

# FÍSICA I

Prof. Dr. Patricio R. Impinnisi

## Aula 4: Movimento 2D e 3D

# Posição e Deslocamento

# POSIÇÃO

O **vetor posição** localiza a partícula no espaço. Liga a origem de coordenadas à partícula

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

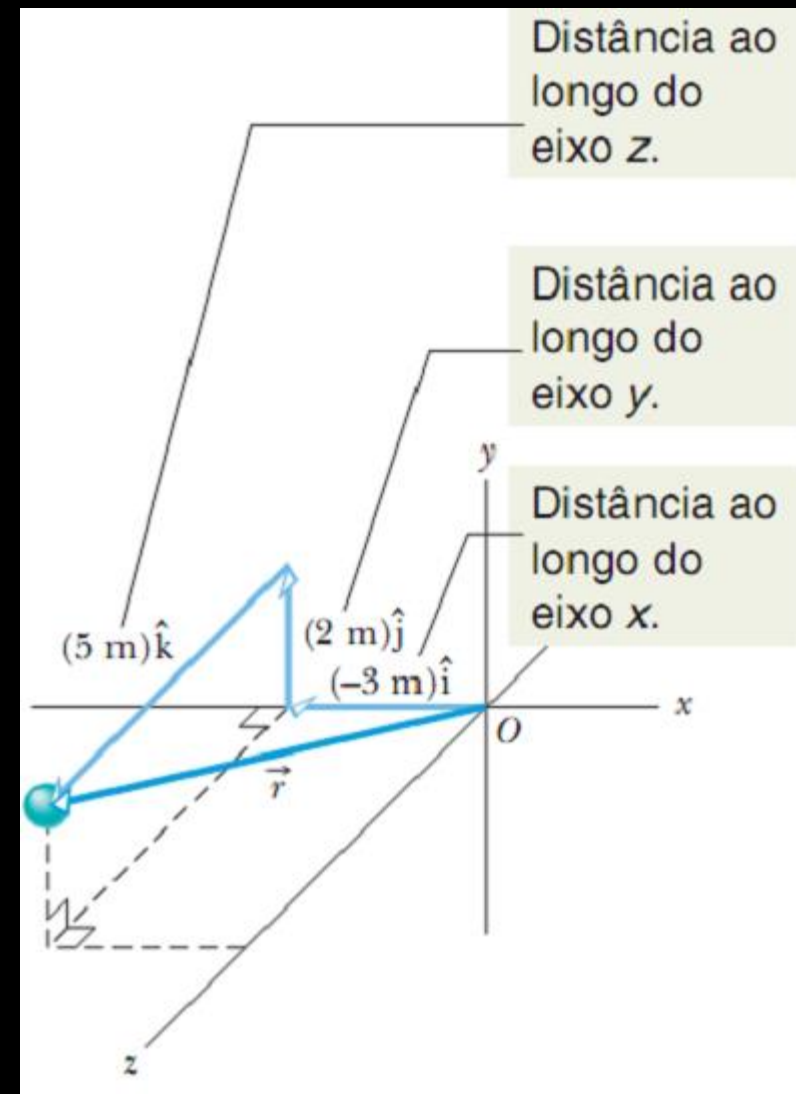
Exemplo:

O **vetor posição** (-3 m, 2 m, 5 m) é

$$\vec{r} = (-3\text{ m})\hat{i} + (2\text{ m})\hat{j} + (5\text{ m})\hat{k}$$

A variação do vetor posição é o vetor deslocamento

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

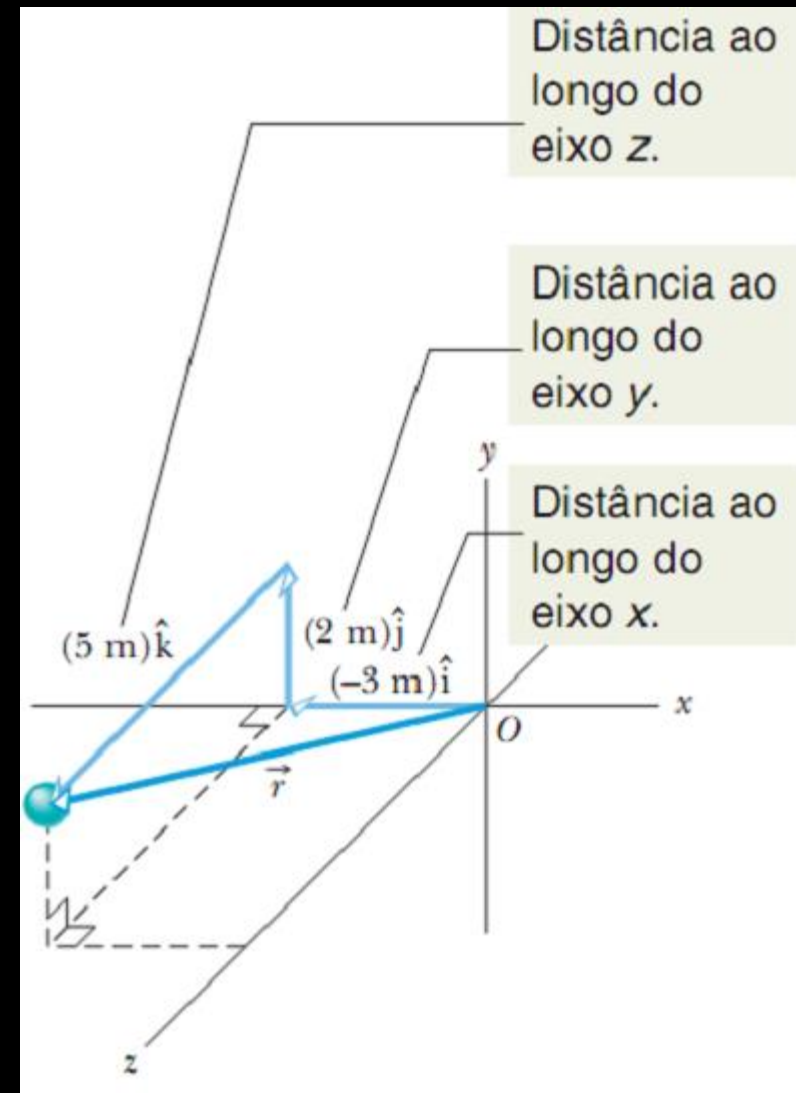


# DESLOCAMENTO

O **vetor deslocamento** pode ser escrito assim:

$$\Delta \vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$\Delta \vec{r} = \Delta x \hat{i} + \Delta y \hat{j} + \Delta z \hat{k}$$



# VELOCIDADE MÉDIA

## Velocidade média

É a razão entre um deslocamento  $\Delta\vec{r}$  e o intervalo de tempo  $\Delta t$

$$\vec{v}_{\text{méd}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x \hat{i} + \Delta y \hat{j} + \Delta z \hat{k}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \hat{k}$$

Exemplo:

Uma partícula sofre um deslocamento de  $(12 \text{ m}) \hat{i} + (3,0 \text{ m}) \hat{k}$  em 2,0 s:

$$\vec{v}_{\text{méd}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{(12 \text{ m}) \hat{i} + (3,0 \text{ m}) \hat{k}}{2 \text{ s}} = \left(6,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \hat{i} + \left(1,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \hat{k}$$

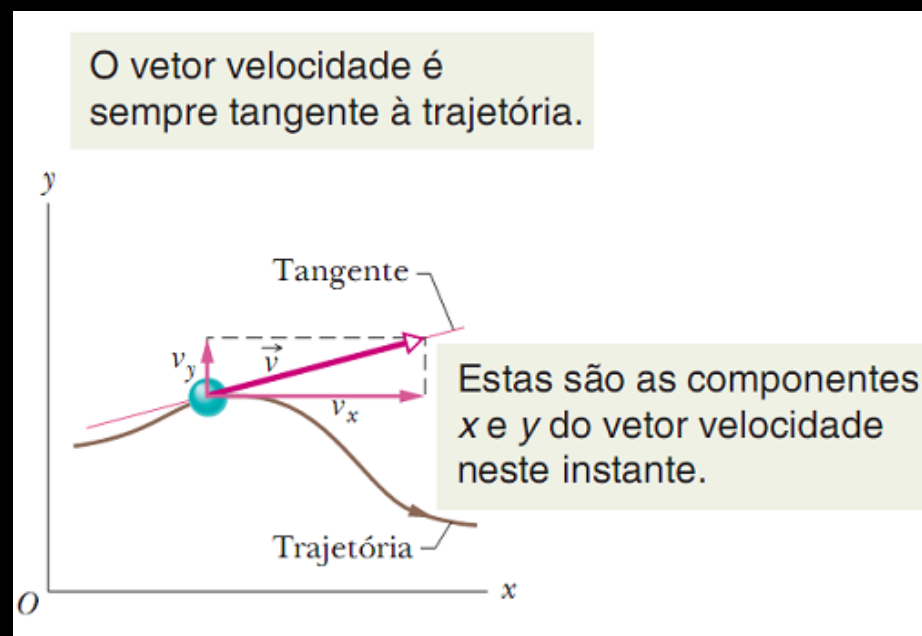
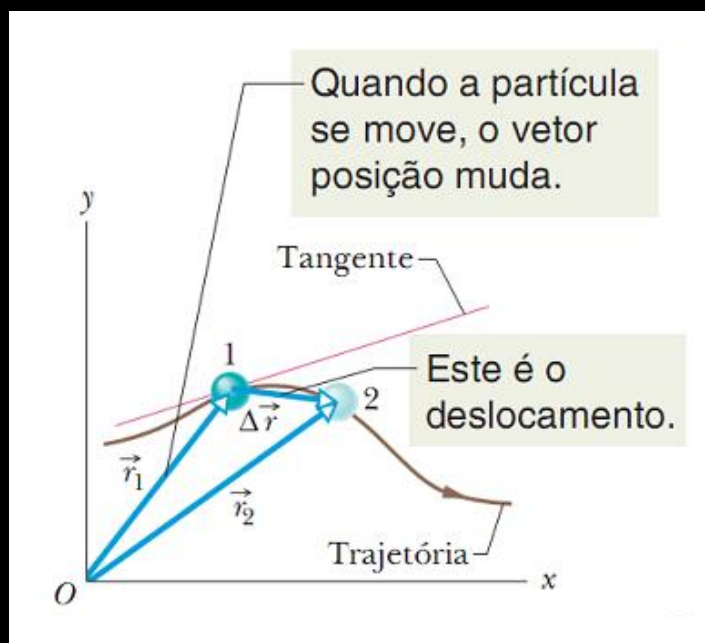
# VELOCIDADE INSTANTÂNEA

## Velocidade instantânea $\vec{v}$ (ou simplesmente velocidade)

É o limite da razão entre o deslocamento  $\vec{\Delta x}$  e o intervalo de tempo  $\Delta t$  quando  $\Delta t \rightarrow 0$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$$



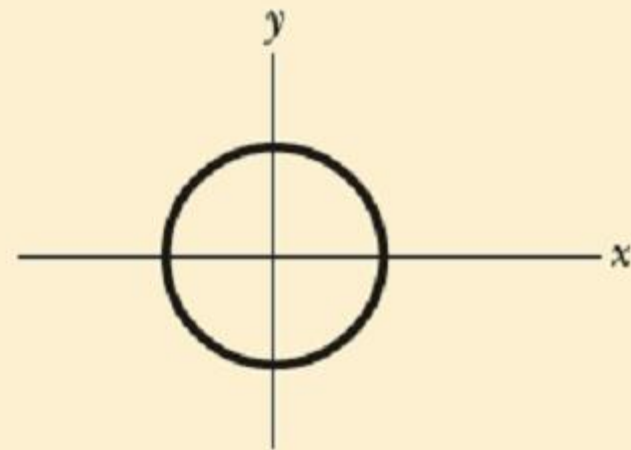


# VELOCIDADE INSTANTÂNEA



## Teste 1

A figura mostra uma trajetória circular descrita por uma partícula. Se a velocidade da partícula em um dado instante é  $\vec{v} = (2 \text{ m/s}) \hat{i} - (2 \text{ m/s}) \hat{j}$ , em qual dos quadrantes a partícula está se movendo nesse instante se o movimento é (a) no sentido horário e (b) no sentido anti-horário? Desenhe  $\vec{v}$  na figura para os dois casos.



# ACELERAÇÃO

**Aceleração média** é a variação de velocidade dividida pelo intervalo de tempo correspondente

$$\vec{a}_{méd} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

**Aceleração instantânea** (ou simplesmente aceleração) é o limite da aceleração média quando o intervalo de tempo tende a 0

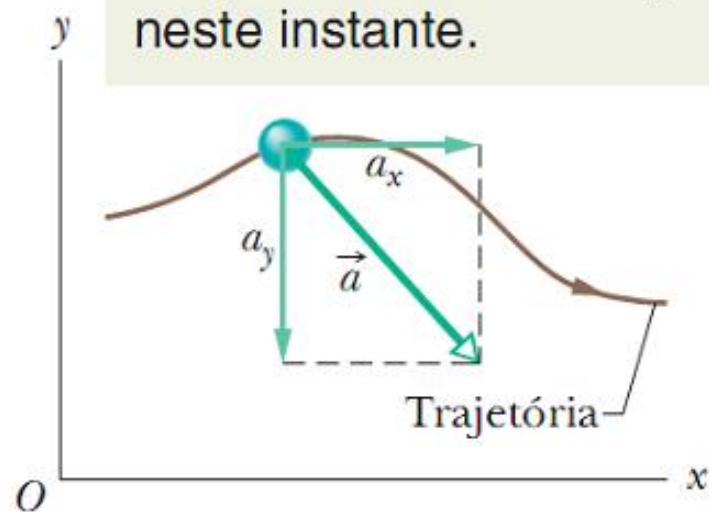
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Podemos escrever, na notação dos **vetores unitários**:

$$\vec{a} = \frac{d(v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k})}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \hat{i} + \frac{dv_y}{dt} \hat{j} + \frac{dv_z}{dt} \hat{k}$$

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

Estas são as componentes x e y do vetor aceleração neste instante.





# ACELERAÇÃO



## Teste 2

Considere as seguintes descrições da posição (em metros) de uma partícula que se move no plano  $xy$ :

$$(1) \quad x = -3t^2 + 4t - 2 \quad \text{e} \quad y = 6t^2 - 4t \quad (3) \quad \vec{r} = 2t^2\hat{i} - (4t + 3)\hat{j}$$

$$(2) \quad x = -3t^3 - 4t \quad \text{e} \quad y = -5t^2 + 6 \quad (4) \quad \vec{r} = (4t^3 - 2t)\hat{i} + 3\hat{j}$$

As componentes  $x$  e  $y$  da aceleração são constantes em todas essas situações?

A aceleração  $\vec{a}$  é constante?

Respostas: (1)  $x$ : sim,  $y$ : sim,  $a$ : sim    (3)  $x$ : sim,  $y$ : sim,  $a$ : sim

(2)  $x$ : não,  $y$ : sim,  $a$ : não    (4)  $x$ : não,  $y$ : sim,  $a$ : não

# MOVIMENTO BALÍSTICO

Um **projétil** é:

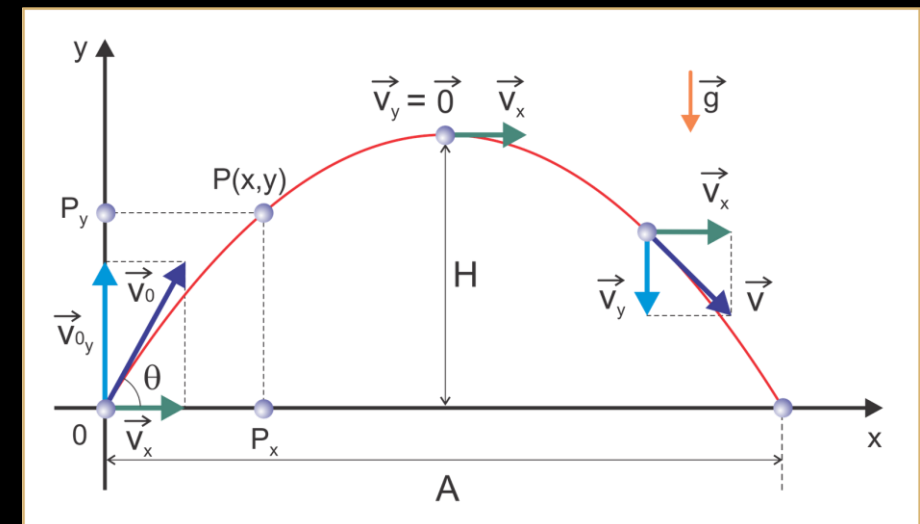
- ✓ uma partícula em movimento vertical
- ✓ com uma certa velocidade inicial
- ✓ cuja aceleração é a aceleração de queda livre ( $g$ )

O movimento de um projétil é chamado de **movimento balístico**

As componentes da velocidade inicial  $\vec{v}_0$  são:

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta \quad \text{e} \quad v_{0y} = v_0 \sin\theta$$

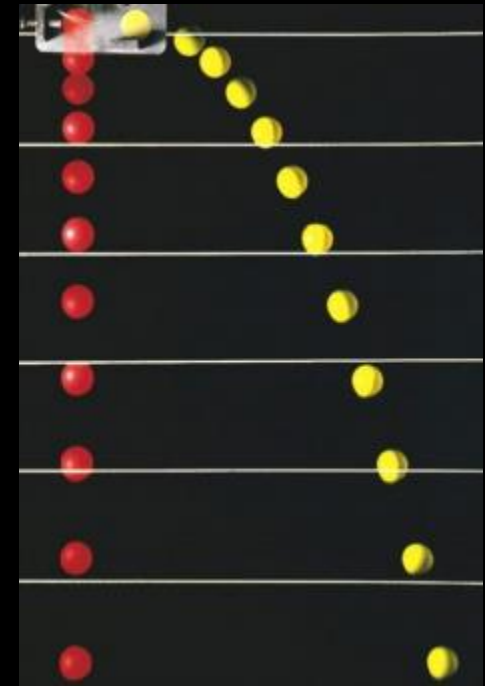
Neste caso, os movimentos vertical e horizontal **são independentes!!!**



# MOVIMENTO BALÍSTICO

Desta forma podemos decompor o movimento balístico bidimensional em dois movimentos unidimensionais independentes:

- (a) Um movimento horizontal com velocidade constante
- (b) Um movimento vertical com aceleração constante



## Teste 3

Em um dado instante, uma bola que descreve um movimento balístico tem uma velocidade  $\vec{v} = 25\hat{i} - 4,9\hat{j}$  (o eixo  $x$  é horizontal, o eixo  $y$  é vertical e aponta para cima e  $\vec{v}$  está em metros por segundo). A bola já passou pelo ponto mais alto da trajetória?

# MOVIMENTO BALÍSTICO

## Movimento horizontal:

Como a aceleração é zero, a velocidade é constante

$$x - x_0 = v_{0x}t$$

$$x - x_0 = (v_0 \cos \theta_0)t$$

$$v_x = v_0 \cos \theta_0$$

## Movimento vertical:

Como a aceleração é constante (-g)

$$y - y_0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y - y_0 = (v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v_y = v_0 \sin \theta_0 - gt$$

$$v_y^2 = (v_0 \sin \theta_0)^2 - 2g(y - y_0)$$

# MOVIMENTO BALÍSTICO

A **trajetória de um projétil** é:

- ✓ seu percurso no espaço (uma parábola)
- ✓ Combinando as equações (eliminando  $t$ ) se obtém

$$y = (tg\theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0\cos\theta_0)^2}$$

O **alcance horizontal** é:

- ✓ A distância horizontal percorrida pelo projétil até voltar à altura original ( $y - y_0 = 0$ )

$$x_{máx} = \frac{v_0^2}{g} \text{sen}(2\theta_0)$$



# MOVIMENTO BALÍSTICO

A **altura máxima** é:

✓ A distância vertical percorrida até sua velocidade vertical ser zero

$$y_{max} = \frac{v_0^2}{2g} \text{sen}^2 \theta_0$$



## Teste 4

Uma bola de beisebol é rebatida na direção do campo de jogo. Durante o percurso (ignorando o efeito do ar), o que acontece com as componentes (a) horizontal e (b) vertical da velocidade? Qual é a componente (c) horizontal e (d) vertical da aceleração durante a subida, durante a descida e no ponto mais alto da trajetória?

# MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORME

Uma partícula está com **MCU** se:

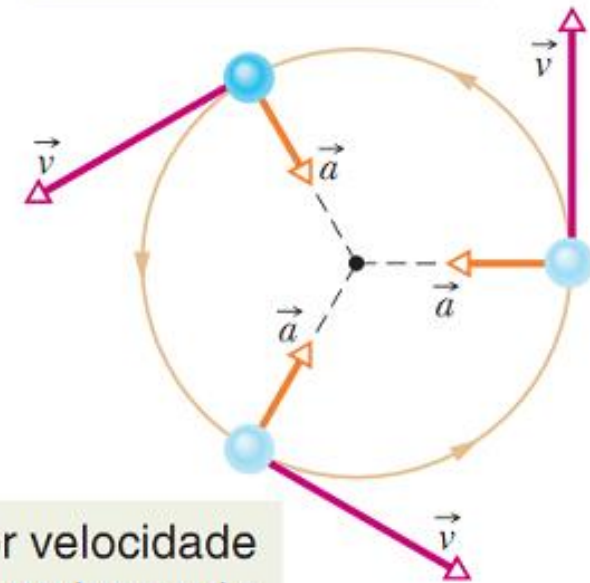
- ✓ a **trajetória é uma circunferência** ou um **arco de circunferência**
- ✓ se a **velocidade escalar é constante**

Como a velocidade **muda de direção**, o movimento é acelerado

A velocidade e a aceleração têm:

- ✓ **módulo constante**
- ✓ **direção variável**

O vetor aceleração sempre aponta para o centro.



O vetor velocidade é sempre tangente à trajetória.

# MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORME

A aceleração do MCU é chamada de **aceleração centrípeta**:  $a = \frac{v^2}{r}$

O **período de revolução** é o tempo que a partícula leva para descrever uma circunferência completa

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$



## Teste 5

Um objeto se move com velocidade escalar constante, ao longo de uma trajetória circular, em um plano  $xy$  horizontal com o centro na origem. Quando o objeto está em  $x = -2$  m, a velocidade é  $-(4 \text{ m/s})\hat{j}$ . Determine (a) a velocidade e (b) a aceleração do objeto em  $y = 2$  m.

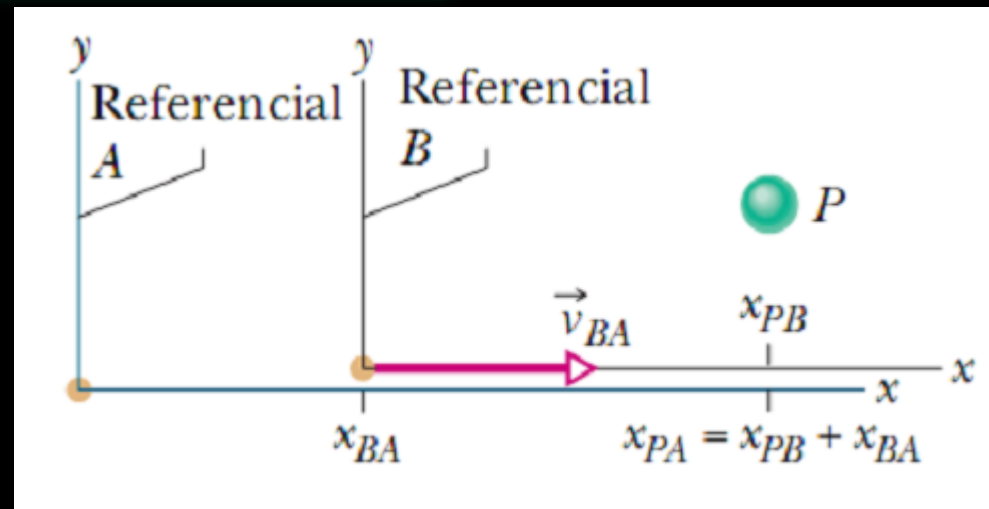
# MOVIMENTO RELATIVO 1D

As medidas de posição e velocidade dependem do **referencial** do observador.

Imagine dois referenciais em movimento relativo com velocidade constante, de onde se observa o ponto P.

Os índices “PA”, “PB”, “BA” significam “P medido por A”, “P medido por B” e “B medido por A”

As seguintes relações são válidas:



$$x_{PA} = x_{PB} + x_{BA}$$

$$\frac{dx_{PA}}{dt} = \frac{dx_{PB}}{dt} + \frac{dx_{BA}}{dt} \quad v_{PA} = v_{PB} + v_{BA}$$

$$\frac{dv_{PA}}{dt} = \frac{dv_{PB}}{dt} + \frac{dv_{BA}}{dt} \quad a_{PA} = a_{PB}$$



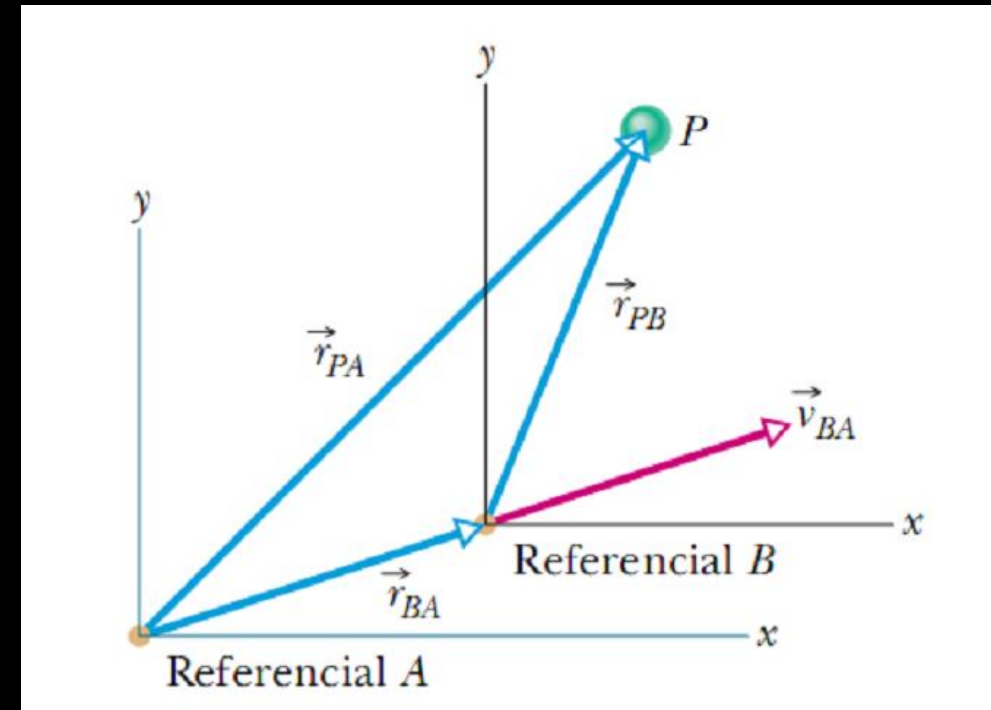
# MOVIMENTO RELATIVO 2D

Neste caso utilizamos vetores para determinar as relações a seguir:

Entre posições:  $\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA}$

Entre velocidades  $\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}$

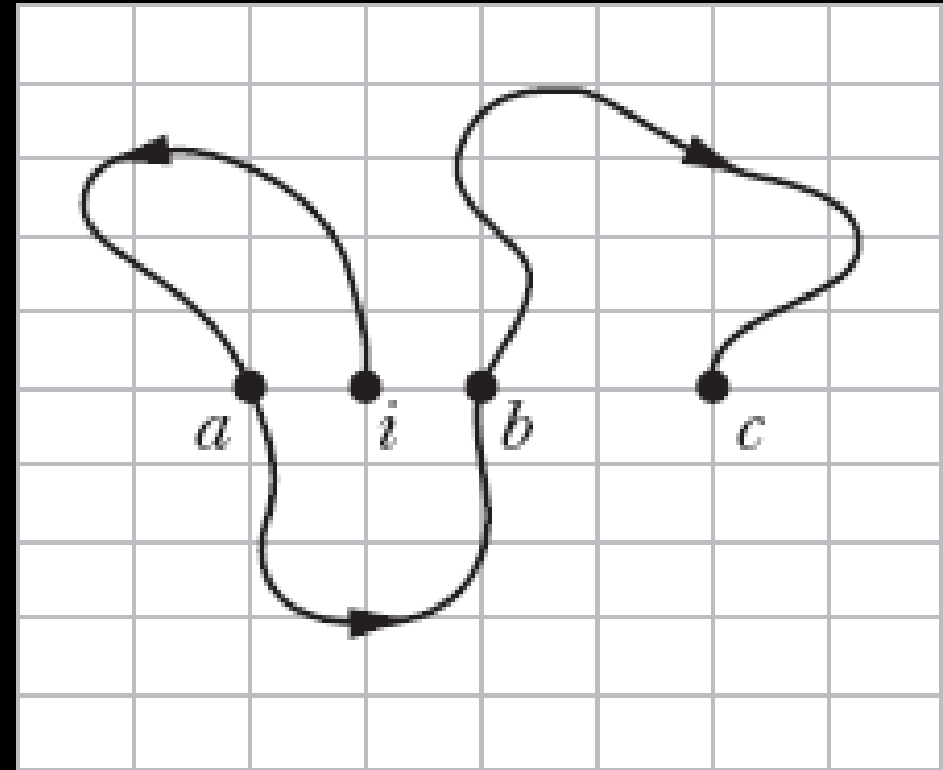
Entre acelerações  $\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB}$





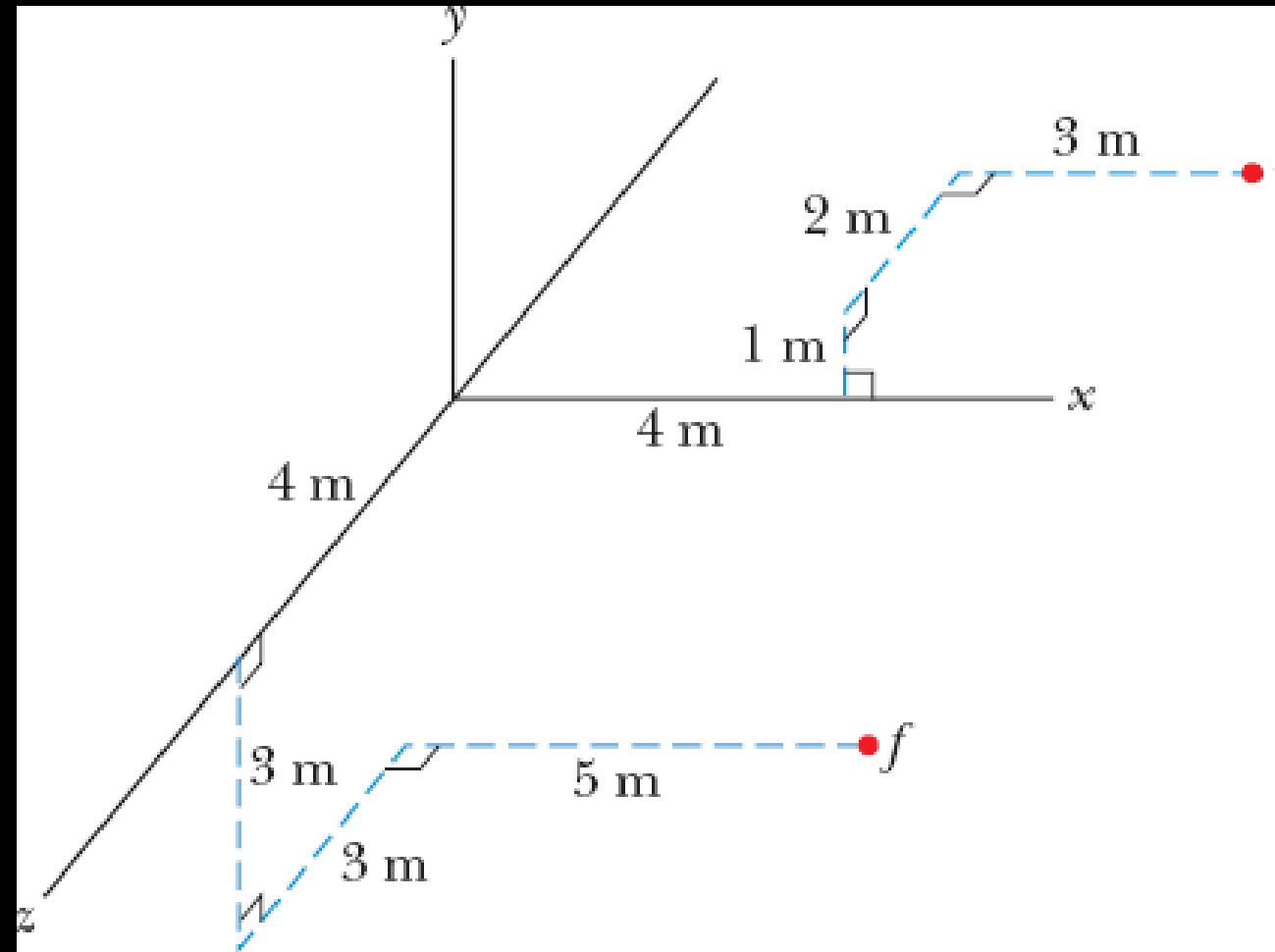
# PERGUNTAS

1. A figura mostra o caminho seguido por um gambá à procura de comida em latas de lixo, a partir do ponto inicial  $i$ . O gambá levou o mesmo tempo  $t$  para ir de cada um dos pontos marcados até o ponto seguinte. Ordene os pontos  $a$ ,  $b$  e  $c$  de acordo com o módulo da velocidade média do gambá para alcançá-los a partir do ponto inicial  $i$ , começando pelo maior.



# PERGUNTAS

2. A figura mostra a posição inicial  $i$  e a posição final  $f$  de uma partícula. Determine (a) o vetor posição inicial  $\vec{r}_i$  e (b) o vetor posição final  $\vec{r}_f$  da partícula, ambos na notação dos vetores unitários. (c) Qual é a componente  $x$  do deslocamento  $\Delta\vec{r}$ ?



# PERGUNTAS

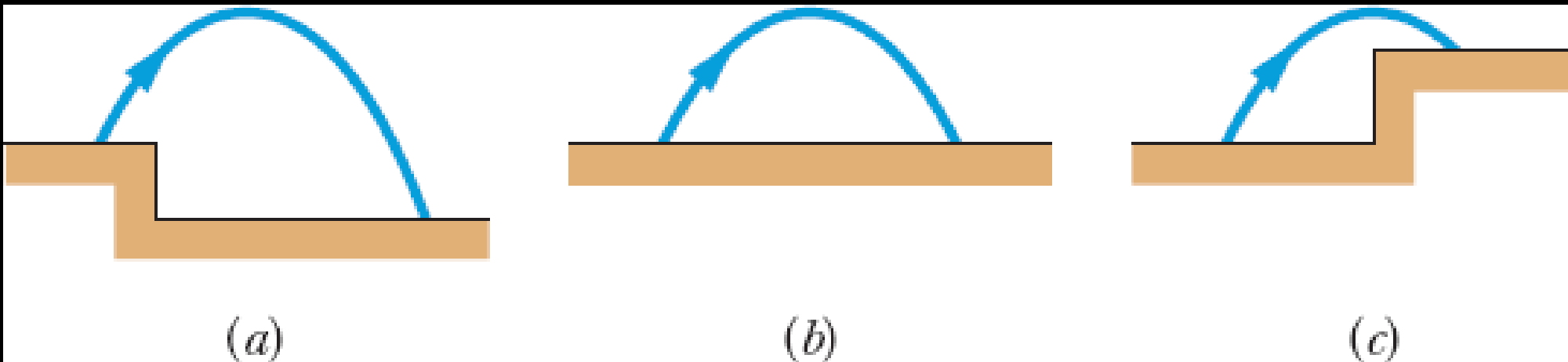
**3.** Quando Paris foi bombardeada a mais de 100 km de distância na Primeira Guerra Mundial, por um canhão apelidado de “Big Bertha”, os projéteis foram lançados com um ângulo maior que  $45^\circ$  para atingirem uma distância maior, possivelmente até duas vezes maior que a  $45^\circ$ . Esse resultado significa que a densidade do ar em grandes altitudes aumenta ou diminui com a altitude?

# PERGUNTAS

4. Você tem que lançar um foguete, praticamente do nível do solo, com uma das velocidades iniciais especificadas pelos seguintes vetores:  $\vec{v}_0 = 20 \hat{i} + 70 \hat{j}$ , (2)  $\vec{v}_0 = -20 \hat{i} + 70 \hat{j}$ , (3)  $\vec{v}_0 = 20 \hat{i} - 70 \hat{j}$ , (4)  $\vec{v}_0 = -20 \hat{i} - 70 \hat{j}$ . No seu sistema de coordenadas,  $x$  varia ao longo do nível do solo e  $y$  cresce para cima. (a) Ordene os vetores de acordo com a velocidade escalar de lançamento do projétil, começando pelo maior. (b) Ordene os vetores de acordo com o tempo de voo do projétil, começando pelo maior.

# PERGUNTAS

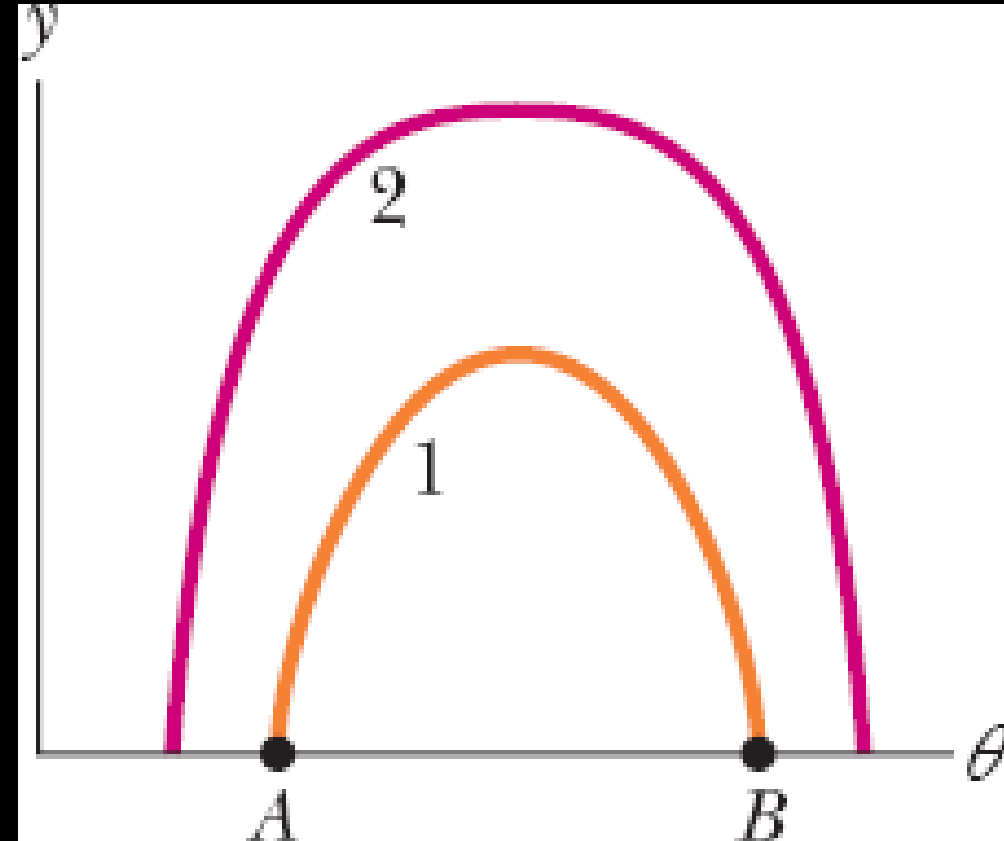
**5.** A figura mostra três situações nas quais projéteis iguais são lançados do solo (a partir da mesma altura) com a mesma velocidade escalar e o mesmo ângulo. Entretanto, os projéteis não caem no mesmo terreno. Ordene as situações de acordo com a velocidade escalar final dos projéteis imediatamente antes de aterrissarem, começando pela maior.





# PERGUNTAS

6. O único uso decente de um bolo de frutas é na prática do arremesso. A curva 1 na figura mostra a altura “ $y$ ” de um bolo de frutas arremessado por uma catapulta em função do ângulo  $\theta$  entre o vetor velocidade e o vetor aceleração durante o percurso. (a) Qual dos pontos assinalados por letras nessa curva corresponde ao choque do bolo de frutas com o solo? (b) A curva 2 é um gráfico semelhante para a mesma velocidade escalar inicial, mas para um ângulo de lançamento diferente. Nesse caso, o bolo de frutas vai cair em um ponto mais distante ou mais próximo do ponto de lançamento?



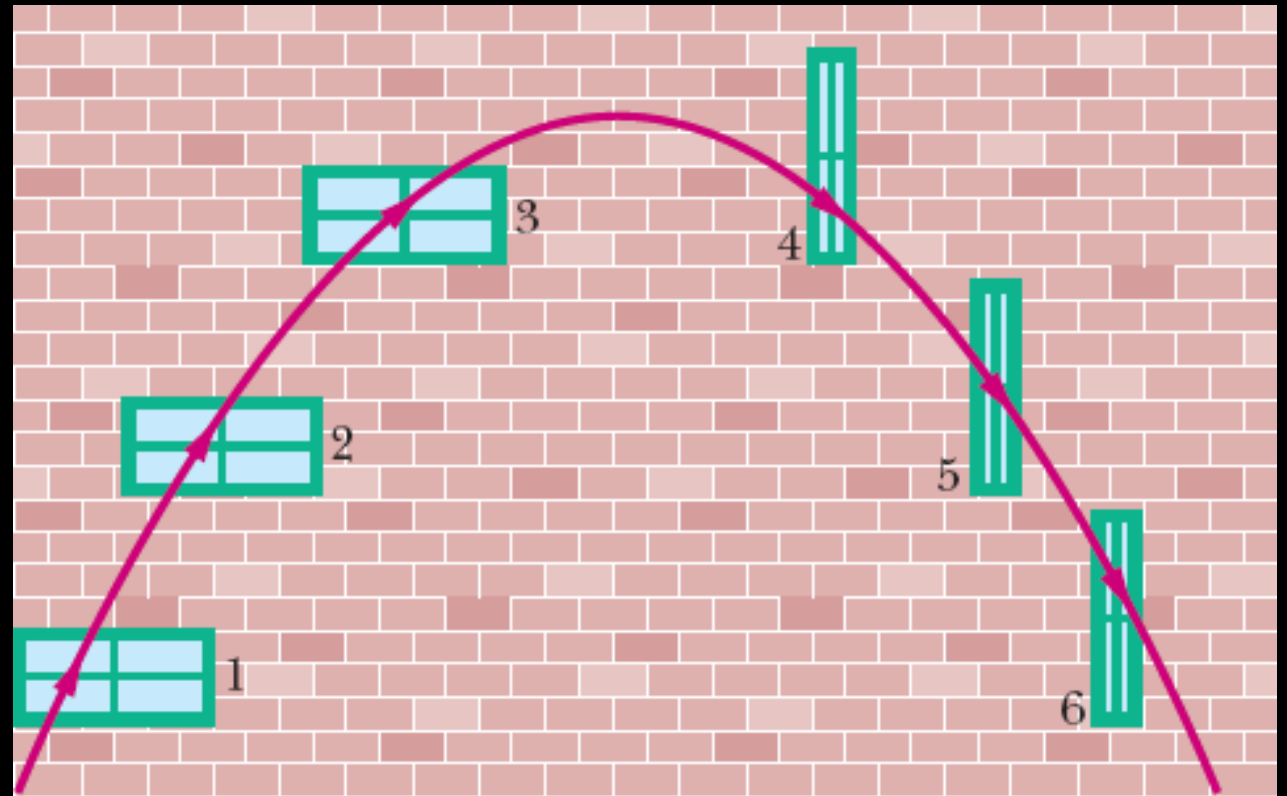
# PERGUNTAS

**7.** Um avião que está voando horizontalmente com uma velocidade constante de 350 km/h, sobrevoando um terreno plano, deixa cair um fardo com suprimentos. Ignore o efeito do ar sobre o fardo. Quais são as componentes inicial (a) vertical e (b) horizontal da velocidade do fardo? (c) Qual é a componente horizontal da velocidade imediatamente antes de o fardo se chocar com o solo? (d) Se a velocidade do avião fosse 450 km/h, o tempo de queda seria maior, menor ou igual?

# PERGUNTAS

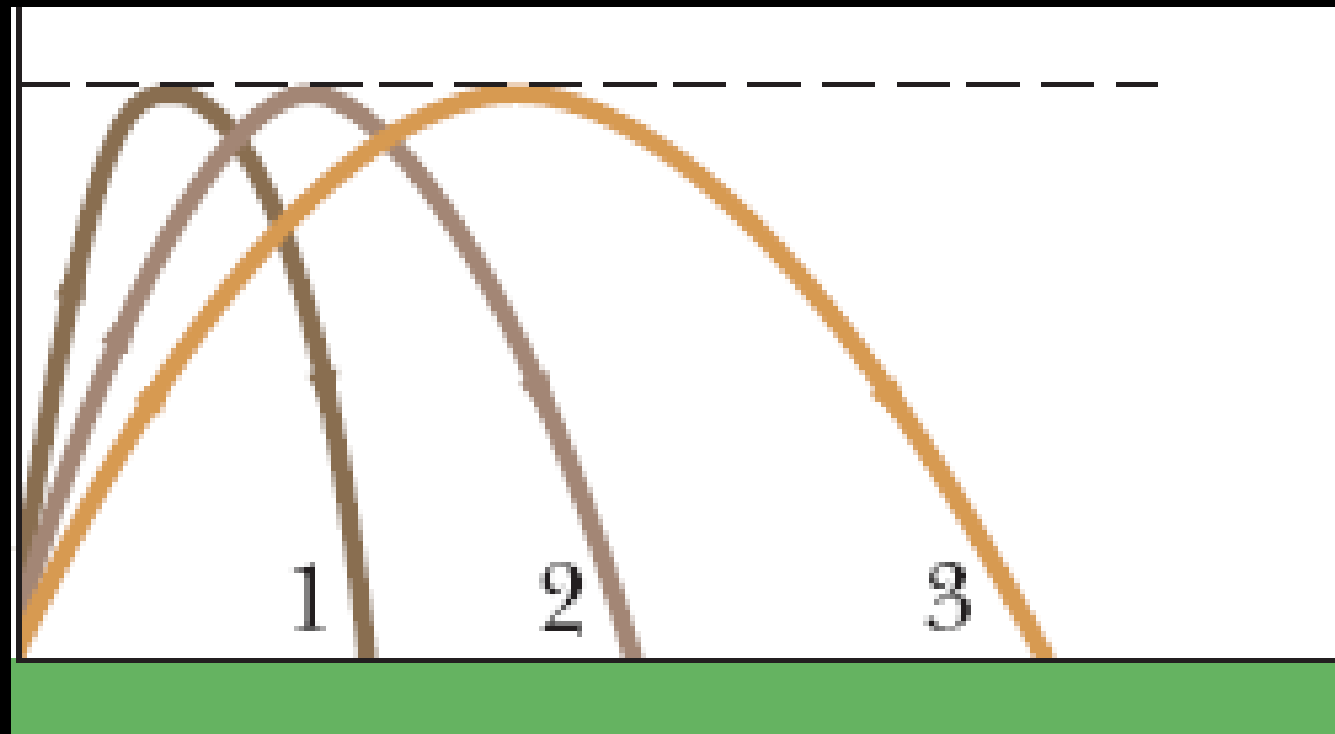
**8.** Na figura, uma tangerina é arremessada para cima e passa pelas janelas 1, 2 e 3, que têm o mesmo tamanho e estão regularmente espaçadas na vertical. Ordene as três janelas, em ordem decrescente, (a) de acordo com o tempo que a tangerina leva para passar pela janela e (b) de acordo com a velocidade média da tangerina durante a passagem.

Na descida, a tangerina passa pelas janelas 4, 5 e 6, que têm o mesmo tamanho e não estão regularmente espaçadas na horizontal. Ordene as três janelas, em ordem decrescente, (c) de acordo com o tempo que a tangerina leva para passar e (d) de acordo com a velocidade média da tangerina durante a passagem.



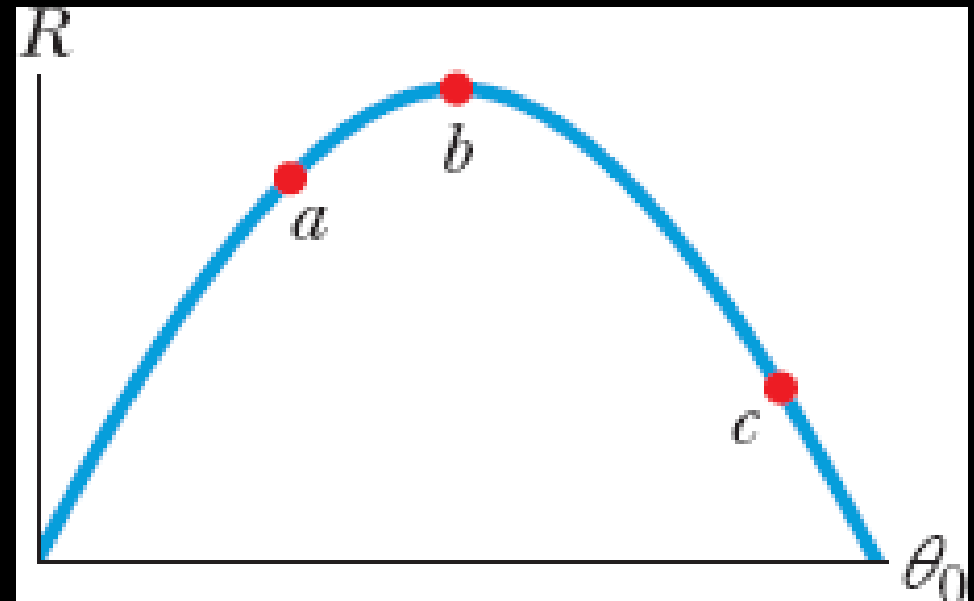
# PERGUNTAS

**9.** A figura mostra três trajetórias de uma bola de futebol chutada a partir do chão. Ignorando os efeitos do ar, ordene as trajetórias de acordo (a) com o tempo de percurso, (b) com a componente vertical da velocidade inicial, (c) com a componente horizontal da velocidade inicial e (d) com a velocidade escalar inicial, em ordem decrescente.



# PERGUNTAS

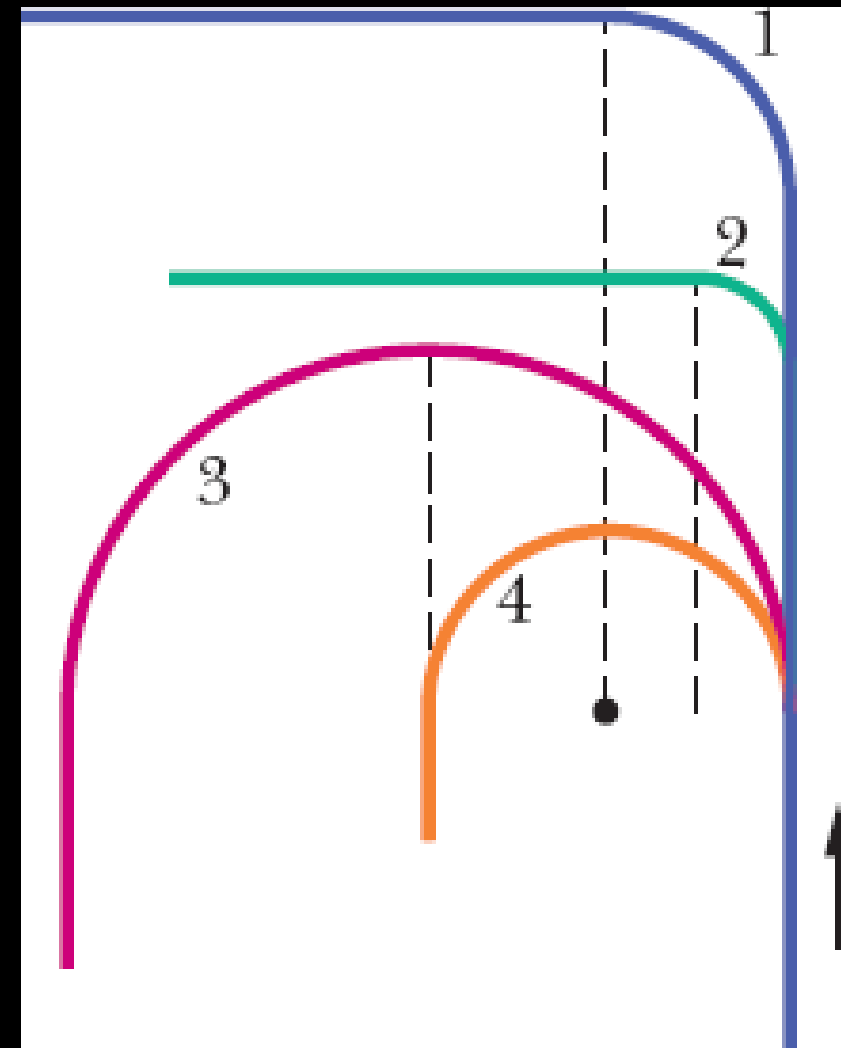
**10.** Uma bola é chutada a partir do chão, em um terreno plano, com uma dada velocidade inicial. A figura mostra o alcance  $X_{\max}$  da bola em função do ângulo de lançamento  $\theta_0$ . Ordene os três pontos identificados por letras no gráfico (a) de acordo com o tempo que a bola permanece no ar e (b) de acordo com a velocidade da bola na altura máxima, em ordem decrescente.





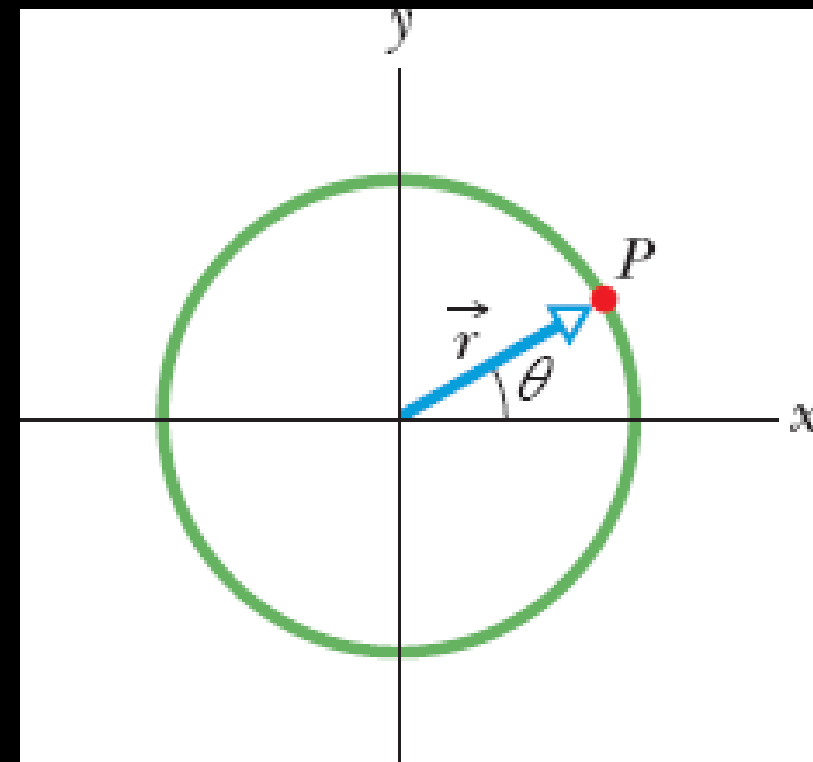
# PERGUNTAS

**11.** A figura mostra quatro trilhos (semicírculos ou quartos de círculo) que podem ser usados por um trem que se move com velocidade escalar constante. Ordene os trilhos de acordo com o módulo da aceleração do trem no trecho curvo, em ordem decrescente.



# PERGUNTAS

**12.** Na figura a partícula  $P$  está em Movimento Circular Uniforme em torno da origem de um sistema de coordenadas  $xy$ . (a) Para que valores de  $\theta$  a componente vertical  $r_y$  do vetor posição possui o maior módulo? (b) Para que valores de  $\theta$  a componente vertical  $v_y$  da velocidade da partícula possui o maior módulo? (c) Para que valores de  $\theta$  a componente vertical  $a_y$  da aceleração da partícula possui o maior módulo?



# PERGUNTAS

**13.** (a) É possível estar acelerando enquanto se viaja com velocidade escalar constante? É possível fazer uma curva (b) com aceleração nula e (c) com aceleração de módulo constante?

**14.** Você está viajando de carro e lança um ovo verticalmente para cima. O ovo cai atrás do carro, à frente do carro, ou de volta na sua mão se a velocidade do carro (a) é constante, (b) está aumentando, (c) está diminuindo? (Ignore o efeito do ar )

**15.** Uma bola de neve é lançada do nível do solo (por uma pessoa que está em um buraco) com velocidade inicial  $v_0$  e um ângulo de lançamento de  $45^\circ$  com o solo (plano), no qual a bola vai cair, depois de percorrer uma certa distância. Se o ângulo de lançamento aumenta, (a) a distância percorrida na direção  $x$  e (b) o tempo em que a bola de neve permanece no ar aumentam, diminuem ou não variam?

# PERGUNTAS

**16.** Você está dirigindo quase colado a um caminhão, e os dois veículos mantêm a mesma velocidade. Um engradado cai da traseira do caminhão. (a) Se você não frear nem der um golpe de direção, vai atropelar o engradado antes que ele se choque com o piso da estrada? (b) Durante a queda, a velocidade horizontal do engradado é maior, menor ou igual à velocidade do caminhão? (Ignore o efeito do ar )

**17.** Em que ponto da trajetória de um projétil a velocidade é mínima?

# RESPOSTAS ÀS PERGUNTAS

1.  $a$  e  $b$  empatados,  $c$
2. (a)  $(7 \text{ m}) \hat{i} + (1 \text{ m}) \hat{j} + (-2 \text{ m}) \hat{k}$ ; (b)  $(5 \text{ m}) \hat{i} + (-3 \text{ m}) \hat{j} + (1 \text{ m}) \hat{k}$ ; (c)  $(-2 \text{ m}) \hat{i}$
3. diminui
4. (a) todos empatados; (b) 1 e 2 empatados (o foguete é lançado para cima), 3 e 4 empatados (o foguete é lançado para baixo!)
5.  $a, b, c$
6. (a)  $A$ ; (b) mais próximo
7. (a) 0; (b) 350 km/h; (c) 350 km/h; (d) igual (a componente vertical do movimento seria a mesma)
8. (a) 3, 2, 1; (b) 1, 2, 3; (c) todas empatadas; (d) 6, 5, 4
9. (a) todas empatadas; (b) todas empatadas; (c) 3, 2, 1; (d) 3, 2, 1
10. (a)  $c, b, a$ ; (b)  $a, b, c$
11. 2, depois 1 e 4 empatados, 3
12. (a)  $90^\circ$  e  $270^\circ$ ; (b)  $0^\circ$  e  $180^\circ$ ; (c)  $90^\circ$  e  $270^\circ$
13. (a) sim; (b) não; (c) sim

14. (a) na mão, (b) atrás e (c) na frente

15. (a) diminui (b) não varia

16. (a) não (b) igual

17. No ponto de máxima altura



# RESUMO

## Vetor Posição

- Localiza uma partícula

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

## Velocidade Média e Instantânea

$$\vec{v}_{\text{méd}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

## Deslocamento

- Mudança do vetor posição

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k}$$

## Aceleração Média e Instantânea

$$\vec{a}_{\text{méd}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

# RESUMO

## Movimento Balístico

- Partícula sujeita apenas à aceleração de queda livre ( $g$ )

$$y - y_0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$
$$= (v_0 \sen \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v_y = v_0 \sen \theta_0 - gt$$

- A trajetória é uma parábola

$$y = (\tan \theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos \theta_0)^2}$$

- Alcance horizontal:

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sen 2\theta_0$$

## Movimento Circular Uniforme

- Módulo da aceleração:

$$a = \frac{v^2}{r}$$

- Período:

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

## Movimento Relativo

- Referenciais não acelerados

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}$$

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB}$$

# EXERCÍCIOS PROPOSTOS

**Lista disponível em:**

<http://www.eletrica.ufpr.br/p/professores:patricio:inicial>

Disciplina TE303 (Física I)

Gabaritos disponíveis no mesmo endereço