calculado em torno do eixo neutro da viga na seção a–a. O eixo neutro passa pelo centroide, portanto:

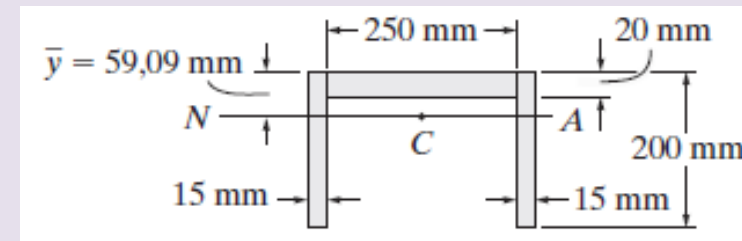
$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{2(0,1)(0,2)(0,015) + (0,01)(0,02)(0,25)}{2(0,2)(0,015) + (0,02)(0,25)} \\ &= 0,05909 \text{ m} = 59,09 \text{ mm}\end{aligned}$$

Aplicando a equação do equilíbrio de momento sobre o eixo neutro, temos

$$\curvearrowleft + \sum M_{NA} = 0; \quad 2,4(2) + 1,0(0,05909) - M = 0 \Rightarrow M = 4,859 \text{ kNm}$$

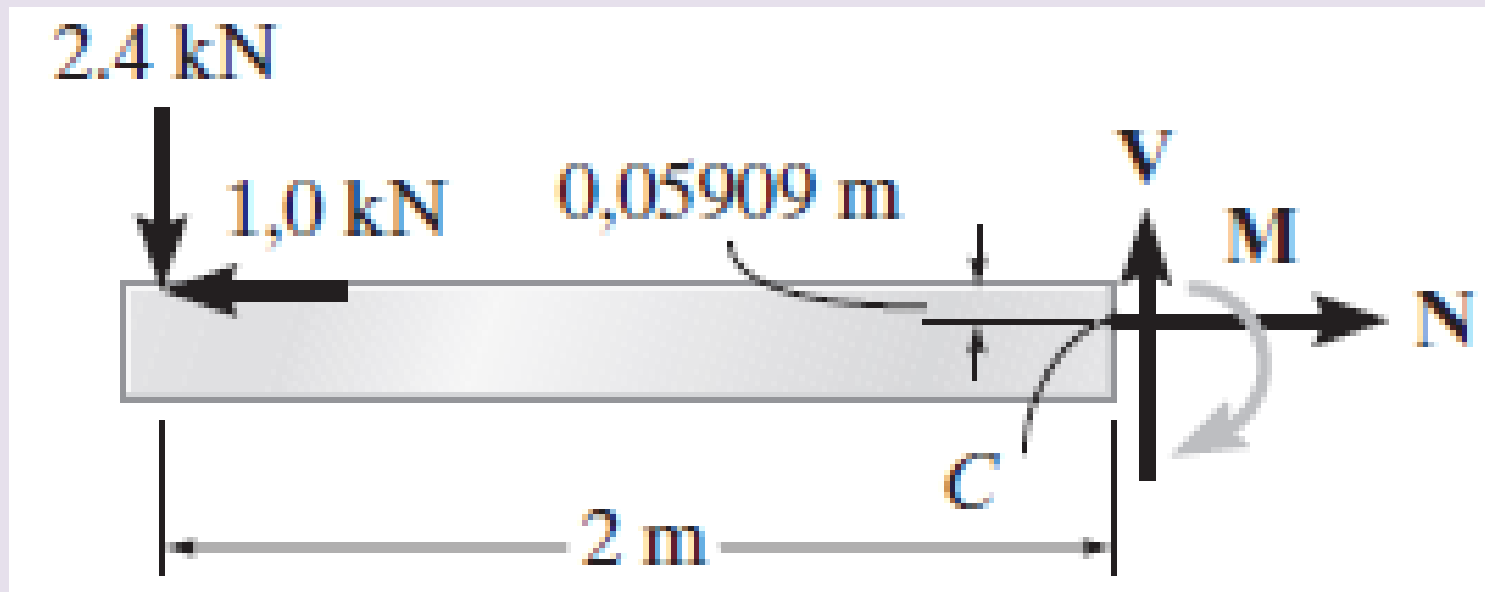
O momento de inércia sobre o eixo neutro é

$$\begin{aligned}I &= \left[\frac{1}{12} (0,25)(0,02)^3 + (0,25)(0,02)(0,05909 - 0,01)^2 \right] \\ &\quad + 2 \left[\frac{1}{12} (0,015)(0,2)^3 + (0,015)(0,2)(0,1 - 0,05909)^2 \right] \\ &= 42,26 (10^{-6}) \text{ m}^4\end{aligned}$$



A tensão de flexão máxima ocorre nos pontos mais afastados do eixo neutro.

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I} = \frac{4,859(0,2 - 0,05909)}{42,26(10^{-6})} = 16,2 \text{ MPa (Resposta)}$$



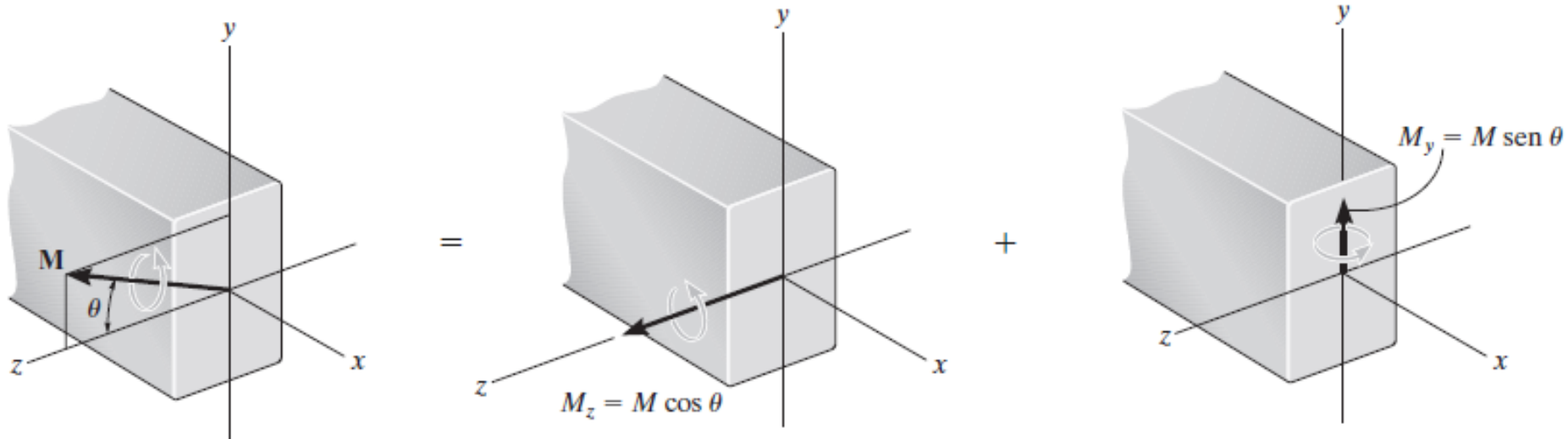
Flexão assimétrica

Momento aplicado ao longo do eixo principal

- Acontece quando a carga não é aplicada num dos planos de simetria.
- Podemos expressar a tensão normal resultante (após um desenvolvimento um pouco mais elaborado que o utilizado o caso anterior), em qualquer ponto da seção transversal, em termos gerais, como

$$\sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

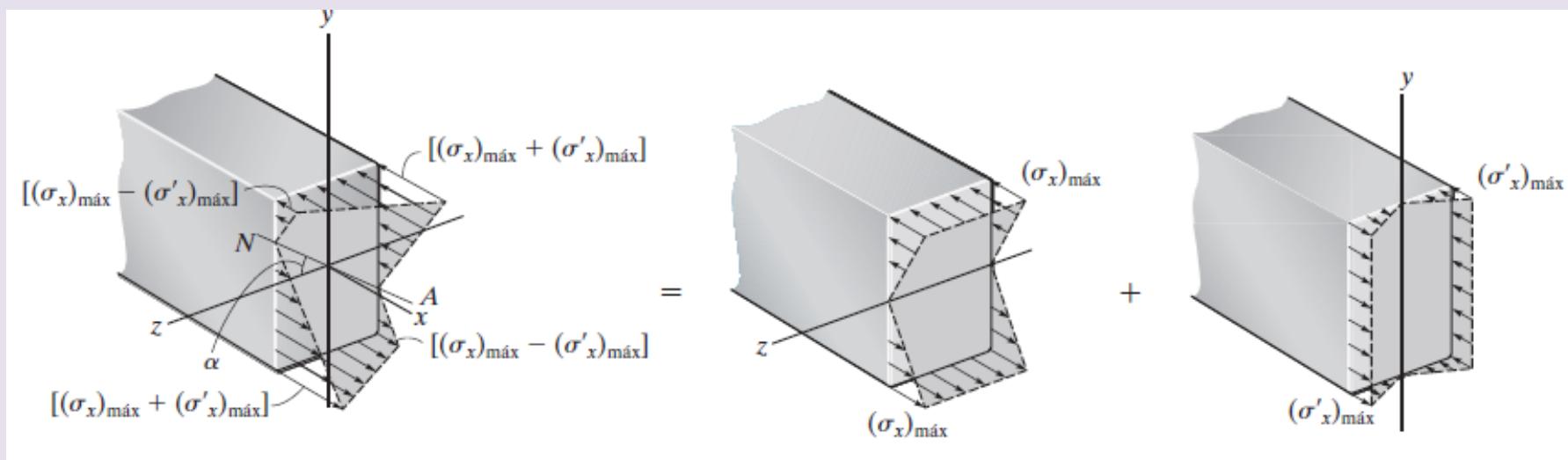
σ = tensão normal no ponto
 y, z = coordenadas do ponto medidas em relação a y, z
 M_y, M_z = componentes do momento interno resultante direcionados ao longo dos eixos y e z
 I_y, I_z = *momentos principais de inércia* calculados em torno dos eixos y e z



Orientação do eixo neutro no caso assimétrico

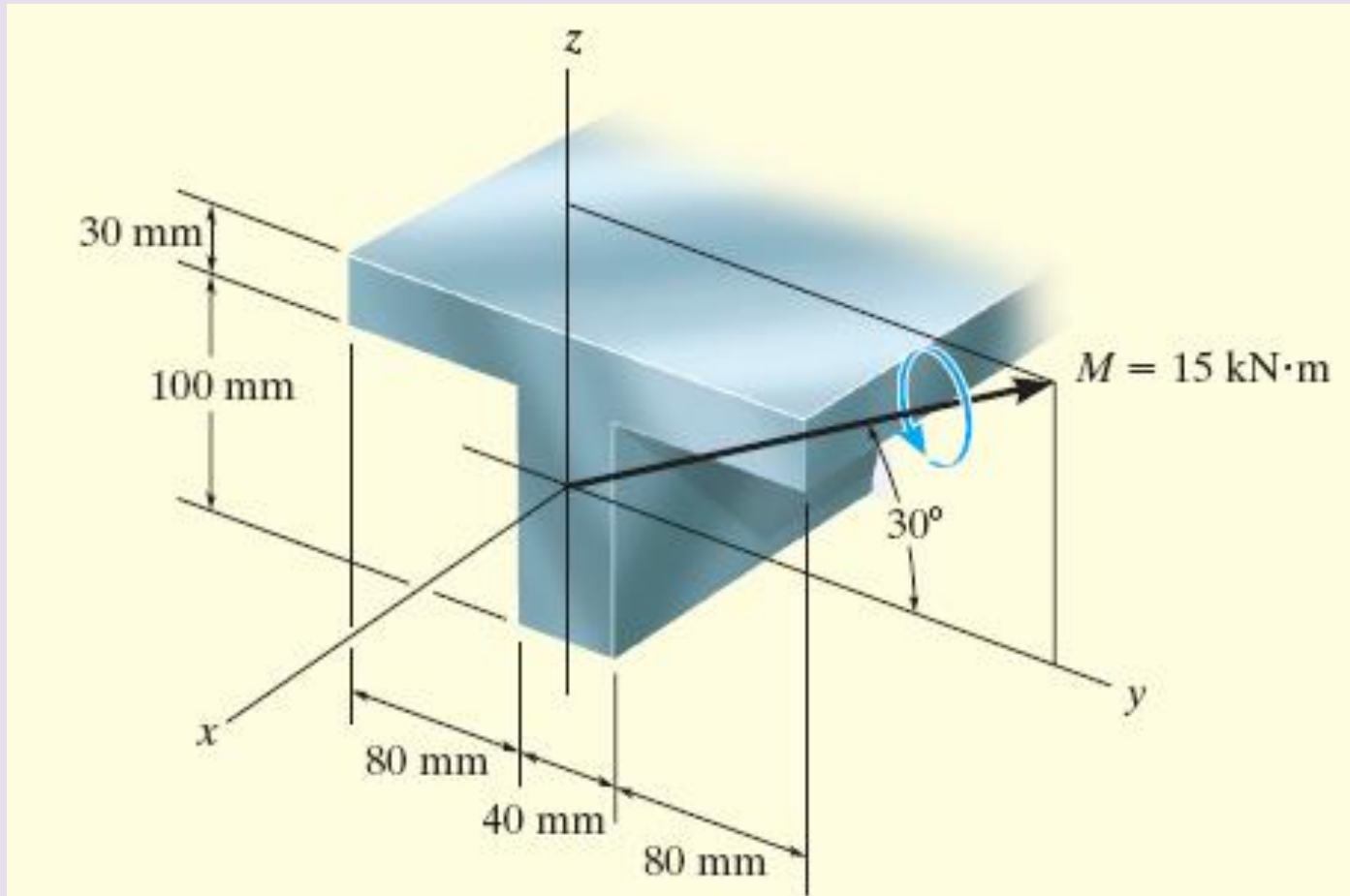
- O ângulo α do eixo neutro pode ser determinado a partir da equação anterior, considerando que no eixo neutro $\sigma = 0$. Assim:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{I_z}{I_y} \operatorname{tg} \theta$$



Exemplo 10

Uma viga em T está sujeita a um momento fletor de 15 kNm. Determine a tensão normal máxima na viga e a orientação do eixo neutro.

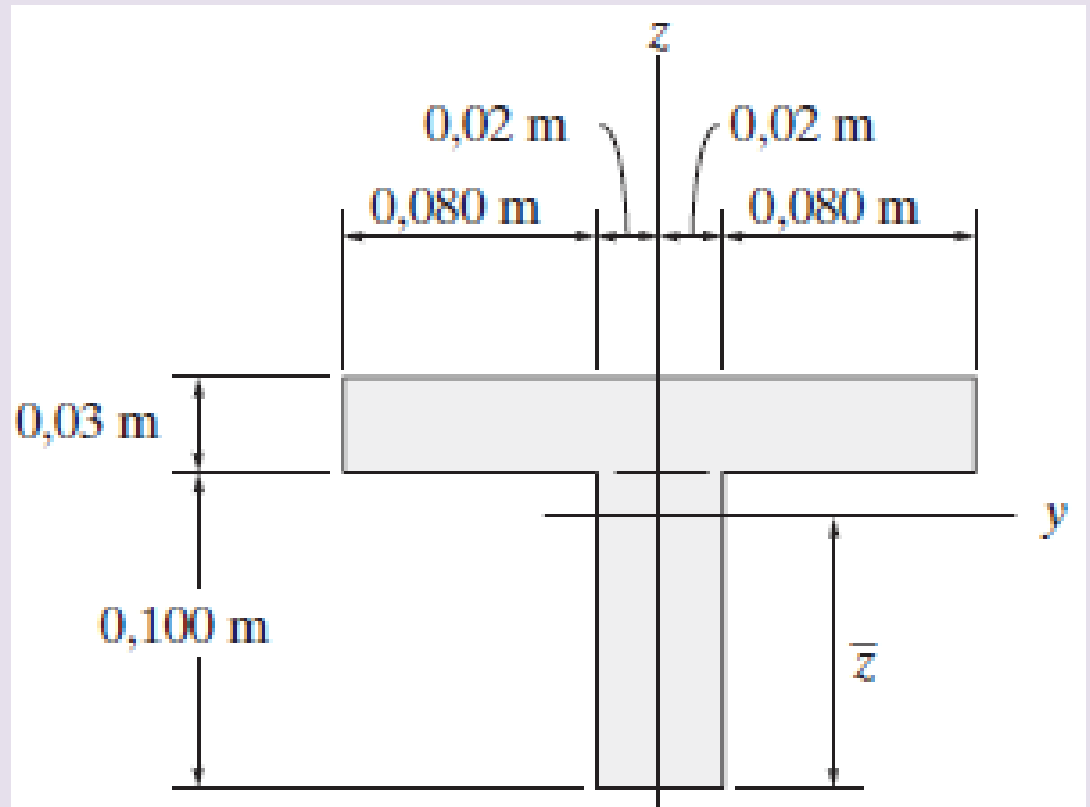


Solução:

Ambas as componentes do momento são positivas. Assim temos

$$M_y = (15)\cos 30^\circ = 12,99 \text{ kNm}$$

$$M_z = (15)\sin 30^\circ = 7,50 \text{ kNm}$$



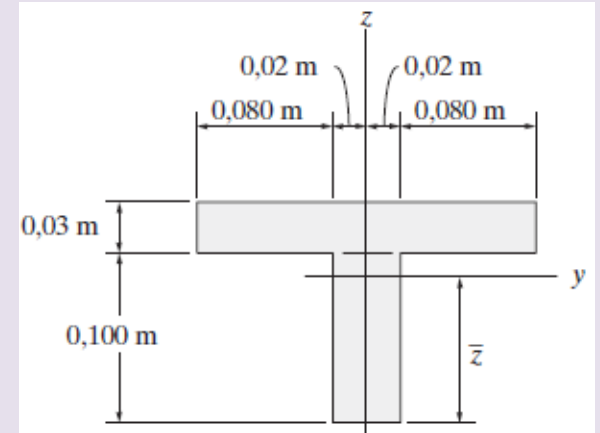
Para este caso temos:

$$\bar{z} = \frac{\sum \bar{z}A}{\sum A} = \frac{(0,05)(0,1)(0,04) + (0,115)(0,03)(0,2)}{(0,1)(0,04) + (0,03)(0,2)} = 0,0890 \text{ m}$$

Pelo teorema dos eixos paralelos, $I = \bar{I} + Ad^2$, os principais momentos da inércia são:

$$I_z = \frac{1}{12} (0,1)(0,04)^3 + \frac{1}{12} (0,03)(0,2)^3 = 20,53(10^{-6}) \text{ m}^4$$

$$I_y = \left[\frac{1}{12} (0,04)(0,1)^3 + (0,1)(0,04)(0,089 - 0,05)^2 \right] + \left[\frac{1}{12} (0,2)(0,03)^3 + (0,2)(0,03)(0,115 - 0,089)^2 \right] = 1,392 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$$

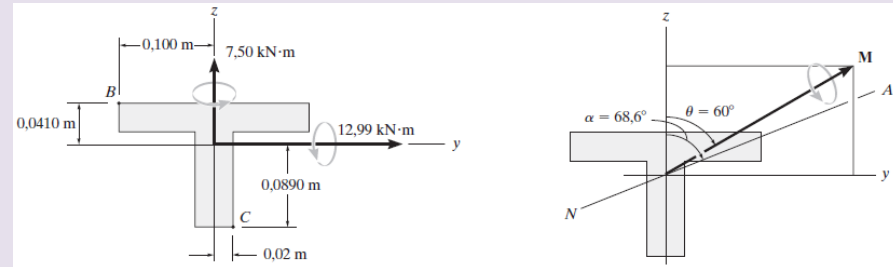


A maior tensão *de tração* ocorre em *B* e a maior tensão *de compressão* ocorre em *C*.

$$\sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y}$$

$$\sigma_B = -\frac{7,5(-0,1)}{20,53(10^{-6})} + \frac{12,99(0,041)}{1,392(10^{-5})} = 74,8 \text{ MPa}$$

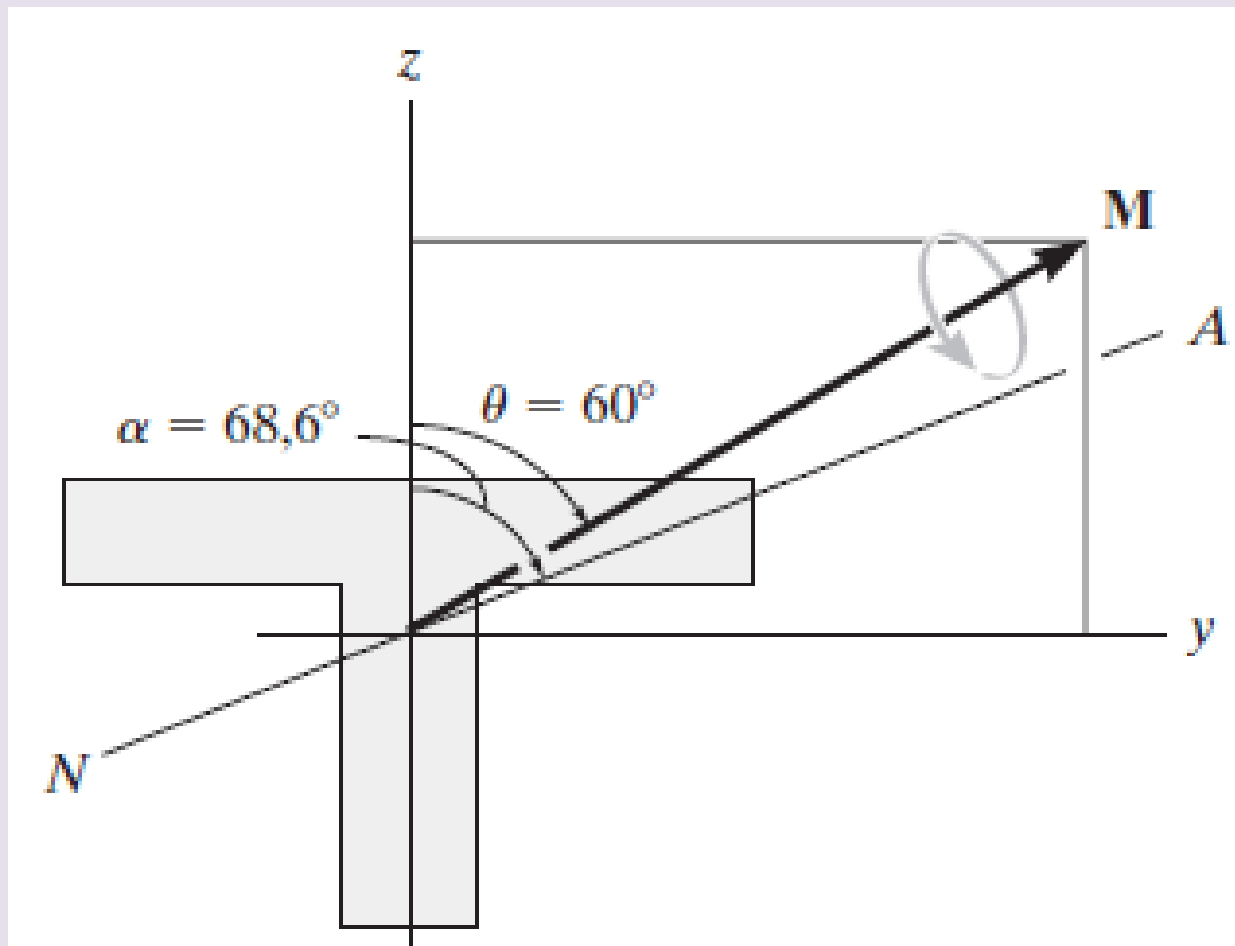
$$\sigma_C = -\frac{7,5(0,02)}{20,53(10^{-6})} + \frac{12,99(-0,089)}{1,392(10^{-5})} = -90,3 \text{ MPa (Resposta)}$$



Em geral, y é o eixo para o momento principal de inércia *mínimo*, e z é o eixo para o momento principal de inércia *máximo*.

$$\operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{20,53(10^{-6})}{13,92(10^{-6})} \right) \operatorname{tg} 60^\circ$$

$$\alpha = 68,6^\circ$$

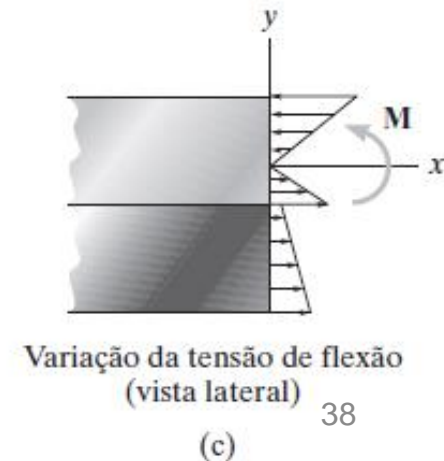
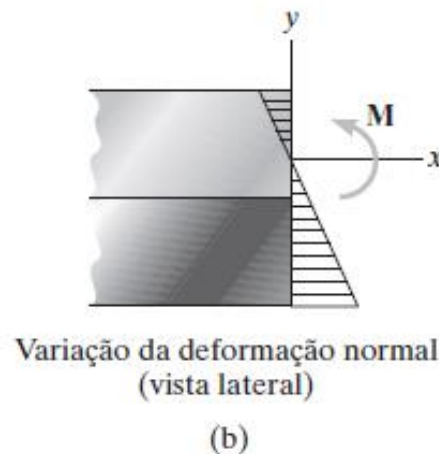
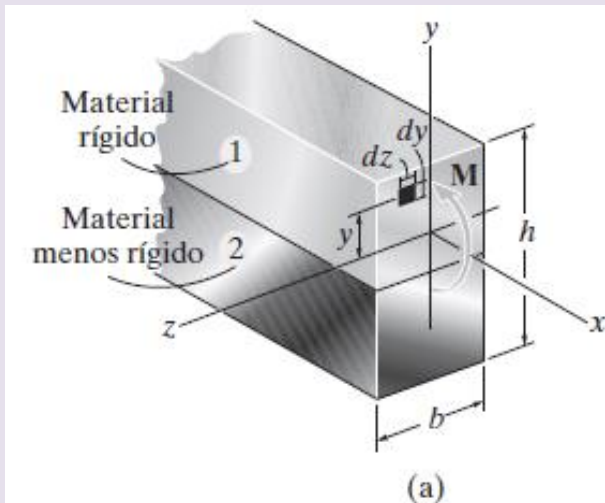
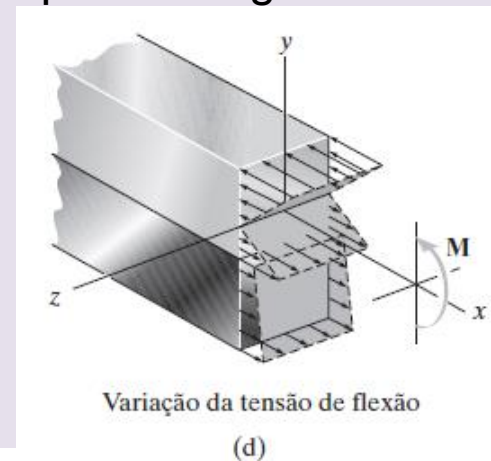


Vigas compostas

- Vigas construídas de dois ou mais materiais diferentes são denominadas **vigas compostas**.
- O método anterior é aplicável, com algumas modificações.
- Transformaremos um material no outro utilizando o *fator de transformação*, que é uma razão entre os módulos dos diferentes materiais que compõem a viga.

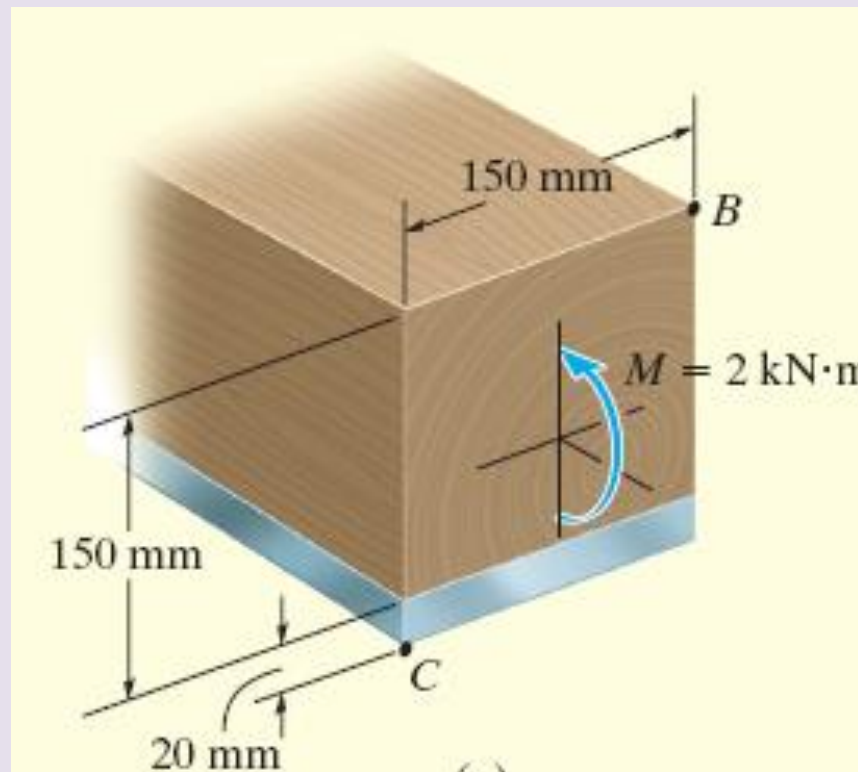
No caso de concreto armado consideramos que o concreto sob tração não oferece nenhuma resistência (todo o esforço recairá sobre as barras de ferro).

Exemplos.



Exemplo 11

Uma viga composta é feita de madeira e reforçada com uma tira de aço localizada em sua parte inferior. Ela tem a área de seção transversal mostrada na figura abaixo. Se for submetida a um momento fletor $M = 2 \text{ kNm}$, determine a tensão normal nos pontos B e C . Considere $E_{\text{mad}} = 12 \text{ GPa}$ e $E_{\text{aço}} = 200 \text{ GPa}$.



Solução:

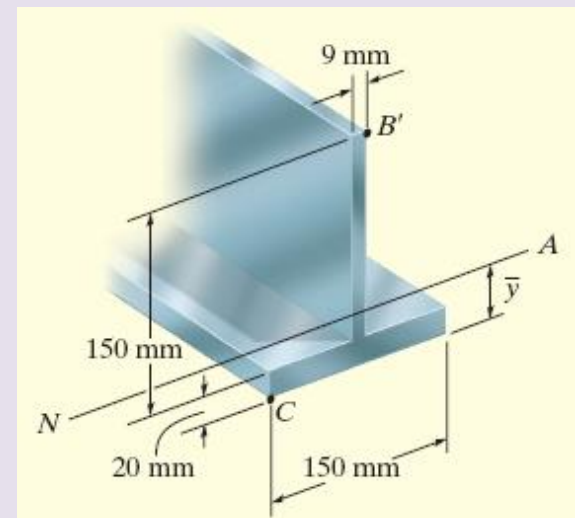
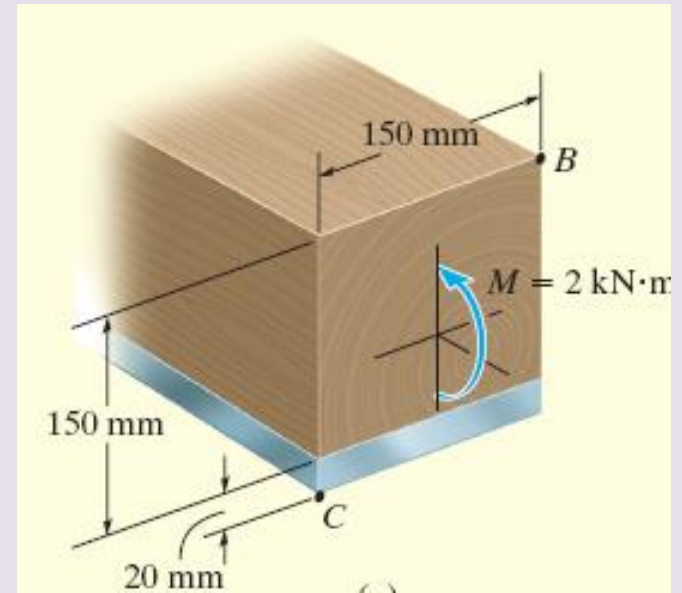
Transformaremos a seção de madeira em outra feita inteiramente de aço, com a seguinte relação para sua largura b :

$$b_{\text{aço}} = nb_{\text{mad}} = \frac{12}{200}(150) = 9 \text{ mm}$$

A seção transformada é mostrada na figura abaixo.

A localização do centroide (eixo neutro) é

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{(0,01)(0,02)(0,150) + (0,095)(0,009)(0,15)}{(0,02)(0,15) + (0,009)(0,15)} = 0,03638 \text{ m}$$



Portanto, o momento de inércia em torno do eixo neutro é

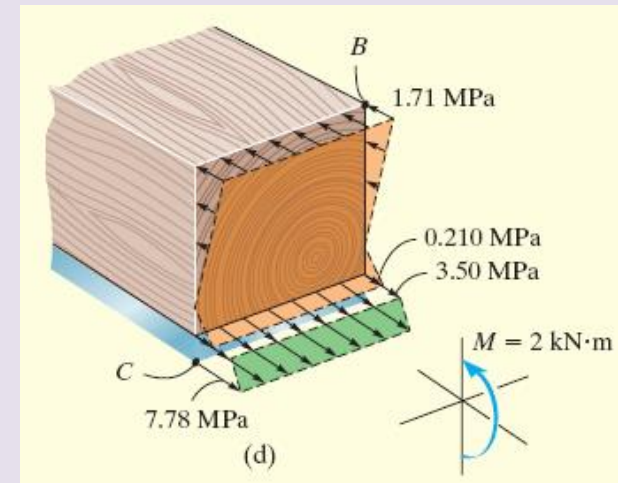
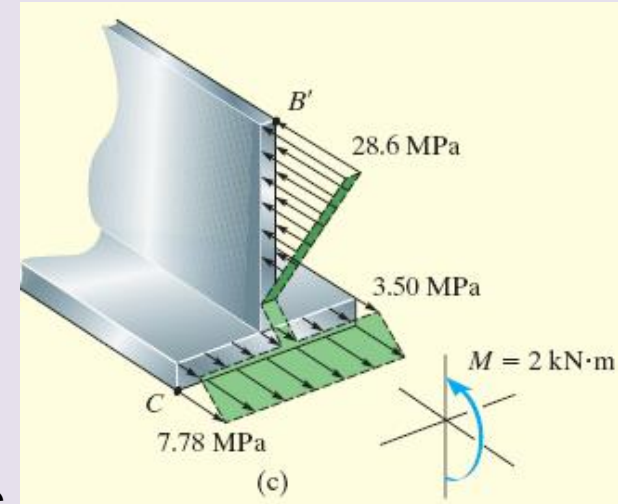
$$I_{NA} = \left[\frac{1}{12} (0,15)(0,02)^3 + (0,15)(0,02)(0,03638 - 0,01)^2 \right] + \left[\frac{1}{12} (0,009)(0,15)^3 + (0,009)(0,15)(0,095 - 0,03638)^2 \right]$$

$$= 9,358(10^{-6}) \text{ m}^4$$

Aplicando a fórmula da flexão, a tensão normal em B' e C e

$$\sigma_{B'} = \frac{2(0,17 - 0,03638)}{9,358(10^{-6})} = 28,6 \text{ MPa}$$

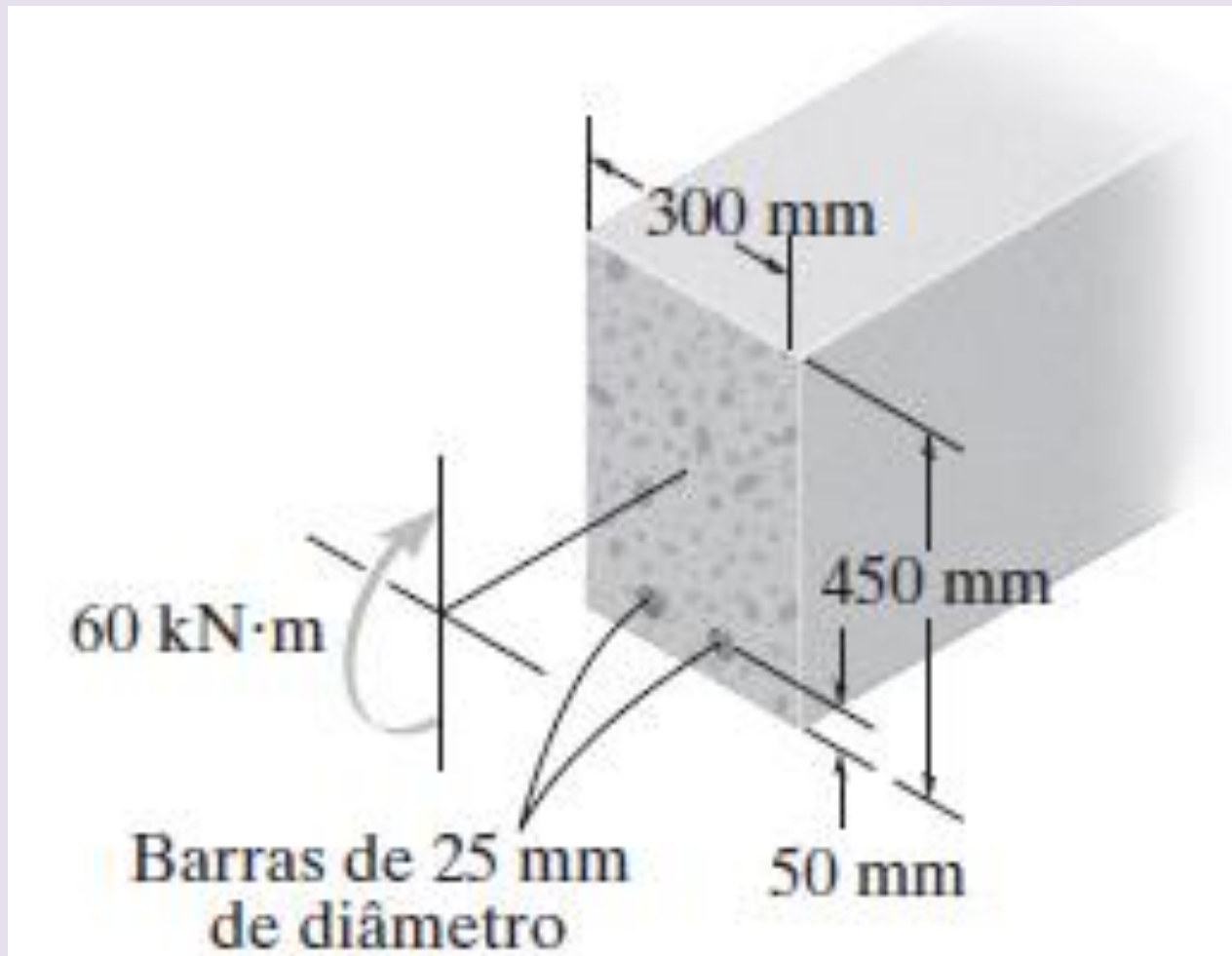
$$\sigma_C = \frac{2(0,03638)}{9,358(10^{-6})} = 27,87 \text{ MPa (Resposta)}$$



A tensão normal na madeira em B é $\sigma_B = n\sigma_{B'} = \frac{12}{200}(28,56) = 1,71 \text{ MPa (Resposta)}$

Exemplo 12

A viga de concreto armado tem a área de seção transversal como mostra a figura abaixo. Se for submetida a um momento fletor $M = 60 \text{ kN}\cdot\text{m}$, determine a tensão normal em cada uma das hastes de reforço de aço e a tensão normal máxima no concreto. Considere $E_{\text{aço}} = 200 \text{ GPa}$ e $E_{\text{conc}} = 25 \text{ GPa}$.



Solução:

A área total de aço é

$$A_{\text{aço}} = 2[\pi(12,5)^2] = 982 \text{ mm}^2$$

Ela equivale a uma área de concreto hipotético que resiste à tração de:

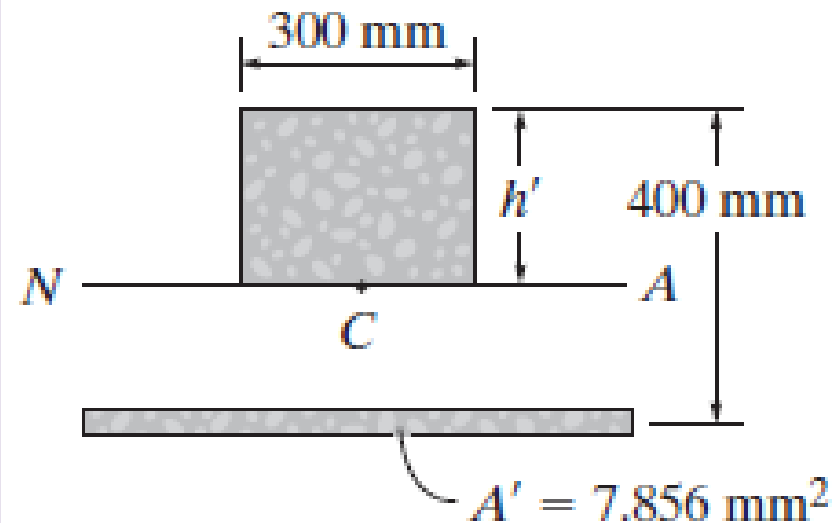
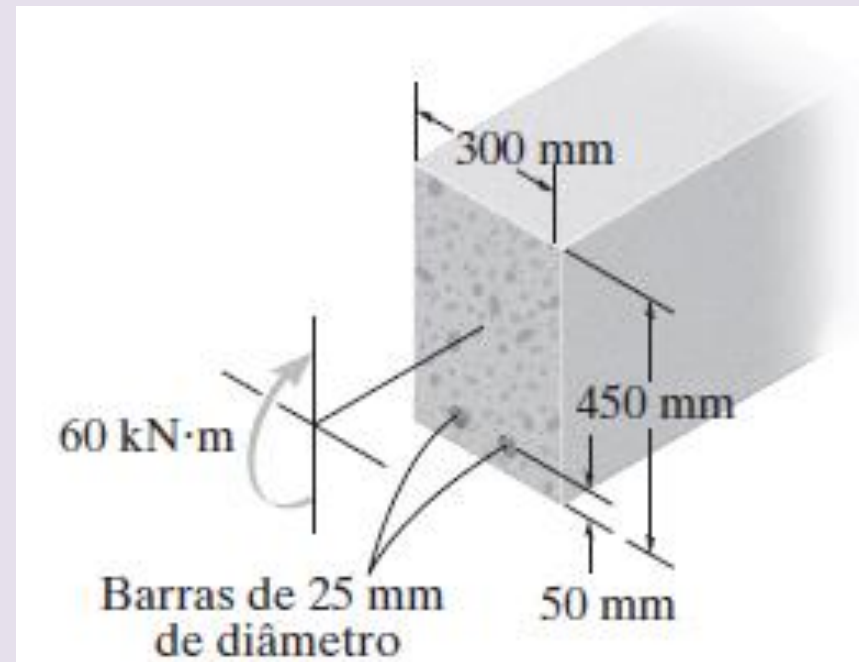
$$A' = nA_{\text{aço}} = \frac{200(10^3)}{25(10^3)}(982) = 7856 \text{ mm}^2$$

Agora consideramos somente esta área para resistir à tração e como o eixo neutro se encontra na mesma posição do centroide

$$\sum \tilde{y}A = 0$$

$$300(h')\frac{h'}{2} - 7856(400 - h') = 0$$

$$h'^2 + 52,37h' - 20.949,33 = 0 \Rightarrow h' = 120,90 \text{ mm}$$



O momento de inércia da seção transformada, calculado em torno do eixo neutro, é

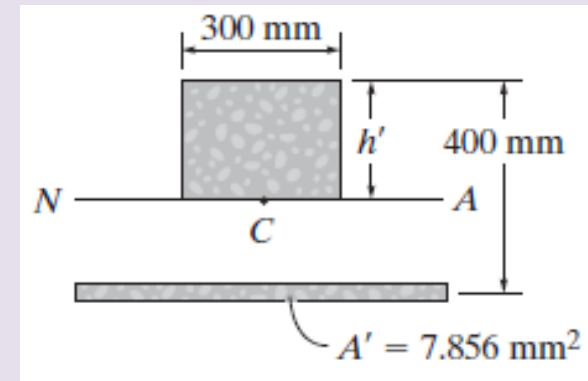
$$I = \left[\frac{1}{12} (300)(120,9)^3 + 300(120,9) \left(\frac{120,9}{2} \right)^2 + 7856(400 - 120,9)^2 \right] = 788,67 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Aplicando a fórmula da flexão à seção transformada, a tensão normal máxima no concreto é

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

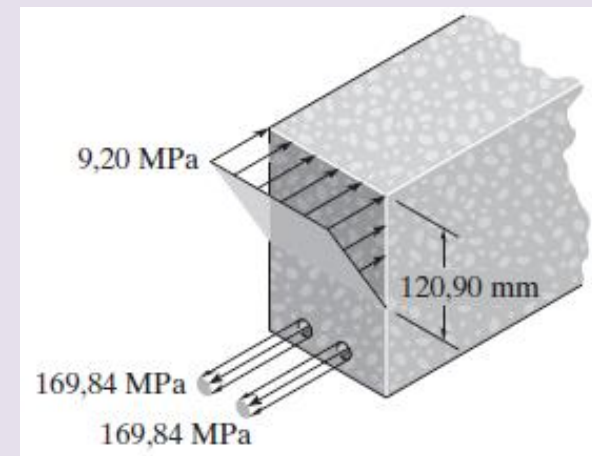
$$(\sigma_{\text{conc}})_{\text{máx}} = \frac{60(1.000)(120,9)(1.000)}{788,67 \times 10^6} = 9,20 \text{ MPa (Resposta)}$$

$$\sigma'_{\text{conc}} = \frac{60(1.000)(1.000)(400 - 120,9)}{788,67 \times 10^6} = 21,23 \text{ MPa}$$



A tensão normal em cada uma das duas hastes é:

$$\sigma_{\text{aço}} = n \sigma'_{\text{conc}} = \left(\frac{200(10^3)}{25(10^3)} \right) 21,23 = 169,84 \text{ MPa (Resposta)}$$



Vigas curvas

Anteriormente assumimos que todos os elementos longitudinais tem o mesmo comprimento (vigas retas).

Quando a viga não é reta, **a variação linear** da deformação específica ao longo da seção transversal **não é mais válida** (mas as seções planas continuam planas).

Na figura é apresentado o corte longitudinal de uma viga curva.

O plano xy é o plano de flexão e é um plano de simetria.

Centroide e eixo neutro não coincidem mais.

Como seção plana permanecem plana após a flexão, então a deformação longitudinal é proporcional a sua distância à superfície neutra, ou seja: $\delta = \frac{\delta_i}{b} y$ (a)

O comprimento indeformado de qualquer elemento longitudinal é $\rho\theta$ portanto a equação (a) fica:

$$\rho\theta\varepsilon = \frac{r_i\theta\varepsilon_i}{b} y$$

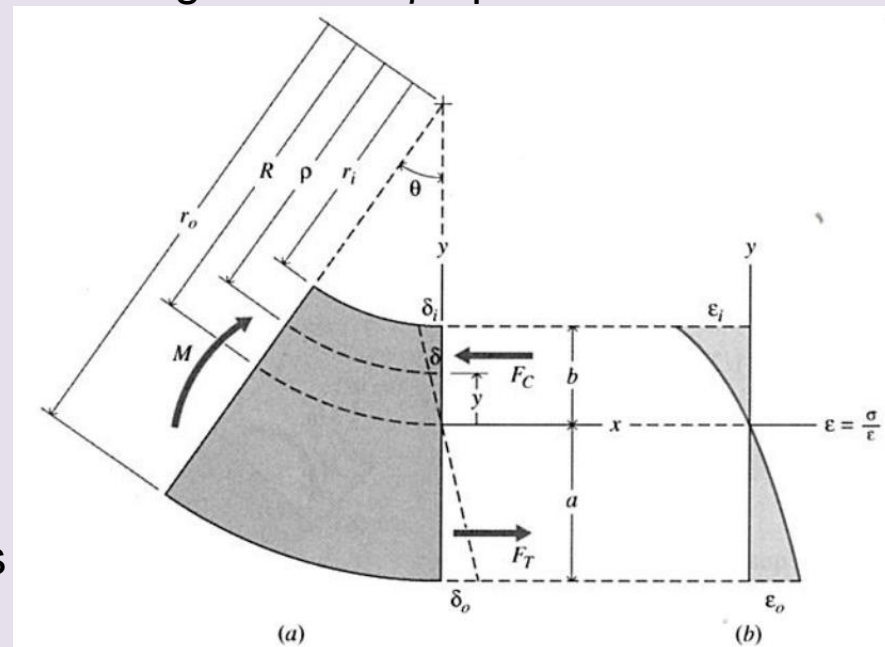
Lembrando que a deformação é $\varepsilon = \frac{L_f - L_i}{L_i}$

e que $\delta = L_f - L_i$

Desta relação se obtém a distribuição das tensões normais:

$$\varepsilon = \frac{r_i\varepsilon_i}{b} \frac{y}{\rho} = \frac{r_i\varepsilon_i}{b} \frac{y}{R-y} = \frac{\sigma}{E}$$

Tensões de flexão e deformações específicas não são lineares com y !!!



Vigas curvas

- A posição da superfície neutra é obtida a partir da condição $\sum F_x = 0$, ou seja:

$$\int_A \sigma dA = \frac{r_i \sigma_i}{b} \int_A \frac{y}{\rho} dA = 0$$

Como $y = R - \rho$, onde R - raio da superfície neutra,

$$\frac{r_i \sigma_i}{b} \int_A \frac{R - \rho}{\rho} dA = 0 \quad (b)$$

Em geral a equação (b) deveria ser resolvida para cada caso particular. No caso de uma seção transversal retangular de largura t teremos:

$$\int_{r_i}^{r_0} \frac{R - \rho}{\rho} t d\rho = \int_{r_i}^{r_0} \frac{R}{\rho} t d\rho - \int_{r_i}^{r_0} t d\rho = 0$$

Como R é constante:

$$R = \frac{r_0 - r_i}{\ln\left(\frac{r_0}{r_i}\right)}$$

Vigas curvas

O momento interno resultante M_r obtém-se em termos da tensão normal de flexão a partir da equação de equilíbrio $\sum M = 0$, ou seja:

$$M_r = - \int_A (\sigma dA) y = - \frac{r_i \sigma_i}{b} \int_A \frac{y^2}{\rho} dA = - \frac{r_i \sigma_i}{b} \int_A \frac{(R - \rho)^2}{\rho} dA \quad (c)$$

O valor de R obtido em (b) deve ser substituído em (c) (para cada caso particular). Uma forma conveniente de reescrever a equação (c) é:

$$M_r = - \frac{r_i \sigma_i}{b} \left[\int_A (R - \rho) dA - R \int_A \frac{(R - \rho)}{\rho} dA \right]$$

Onde a segunda integral é zero (por (b)), assim teremos:

$$M_r = - \frac{r_i \sigma_i}{b} \left[\int_A y dA \right] = \frac{r_i \sigma_i}{b} A y_c$$

Onde y_c é a coordenada y do centroide da área de seção transversal A, medida a partir do eixo neutro.

Substituindo $\frac{r_i \sigma_i}{b}$ por $\frac{\rho \sigma}{y}$ obtemos a tensão normal em qualquer ponto da viga curva

$$\sigma = \frac{M_r y}{\rho A y_c} = \frac{M_r y}{(R - y) A y_c}$$

Vigas curvas

A partir da equação (b) é fácil verificar que o cálculo de R se resume a obter a integral abaixo para as diferentes geometrias (caso a seção da viga não seja retangular). Na equação abaixo $r \equiv \rho$

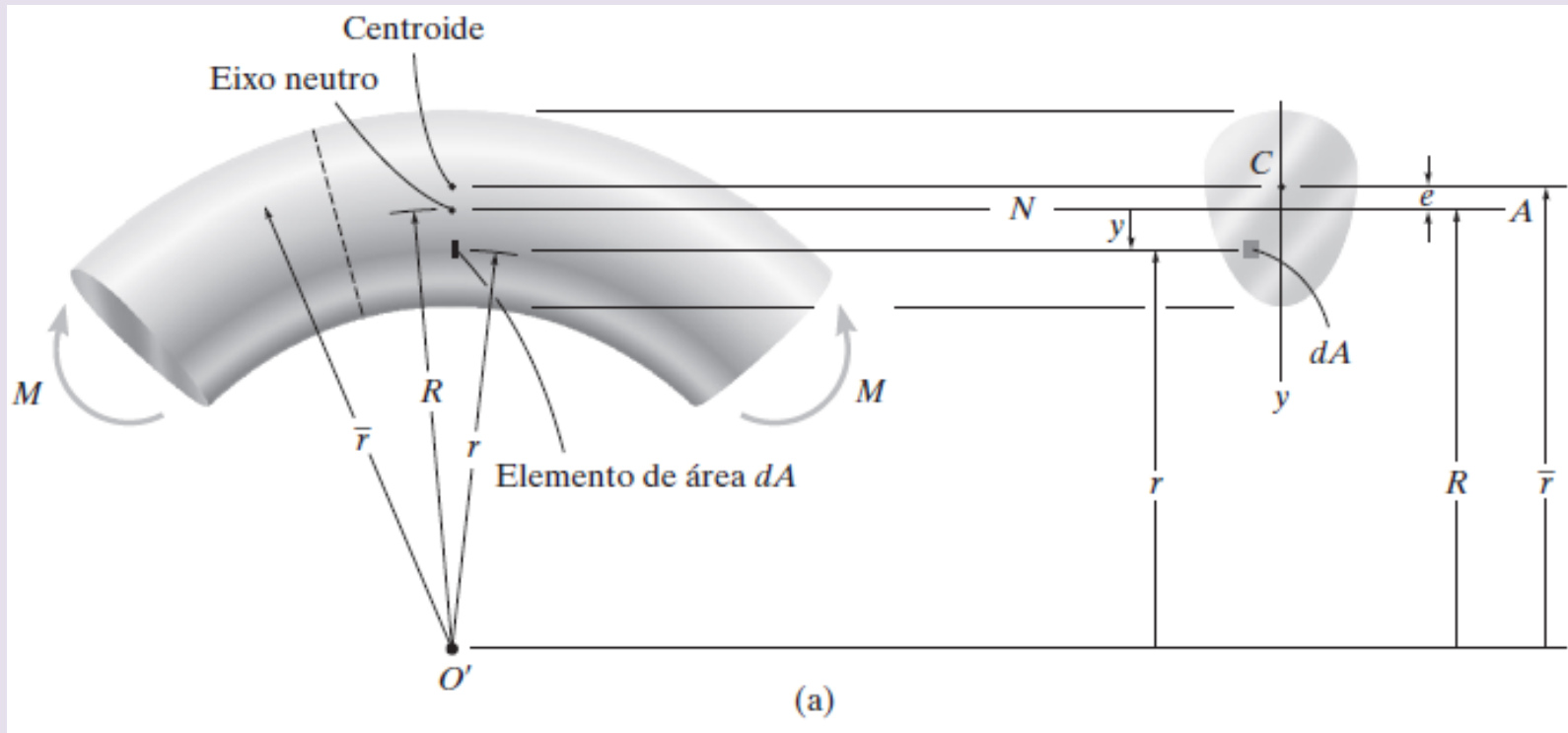
$$R = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{r}}$$

Onde:

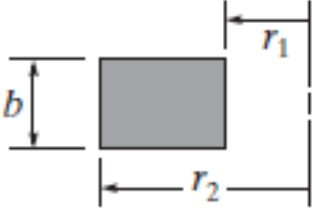
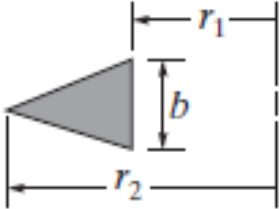
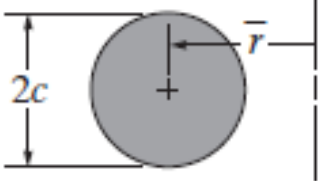
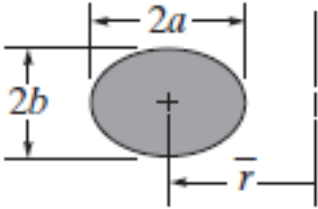
R - raio da superfície neutra

A - área da seção transversal

r - distância ao centro de curvatura

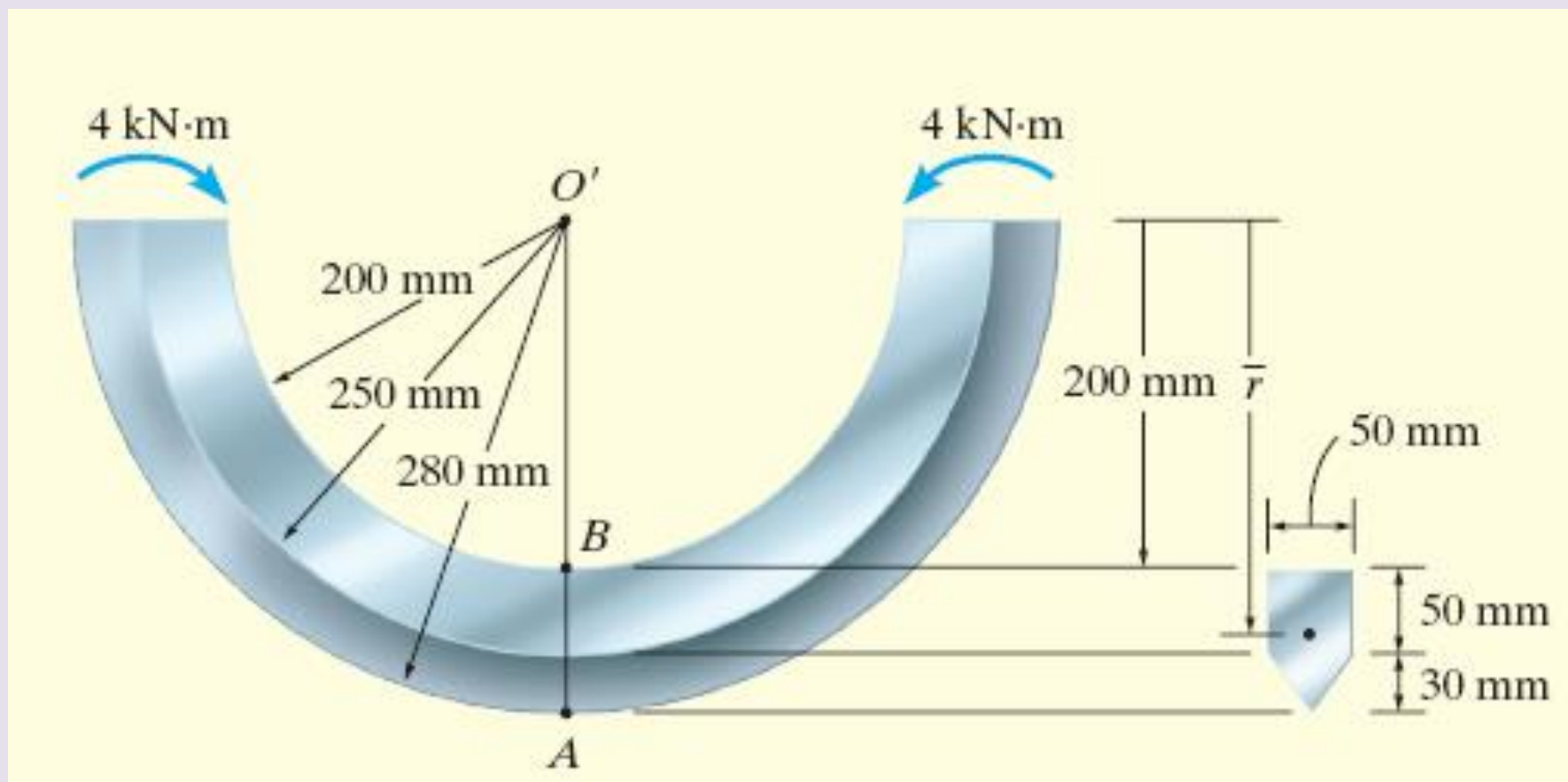


- A integral pode ser calculada para várias geometrias de seção transversal.

Forma	Área	$\int_A \frac{dA}{r}$
	$b(r_2 - r_1)$	$b \ln \frac{r_2}{r_1}$
	$\frac{b}{2}(r_2 - r_1)$	$\frac{b r_2}{(r_2 - r_1)} \left(\ln \frac{r_2}{r_1} \right) - b$
	πc^2	$2\pi \left(\bar{r} - \sqrt{\bar{r}^2 - c^2} \right)$
	πab	$\frac{2\pi b}{a} \left(\bar{r} - \sqrt{\bar{r}^2 - a^2} \right)$

Exemplo 13

A barra curva tem área de seção transversal mostrada na figura abaixo. Se estiver sujeita a momentos fletores de $4 \text{ kN}\cdot\text{m}$, determine a tensão normal máxima desenvolvida na barra.



Solução:

Visto que esse momento tende a diminuir o raio de curvatura da barra, ele é negativo (Regra) . Assim, a área total da seção transversal é

$$\sum A = (0,05)^2 + \frac{1}{2}(0,05)(0,03) = 3,25(10^{-3})\text{m}^2$$

A localização do centroide é determinada em relação ao centro de curvatura, ponto O' .

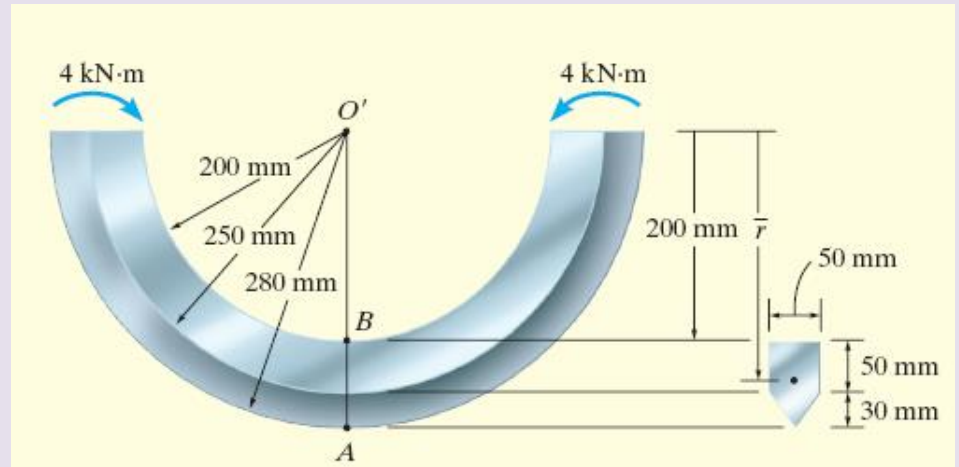
$$\bar{r} = \frac{\sum \tilde{r}A}{\sum A} = \frac{0,05^2 \cdot 0,225 + (0,05)(0,03)0,5}{3,25 \cdot 10^{-3}}$$

$$\bar{r} = \frac{\sum \tilde{r}A}{\sum A} = 0,23308 \text{ m}$$

A localização do eixo neutro (R):

Para o retângulo, $\int \frac{dA}{r} = 0,05 \left(\ln \frac{0,25}{0,2} \right) = 0,11157 \text{ m}$

Para o triângulo, $\int \frac{dA}{r} = \frac{(0,05)(0,28)}{(0,28-0,25)} \left(\ln \frac{0,28}{0,28} \right) - 0,05 = 0,0028867 \text{ m}$



Assim, a locação do eixo neutro é determinada por

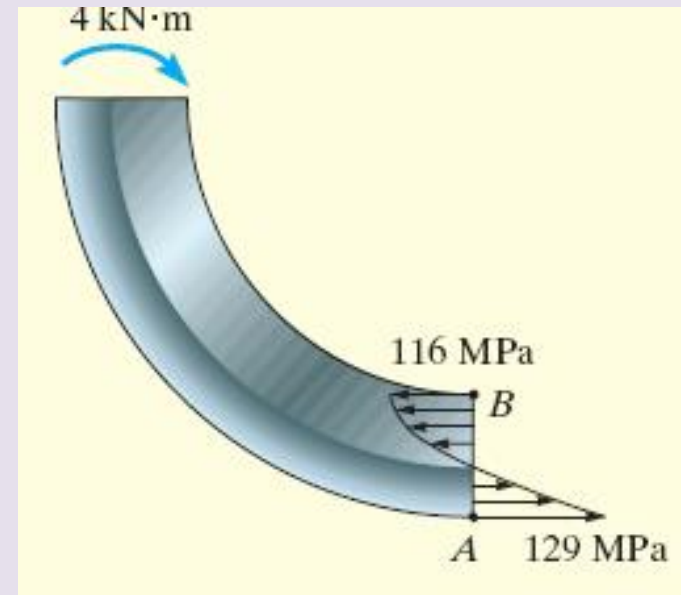
$$R = \frac{\sum A}{\sum \int_A \frac{dA}{r}} = \frac{3,25(10^{-3})}{0,011157 + 0,0028867} = 0,23142 \text{ m}$$

Aplicando a fórmula da viga curva para calcular a tensão normal em B e A ,

$$\sigma = \frac{My}{\rho Ay_c} = \frac{My}{(R - y)Ay_c}$$

Lembrando que:

y_c = coordenada y do centroide da área de seção transversal A , medida a partir do eixo neutro



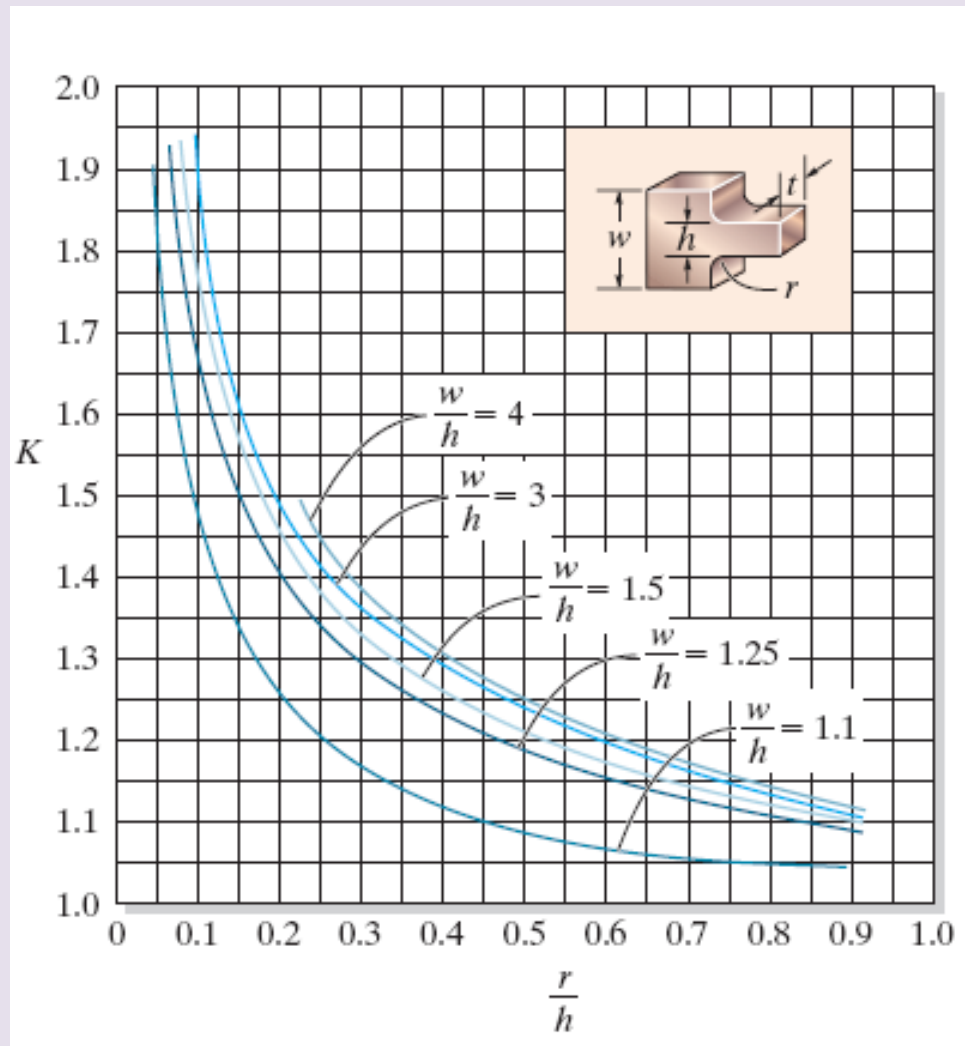
$$\sigma_B = \frac{M(R - r_B)}{Ar_B(\bar{r} - R)} = \frac{(-4)(0,23142 - 0,2)}{3,25(10^{-3})(0,2)(0,00166)} = -116 \text{ MPa}$$

$$\sigma_A = \frac{M(R - r_A)}{Ar_A(\bar{r} - R)} = \frac{(-4)(0,23142 - 0,280)}{3,25(10^{-3})(0,280)(0,00166)} = 129 \text{ MPa (Resposta)}$$

Concentrações de tensão

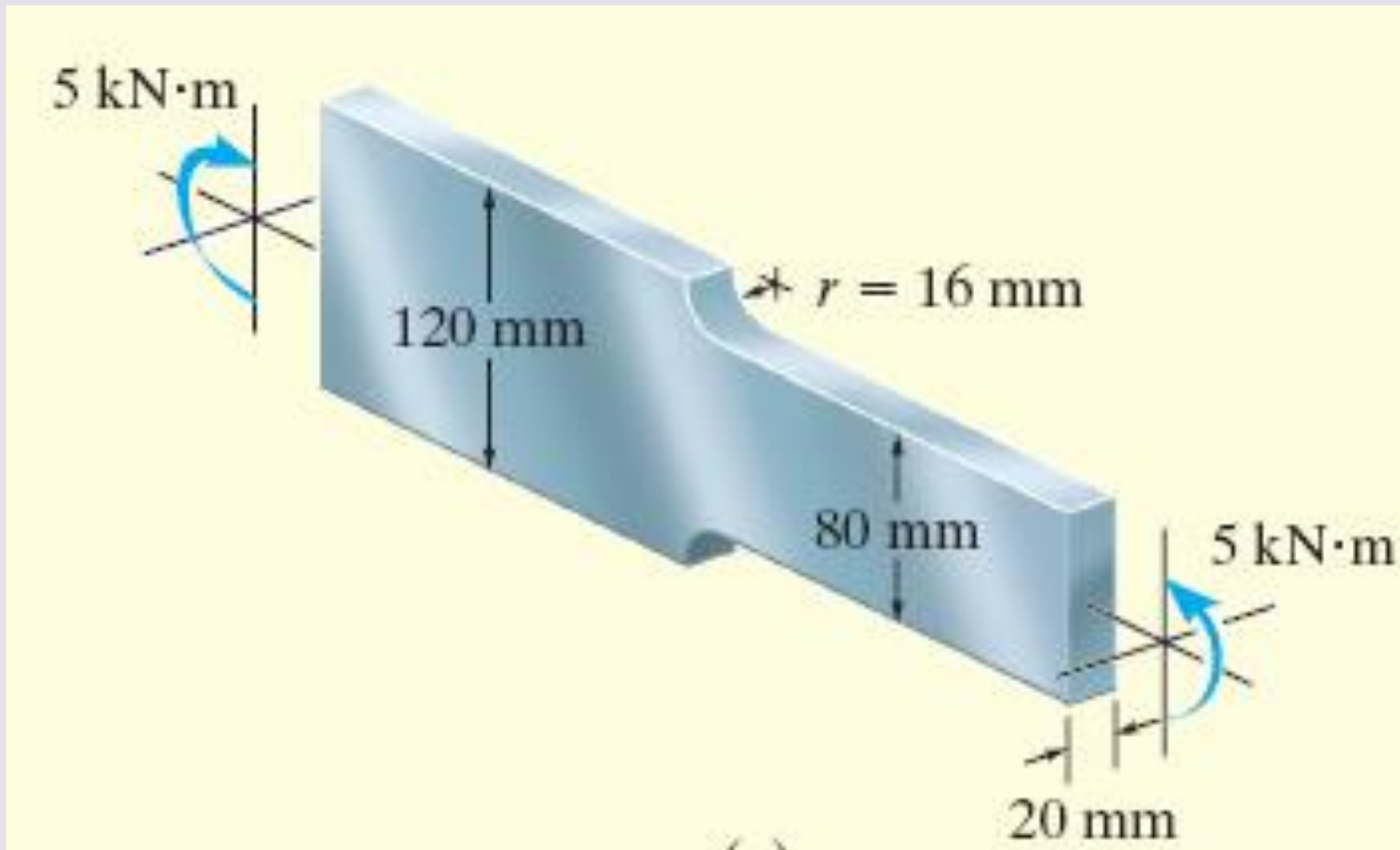
- A tensão normal *máxima* em cada uma das discontinuidades ocorre na seção que passa pela *menor* área de seção transversal.
- Uma vez que K for obtido, a tensão de flexão máxima é determinada por

$$\sigma_{\text{máx}} = K \frac{Mc}{I}$$



Exemplo 14

A transição na área da seção transversal da barra de aço é obtida por filetes de redução. Se a barra for submetida a um momento fletor $5 \text{ kN}\cdot\text{m}$, determine a tensão normal máxima desenvolvida no aço. A tensão de escoamento é $\sigma_e = 500 \text{ MPa}$.



Solução:

Pela geometria da barra,

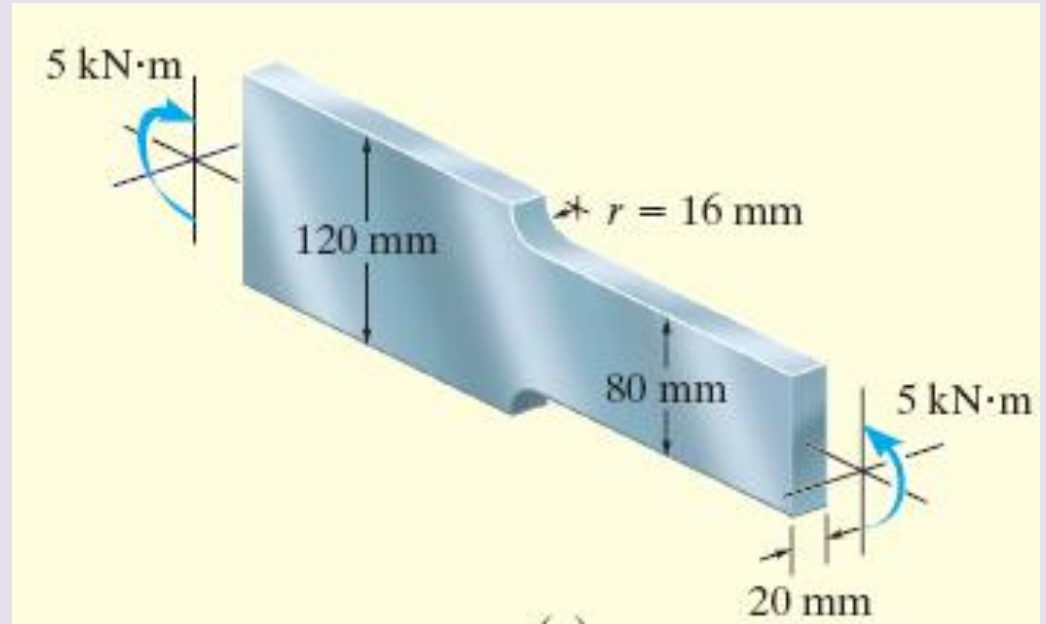
$$\frac{r}{h} = \frac{16}{80} = 0,2 \quad \frac{w}{h} = \frac{120}{80} = 1,5$$

Portanto K é 1,45 assim:

$$\sigma_{\text{máx}} = K \frac{Mc}{I} = (1,45) \frac{(5)(0,04)}{\left[\frac{1}{12} (0,02)(0,08)^3 \right]} = 340 \text{ MPa}$$

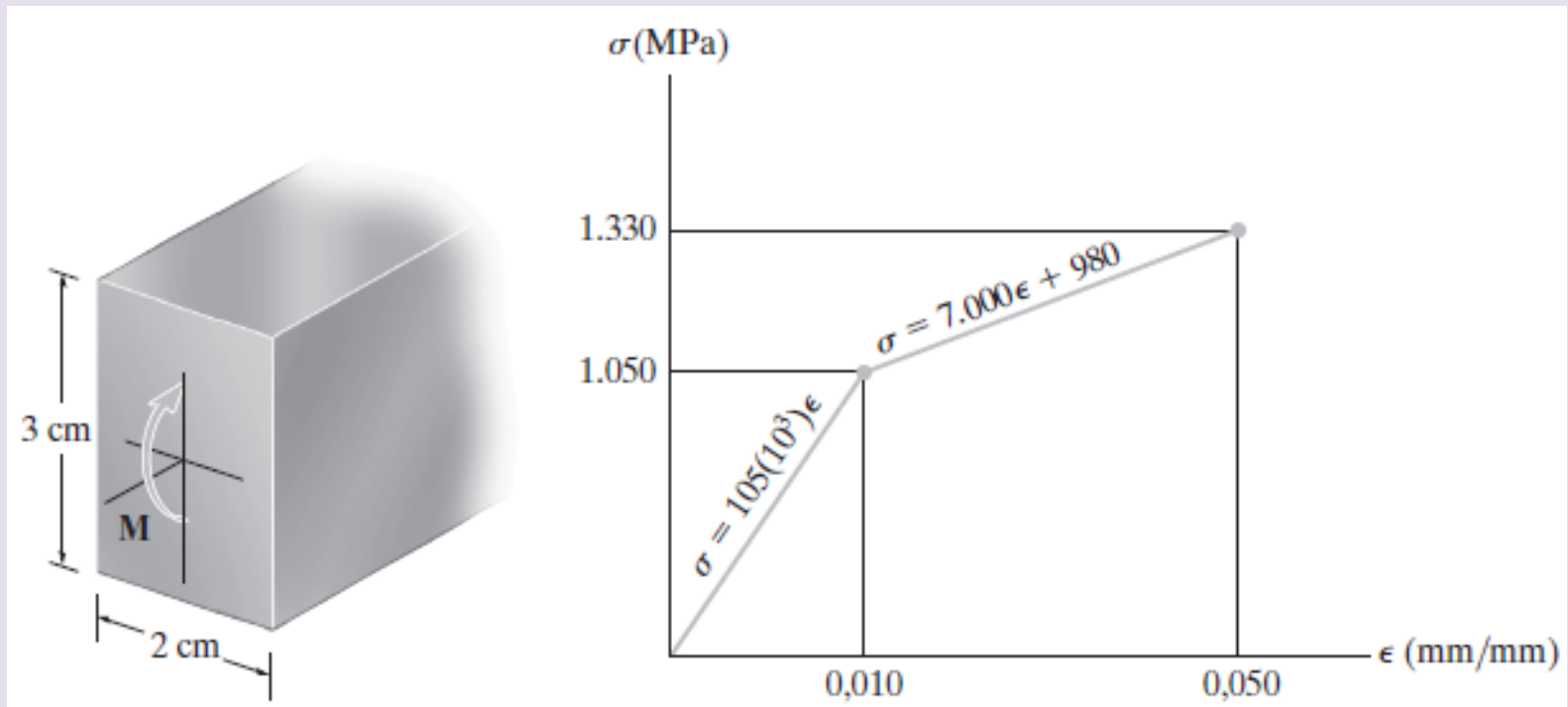
Este resultado indica que o aço permanece na região de deformação elástica, visto que a tensão está abaixo da tensão de escoamento (500 MPa).

Vejamos agora o exemplo de uma liga metálica...



Exemplo 15

Uma viga é feita de uma liga de titânio cujo diagrama tensão-deformação pode ser aproximado, em parte, por duas retas. Se o comportamento do material for o *mesmo* sob tração e sob compressão, determine o momento fletor que pode ser aplicado à viga e que fará com que o material, nas partes superior e inferior da viga, seja submetido a uma deformação de 0,050 mm/mm.



Solução:

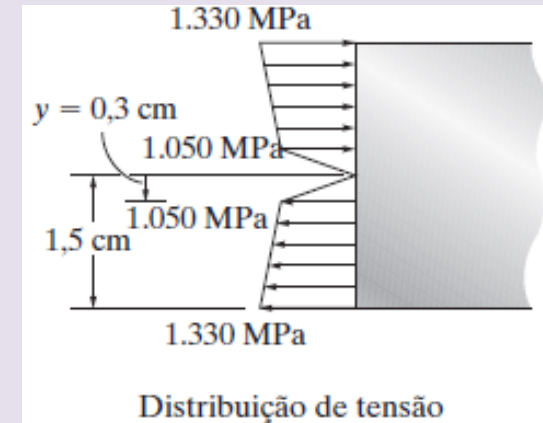
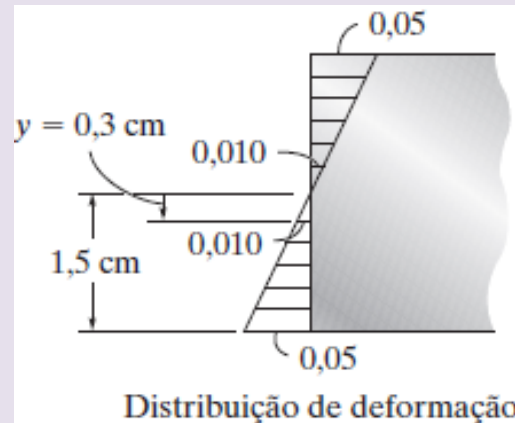
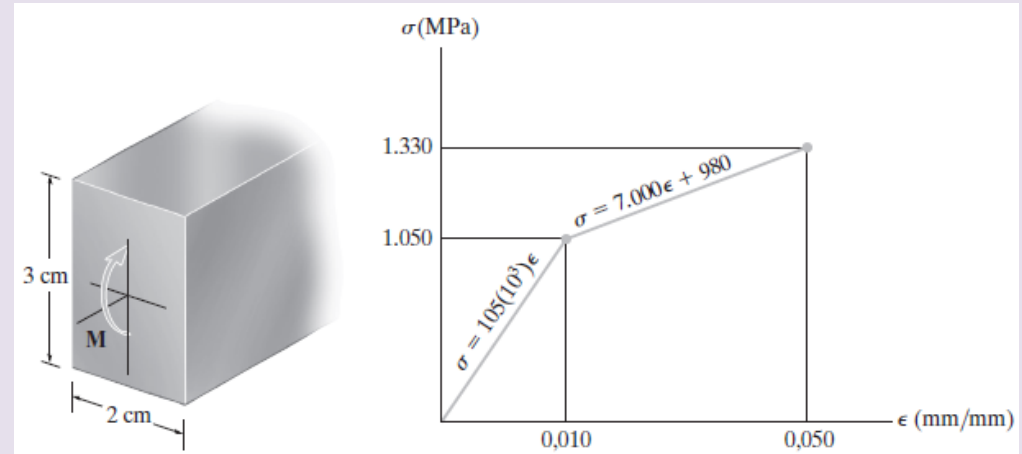
O ponto onde se desenvolve a tensão elástica máxima esta a uma distância de (por geometria, ver figura da distribuição da deformação):

$$\frac{0,05}{1,5} = \frac{0,01}{y} \Rightarrow y = 0,3 \text{ cm} = 3 \text{ mm}$$

As resultantes (Tração e Compressão) e suas posições são determinadas como mostrado:

$$T_1 = C_1 = \frac{1}{2}(12)(280)(20) = 33.600 = 33,6 \text{ kN}$$

$$y_1 = 0,3 + \frac{2}{3}(1,2) = 1,1 = 11,0 \text{ mm}$$

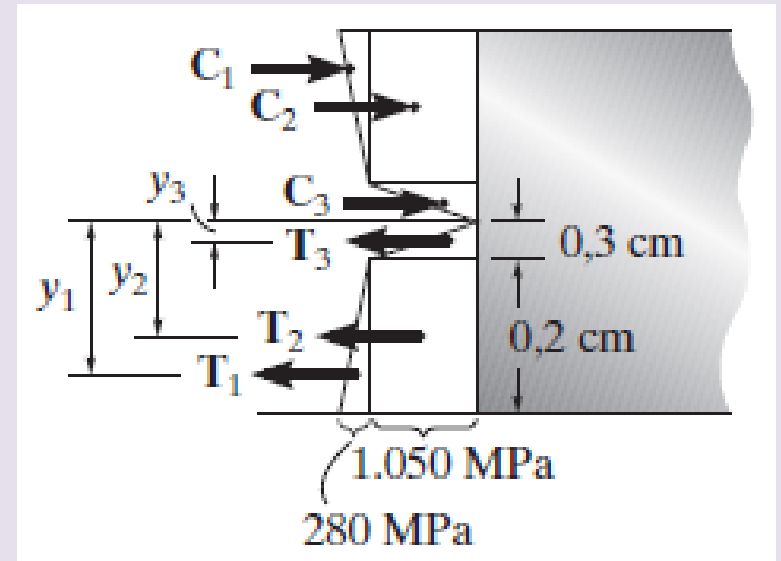


$$T_2 = C_2 = (12)(1.050)(20) = 25.200 = 252 \text{ kN}$$

$$y_2 = 0,3 + \frac{1}{2}(1,2) = 0,9 = 9 \text{ mm}$$

$$T_3 = C_3 = \frac{1}{2}(3)(1.050)(20) = 31.500 = 31,5 \text{ kN}$$

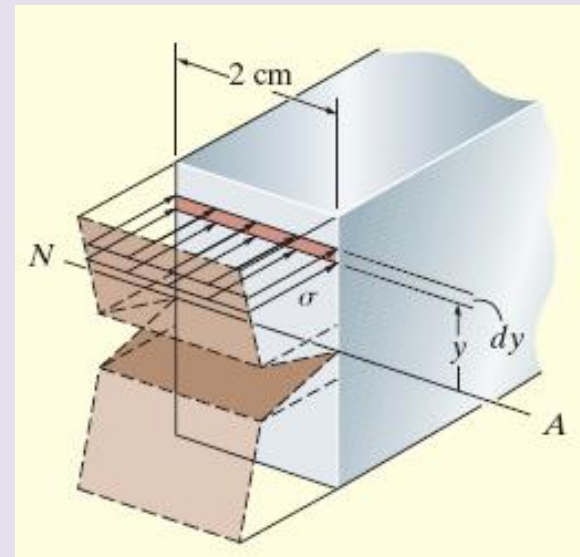
$$y_3 = \frac{2}{3}(0,3) = 0,2 = 2 \text{ mm}$$



O momento produzido por essa distribuição de tensão normal em torno do eixo neutro é, portanto,

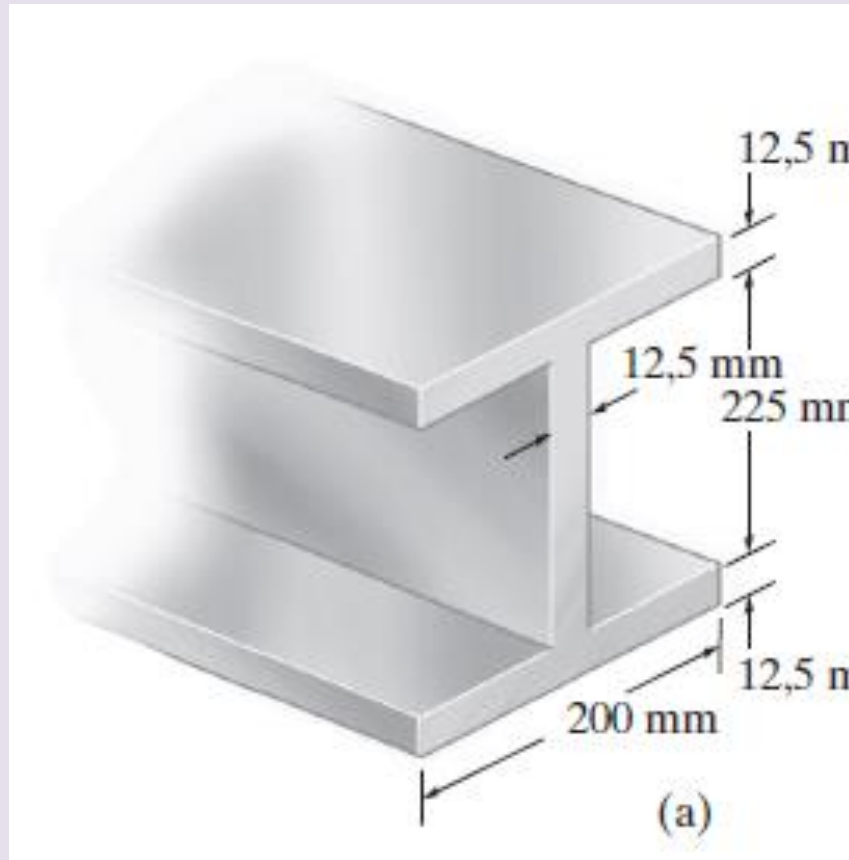
$$M = 2[33,6(110) + 252(9) + 31,5(2)]$$

$$= 5.401,2 \text{ kNmm} = 5,40 \text{ kNm} \text{ (Resposta)}$$



Exemplo 16

A viga mostrada na figura está sujeita a um momento inteiramente plástico de M_p . Se esse momento for removido, determine a distribuição de tensão residual na viga. O material é elástico perfeitamente plástico e tem tensão de escoamento de $\sigma_e = 250$ MPa.



Solução:

A partir de cálculos, temos $I = 82,44 \times 10^6 \text{ mm}^4$

Portanto,

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{Mc}{I}; \quad \sigma_{\text{adm}} = \frac{(188 \times 10^6)(125)}{82,44 \times 10^6} = 285,1 \text{ N/mm}^2 = 285,1 \text{ MPa}$$

Como esperado, $\sigma_r < 2\sigma_y$. O ponto de tensão normal nula foi determinado por proporção.

$$\frac{281,51}{125} = \frac{2.501}{y} \Rightarrow y = 109,61 \text{ mm}$$

