GABARITO LISTA 4 de Física I – HALLIDAY PÁGINAS 84 A 92

•••10 O vetor $\vec{r} = 5{,}00t\hat{\mathrm{i}} + (et + ft^2)\hat{\mathrm{j}}$ mostra a posição de uma partícula em função do tempo t. O vetor $\vec{r}$ está em metros, t está em segundos e os fatores e e f são constantes. A Fig. 4-34 mostra o ângulo θ da direção do movimento da partícula em função de t (θ é medido a partir do semieixo x positivo). Determine (a) e e (b) f, indicando suas unidades.

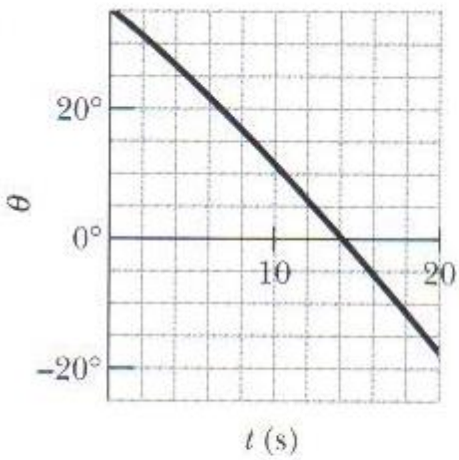


FIG. 4-34 Problema 10.

a) **O gráfico fornecido nos dá o ângulo descrito pelo vetor em função do tempo. Dado o vetor posição, sabe-se que sua derivada primeira corresponde ao vetor velocidade. Assim:**

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 5,00\hat{\imath} + (e + 2ft)\hat{\jmath}$$

O ângulo do vetor velocidade é dado por:

$$\theta = arctg\frac{v_y}{v_x} = arctg\frac{e + 2ft}{5,00}$$

No instante t = 0 s no gráfico dado tem-se que o ângulo é 35^0, assim:

$$35^0 = arctg\frac{e + 2.f.(0)}{5,00}$$

$$5.tg(35^0) = e = 3,50\ m/s$$

Observação: o e tem dimensão de velocidade pois pelo princípio da homogeneidade dimensional todos os termos de uma adição devem ter a mesma dimensão.

b) **Observando o gráfico verifica-se que para 0^0 tem-se um tempo t = 14 s. Assim para que se tenha 0^0 $e + 2ft$ deverá ser zero, logo:**

$$e + 2ft = 0$$

$$3,50 + 2f(14) = 0 \rightarrow f = -0,125\ m/s^2$$

Observação: o f tem dimensão de aceleração pois pelo princípio da homogeneidade dimensional todos os termos de uma adição devem ter a mesma dimensão. Assim $2ft$ deverá ter dimensão de velocidade e para tal:

$$2[f][t] = LT^{-1}$$
$$[f]T = LT^{-1}$$
$$[f] = LT^{-2}$$

•11 Uma partícula se move de tal forma que sua posição (em metros) em função do tempo (em segundos) é dada por $\vec{r} = \hat{\mathrm{i}} + 4t^2\hat{\mathrm{j}} + t\hat{\mathrm{k}}$. Escreva expressões para (a) sua velocidade e (b) sua aceleração em função do tempo.

a) **A velocidade é dada pela derivada primeira da função posição da partícula. Assim:**

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\hat{\imath} + 4t^2\hat{\jmath} + t\hat{k}\right) = 8t\ \ \hat{\jmath} + \hat{k}$$

b) **A aceleração é dada pela derivada segunda da função posição ou pela derivada primeira da função velocidade. Assim:**

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(8t\ \ \hat{\jmath} + \hat{k}\right) = 8\hat{\jmath}$$

•12 A velocidade inicial de um próton é $\vec{v} = 4{,}0\hat{\mathrm{i}} - 2{,}0\hat{\mathrm{j}} + 3{,}0\hat{\mathrm{k}}$; 4,0 s mais tarde, passa a ser $\vec{v} = -2{,}0\hat{\mathrm{i}} - 2{,}0\hat{\mathrm{j}} + 5{,}0\hat{\mathrm{k}}$ (em metros por segundo). Para esses 4,0 s, determine quais são (a) a aceleração média do próton $\vec{a}_{\text{méd}}$ na notação de vetores unitários, (b) o módulo de $\vec{a}_{\text{méd}}$ e (c) o ângulo entre $\vec{a}_{\text{méd}}$ e o semi-eixo x positivo.

a) Como são dadas as equações da velocidade, basta aplicar a definição de aceleração média, ou seja:

$$\overrightarrow{a_{média}} = \frac{\overrightarrow{v(4)} - \overrightarrow{v(0)}}{\Delta t} = \frac{\left(-2,0\hat{\imath} - 2,0\hat{\jmath} + 5,0\hat{k}\right) - \left(4,0\hat{\imath} - 22\hat{\jmath} + 3,0\widehat{k}\right)}{4}$$

$$\overrightarrow{a_{média}} = \left(-1,5\hat{\imath} + 0,5\hat{k}\right)m/s^2$$

b) O módulo da aceleração será dado por:

$$a_{média} = \sqrt{(-1,5)^2 + (0,5)^2} = 1,6\ m/s^2$$

c) O ângulo será dado pelo inverso da tangente das componentes do vetor aceleração.

$$\theta = arctg\frac{0,5}{-1,5} = -18^0\ ou\ 162^0$$

••17 Uma partícula deixa a origem com uma velocidade inicial $\vec{v} = (3{,}00\hat{i})$ m/s e uma aceleração constante $\vec{a} = (-1{,}00\hat{i} - 0{,}500\hat{j})$ m/s². Quando ela atinge o máximo valor de sua coordenada x, quais são (a) a sua velocidade e (b) o seu vetor posição?

a) **Para se determinar a velocidade da partícula num dado instante necessita-se da equação da velocidade. Assim:**

$$\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{a}t$$

$$\vec{v} = (3{,}00\hat{\imath}) + (-1{,}00\hat{\imath} - 0{,}500\hat{\jmath})t$$

Quando a partícula atinge o máximo na coordenada x ter-se-á que $v_x = 0$. Assim, tomando-se as componentes da velocidade na direção de x:

$$0 = (3{,}00) + (-1{,}00)t \rightarrow t = 3{,}00\ s$$

Assim a velocidade procurada, tomando-se as componentes do eixo y será:

$$v_y = (0{,}500)t$$

$$v_y = (-0{,}500)(3{,}00) = -1{,}50\ m/s$$

b) **O vetor posição é dado pela integral definida da equação da velocidade entre os instantes 0 s e 3,00 s. Assim:**

$$\vec{r} = \int_0^{3{,}00} \vec{v}\,dt = \int_0^{3} [(3{,}00\hat{\imath}) + (-1{,}00\hat{\imath} - 0{,}500\hat{\jmath})t]dt$$

$$\vec{r} = (3{,}00t\hat{\imath}) + \frac{(-1{,}00\hat{\imath} - 0{,}500\hat{\jmath})t^2}{2}\Bigg]_0^{3{,}00}$$

$$\vec{r} = (3{,}00(3{,}00)\hat{\imath}) + \frac{(-1{,}00\hat{\imath} - 0{,}500\hat{\jmath})(3{,}00)^2}{2} = (9{,}00\hat{\imath}) + \frac{(-9{,}00\hat{\imath} - 4{,}5\hat{\jmath})}{2}$$

$$\vec{r} = (9{,}00\hat{\imath}) - 4{,}50\hat{\imath} - 2{,}25\hat{\jmath} = (4{,}50\hat{\imath} - 2{,}25\hat{\jmath})m$$

•••19 A aceleração de uma partícula que se move apenas em um plano horizontal xy é dada por $\vec{a} = 3t\hat{\mathrm{i}} + 4t\hat{\mathrm{j}}$, onde $\vec{a}$ está em metros por segundo ao quadrado e t em segundos. Em $t = 0$, o vetor posição $\vec{r} = (20{,}0 \text{ m})\hat{\mathrm{i}} + (40{,}0 \text{ m})\hat{\mathrm{j}}$ indica a localização da partícula, que nesse instante tem uma velocidade $\vec{v} = (5{,}00 \text{ m/s})\hat{\mathrm{i}} + (2{,}00 \text{ m/s})\hat{\mathrm{j}}$. Em $t = 4{,}00$ s, determine (a) o vetor posição em termos dos vetores unitários e (b) o ângulo entre a direção do movimento e o semi-eixo x positivo.

O vetor posição é dado pela integral entre os instantes 0 e t da equação da aceleração:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}\, dt$$

Assim:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}\, dt = (5.00\hat{\mathrm{i}} + 2.00\hat{\mathrm{j}}) + \int_0^t (3t\hat{\mathrm{i}} + 4t\hat{\mathrm{j}})\, dt = \left(5.00 + 3t^2/2\right)\hat{\mathrm{i}} + \left(2.00 + 2t^2\right)\hat{\mathrm{j}}$$

Resolvendo-se a integral vem:

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}dt &= (20.0\hat{\mathrm{i}} + 40.0\hat{\mathrm{j}}) + \int_0^t [(5.00 + 3t^2/2)\hat{\mathrm{i}} + (2.00 + 2t^2)\hat{\mathrm{j}}]dt \\ &= (20.0\hat{\mathrm{i}} + 40.0\hat{\mathrm{j}}) + (5.00t + t^3/2)\hat{\mathrm{i}} + (2.00t + 2t^3/3)\hat{\mathrm{j}} \\ &= (20.0 + 5.00t + t^3/2)\hat{\mathrm{i}} + (40.0 + 2.00t + 2t^3/3)\hat{\mathrm{j}}\end{aligned}$$

a) **Para t=4,00 s tem-se:**
b)

$$\vec{r}(t = 4.00 \text{ s}) = (72.0 \text{ m})\hat{\mathrm{i}} + (90.7 \text{ m})\hat{\mathrm{j}}.$$

c) **Para se determinar o ângulo há necessidade de se determinar a equação da velocidade, pois necessita-se de suas componentes para se determinar o ângulo. Assim:**
d)

$$\vec{v}(t = 4.00 \text{ s}) = (29.0 \text{ m/s})\hat{\mathrm{i}} + (34.0 \text{ m/s})\hat{\mathrm{j}}.$$

O ângulo será dado por:

$$\boldsymbol{\theta = arctg\frac{34}{29} = 49{,}5^0}$$

•21 Um projétil é disparado horizontalmente de uma arma que está 45,0 m acima de um terreno plano, emergindo da arma com uma velocidade de 250 m/s. (a) Por quanto tempo o projétil permanece no ar? (b) A que distância horizontal do ponto de disparo ele se choca com o solo? (c) Qual é o módulo da componente vertical da velocidade quando o projétil se choca com o solo?

a) **Como o projétil é lançado horizontalmente sua altura em relação ao solo é de 45 m. Sua velocidade inicial é somente horizontal, ou seja, $v_{0y} = 0\ m/s$Assim pode-se determinar o tempo de permanência no ar pela equação:**

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2$$

$$45 = 0 + 0.t + \frac{1}{2}9,80t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2.45}{9,80}} = 3,03\ s$$

b) **A distância horizontal refere-se al alcance deste movimento, que será dado pela equação do movimento uniforme:**

$$R = v_{0x}.t = 250.3,03 = 758\ m$$

c) **O módulo da componente vertical da velocidade é dado por:**

$$v_y = v_{oy} + gt \to v_y = 0 + 9,80.3,03 = 29,7\ m/s$$

Outra forma de se resolver o problema é por meio da determinação do vetor posição do projétil:

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{v}.t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

Usando os dados do problema:

$$\vec{r} = (0\hat{\imath} + 45,0\hat{\jmath}) + (250\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}).t + \frac{1}{2}(0,00\hat{\imath} + 9,80\hat{\jmath})t^2$$

Que é a equação vetorial que nos fornece a posição do projétil em função do tempo. Para que o corpo atinja o solo o vetor posição deverá ser $\vec{r} = (R, 0)$, lembrando que R é o alcance horizontal do projetil. Assim:

$$R\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} = (0\hat{\imath} + 45,0\hat{\jmath}) + (250\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}).t + \frac{1}{2}(0,00\hat{\imath} + 9,80\hat{\jmath})t^2$$

Para o eixo vertical tem-se:

$$\mathbf{0 = 45,0 + (0).\boldsymbol{t} + \frac{1}{2}(9,80)\boldsymbol{t}^2 \rightarrow 0 = 45,0 + 4,90\boldsymbol{t}^2 \rightarrow \boldsymbol{t} = \sqrt{\frac{45,0}{4,90}} = 3,03\ \boldsymbol{s}}$$

Para o eixo horizontal:

$$\boldsymbol{R = 0\hat{\imath} + (250).t + \frac{1}{2}(0,00)t^2 \rightarrow R = 250t = 250.3,03 = 758\ m}$$

A velocidade vetorial sera dada pela derivada primeira em relação ao tempo. Assim

$$\boldsymbol{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[(0\hat{\imath} + 45,0\hat{\jmath}) + (250\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}).t + \frac{1}{2}(0,00\hat{\imath} + 9,80\hat{\jmath})t^2\right]}$$

$$\boldsymbol{\vec{v} = 250\hat{\imath} + 9,80\widehat{t\jmath}}$$

Para se determinar o módulo da componente vertical da velocidade ao colidir com o solo, usa-se o tempo 3,03 s. Assim:

$$\boldsymbol{\vec{v} = 250\hat{\imath} + 9,80t\hat{\jmath} \rightarrow \vec{v} = 250\hat{\imath} + 9,80.3,03\hat{\jmath} \rightarrow \vec{v} = 250\hat{\imath} + 29,7\hat{\jmath}}$$

Ou seja, a componente vertical da velocidade no instante da colisão é 29,7 m/s.

•25 Um dardo é arremessado horizontalmente com uma velocidade inicial de 10 m/s em direção a um ponto P, o centro de um alvo de parede. Ele atinge um ponto Q do alvo, verticalmente abaixo de P, 0,19 s depois do arremesso. (a) Qual é a distância PQ? (b) A que distância do alvo foi arremessado o dardo?

A equação vetorial da posição em função do tempo para o movimento é:

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \vec{v}.t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

$$\vec{r} = (0,00\hat{\imath} + 0,00\hat{\jmath}) + (10\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}).t + \frac{1}{2}(0,00\hat{\imath} + 9,80\hat{\jmath})t^2$$

$$\vec{r} = 10\hat{\imath}.t + 4,90\hat{\jmath}t^2$$

Para 0,19 s após o arremesso a equação vetorial da posição será:

$$\vec{r} = (1,9\hat{\imath} + 0,18\hat{\jmath})m$$

a) **A distância PQ corresponde à coordenada vertical ou seja0,18 m.**

b) **A distância do arremesso corresponde a coordenada horizontal, ou seja, 1,9 m**

•27 Um certo avião tem uma velocidade de 290,0 km/h e está mergulhando com um ângulo θ = 30,0° abaixo da horizontal quando o piloto libera um chamariz (Fig. 4-37). A distância horizontal entre o ponto de lançamento e o ponto onde o chamariz se choca com o solo é d = 700 m. (a) Quanto tempo o chamariz passou no ar? (b) De que altura foi lançado?

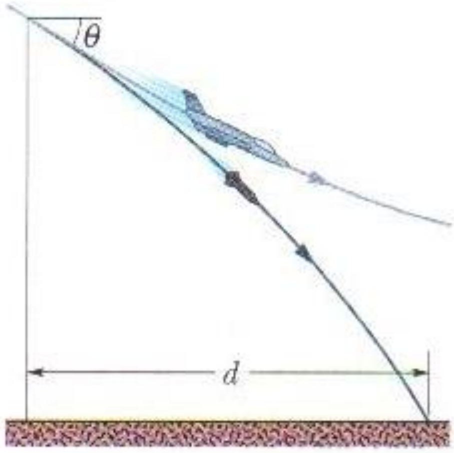


FIG. 4-37 Problema 27.

Inicialmente deve-se decompor a velocidade inicial em componente horizontal e vertical. Assim:

$$v_{ox} = v_0 cos\theta = 80,6.cos(-30,0) = 69,8\ m/s$$

$$v_{oy} = v_0 sen\theta = 80,6.sen(-30,0) = -40,3\ m/s$$

A equação vetorial da posição será:

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{v}.t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

$$\vec{r} = (0,00\hat{\imath} + y_0\hat{\jmath}) + (69,8\hat{\imath} - 40,3\hat{\jmath})t + \frac{1}{2}(0,00\hat{\imath} - 9,80\hat{\jmath})t^2$$

a) **O vetor posição do chamariz ao se chocar com o solo será $\vec{r} = (700,0)$. Assim:**

$$700\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} = (0,00\hat{\imath} + y_0\hat{\jmath}) + (69,8\hat{\imath} - 40,3\hat{\jmath})t + \frac{1}{2}(0,00\hat{\imath} - 9,80\hat{\jmath})t^2$$

Resolvendo-se para o eixo horizontal vem o tempo:

$$700\hat{\imath} = 0,00\hat{\imath} + 69,8\hat{\imath}t + \frac{1}{2}0,00\hat{\imath}t^2$$

$$t = \frac{700}{69,8} = 10,02 = 10,0\ s$$

b) **De posse do tempo resolve-se a equação da posição para o eixo y. Assim:**

$$0\hat{\jmath} = (y_0\hat{\jmath}) + (-40,3\hat{\jmath})(10,0) + \frac{1}{2}(-9,80\hat{\jmath})(10,0)^2$$

$$y_0 = 403 + 490 = 893\ m$$

••37 Uma bola é lançada a partir do solo. Quando ela atinge uma altura de 9,1 m sua velocidade é $\vec{v} = (7{,}6\hat{i} + 6{,}1\hat{j})$ m/s, com $\hat{i}$ horizontal e $\hat{j}$ para cima. (a) Qual é a altura máxima atingida pela bola? (b) Qual é a distância horizontal coberta pela bola? Quais são (c) o módulo e (d) o ângulo (abaixo da horizontal) da velocidade da bola no instante em que atinge o solo?

O vetor posição da bola é dado por:

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

$$(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}) = (0{,}0\hat{\imath} + 0{,}0\hat{\jmath}) + \vec{v_0}t + \tfrac{1}{2}(-9{,}8\hat{\jmath})t^2 \quad \text{(1)}$$

$$(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}) = \vec{v_0}t - 4{,}9\hat{\jmath}t^2 \quad \text{(1)}$$

O vetor posição para a altura de 9,1 m será $\vec{r} = (x\hat{\imath} + 9{,}1\hat{\jmath})\ m$. Assim:

$$(x\hat{\imath} + 9{,}1\hat{\jmath}) = \vec{v_0}t - 4{,}9\hat{\jmath}t^2 \quad \text{(2)}$$

Deve-se determinar o vetor velocidade inicial, mas a equação da velocidade pode ser dada por:

$$\vec{v} = \vec{v_o} + \vec{g}t$$

$$\left(v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath}\right) = \vec{v_o} - 9{,}8\hat{\jmath}t \quad \text{(3)}$$

Que para a altura de 9,1 m sera:

$$(7{,}6\hat{\imath} + 6{,}1\hat{\jmath}) = \vec{v_o} - 9{,}8\hat{\jmath}t$$

Donde o vetor velocidade inicial será:

$$\vec{v_o} = (7{,}6\hat{\imath} + 6{,}1\hat{\jmath}) + 9{,}8\hat{\jmath}t \quad \text{(4)}$$

Com a equação 4 em 2, vem:

$$(x\hat{\imath} + 9{,}1\hat{\jmath}) = \left((7{,}6\hat{\imath} + 6{,}1\hat{\jmath}) + 9{,}8\hat{\jmath}t\right)t - 4{,}9\hat{\jmath}t^2$$

$$x\hat{\imath} + 9{,}1\hat{\jmath} = 7{,}6\hat{\imath}t + 6{,}1\hat{\jmath}t + 9{,}8\hat{\jmath}t^2 - 4{,}9\hat{\jmath}t^2$$

$$x\hat{\imath} + 9{,}1\hat{\jmath} = 7{,}6\hat{\imath}t + 6{,}1\hat{\jmath}t + 4{,}9\hat{\jmath}t^2$$

Resolvendo na direção de $\hat{\jmath}$ vem:

$$9{,}1 = +6{,}1t + 4{,}9t^2$$

Cuja solução positiva é t = 0,87 s.

Voltando a equação 4 acha-se o vetor velocidade inicial.

$\overrightarrow{v_o} = (7,6\hat{\imath} + 6,1\hat{\jmath}) + 9,8\hat{\jmath}(0,87) \rightarrow \overrightarrow{v_o} = 7,6\hat{\imath} + 15\hat{\jmath}$**(3)**

Assim a equação vetorial da velocidade será dada pela equação 3:

$$\left(v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath}\right) = (7,6\hat{\imath} + 15\hat{\jmath}) - 9,8\hat{\jmath}t$$

O ponto mais alto é atingido quando o vetor velocidade torna-se $\vec{v} = (7,6\hat{\imath} + 0,0\hat{\jmath})$**, assim:**

$$(7,6\hat{\imath} + 0,0\hat{\jmath}) = (7,6\hat{\imath} + 15\hat{\jmath}) - 9,8\hat{\jmath}t$$

Resolvendo na direção de $\hat{\jmath}$ **vem:**

$$0,0 = 15 - 9,8t \rightarrow t = 1,5\ s$$

Assim a altura máxima atingida será dada pela equação 1:

$$(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}) = \overrightarrow{v_0}t - 4,9\hat{\jmath}t^2$$

$$(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}) = (7,6\hat{\imath} + 15\hat{\jmath})(1,5) - 4,9\hat{\jmath}(1,5)^2$$

$$(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}) = 11\hat{\imath} + 22\hat{\jmath} - 11,0\hat{\jmath}$$

$$(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}) = 11\hat{\imath} + 11\hat{\jmath}$$

Ou seja, a altura máxima será de 11 metros.

Para se determinar o alcance horizontal deve-se resolver a equação 1 para y = 0 m. Assim:

$$(x\hat{\imath} + 0\hat{\jmath}) = (7,6\hat{\imath} + 15\hat{\jmath})t - 4,9\hat{\jmath}t^2$$

$$0 = +15t - 4,9t^2 \rightarrow t = 0,0\ s\ \ e\ t = 3,1\ s$$

O tempo 0 s representa o instante trivial, ou seja, o lançamento. Assim resolvendo-se a equação 1 para t = 3,1 s, vem:

$$(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}) = (7,6\hat{\imath} + 15\hat{\jmath})(3,1) - 4,9\hat{\jmath}(3,1)^2$$

$$(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}) = 23\hat{\imath} + 0,0\hat{\jmath}$$

Ou seja, o alcance horizontal será 23 m.

A bola atinge o solo no instante t = 3,1 s. Assim o vetor velocidade será:

$$\left(v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath}\right) = (7,6\hat{\imath} + 15\hat{\jmath}) - 9,8\hat{\jmath}t$$

$$\left(v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath}\right) = (7,6\hat{\imath} + 15\hat{\jmath}) - 9,8\hat{\jmath}(3,1)$$

$$\left(v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath}\right) = 7,6\hat{\imath} - 15\hat{\jmath}$$

Cujo módulo será:

$$v = \sqrt{(7,6)^2 + (-15)^2} = 17\ m/s$$

O ângulo será:

$$\theta = arctg\frac{-15}{7,6} = -63^0\ ou\ 117^0$$

•••49 Os esquiadores experientes costumam dar um pequeno salto antes de chegar a uma encosta. Considere um salto no qual a velocidade inicial é $v_0 = 10$ m/s, o ângulo é $\theta_0 = 9{,}0°$, a pista antes do salto é aproximadamente plana e a encosta tem uma inclinação de 11,3°. A Fig. 4-45*a* mostra um *pré-salto* no qual o esquiador desce no início da encosta. A Fig. 4-45*b* mostra um salto que começa no momento em que o esquiador está chegando à encosta. Na Fig. 4-45*a* o esquiador desce aproximadamente na mesma altura em que começou o salto. (a) Qual é o ângulo ϕ entre a trajetória do esquiador e a encosta na situação da Fig. 4-45*a*? Na situação da Fig. 4-45*b* (b) o esquiador desce quantos metros abaixo da altura em que começou o salto e (c) qual é o valor de ϕ? (A queda maior e o maior valor de ϕ podem fazer o esquiador perder o equilíbrio.)

(*a*) (*b*)

FIG. 4-45 Problema 49.

a) **O ângulo do salto é de $9{,}0^0$, sendo a pista plana. Assim que ele retornar ao solo também estará formando um ângulo de $9{,}0^0$ para o nível de chegada igual ao de saída. No caso b, deve-se observar o ângulo de chegada será dado pela diferença entre a inclinação da encosta e o ângulo de chegada no mesmo nível. Assim $\emptyset = \mathbf{11,3^0 - 9,0^0 = 2,3^0}$.**

b) **O problema pode ser resolvido por meio da equação do vetor posição. Assim:**

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

Obs: Será usada a notação de vetor $\vec{a} = (x, y) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}$, por facilidade e para se exercitar outras formas de representação vetorial.

O vetor posição inicial considerando-se o referencial no ponto do início do salto sera$\vec{r_0} = (0; 0)$. O vetor aceleração da gravidade será $\vec{g} = (0; -9,8)$. O vetor velocidade inicial será dado por:

$$\vec{v_0} = 10.(cos9,0^0; sen9,0^0) = (9,9; 1,6)$$

Assim a equação da velocidade será:

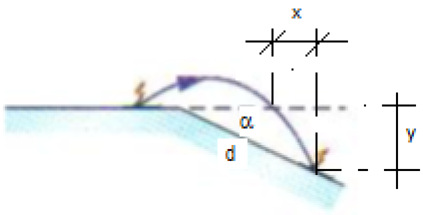
$$\vec{v} = (9,9; 1,6) + (0; -9,8)t$$

A equação da posição vetorial será:

$$\vec{r} = (0;0) + (9,9;1,6)t + \frac{1}{2}(0;-9,8)t^2$$

$$(x;y) = (0;0) + (9,9;1,6)t + (0;-4,9)t^2$$

Considerando-se a chegada pode-se obter os valores de x e y do vetor r. Assim:



Do desenho vem que

$$x = dcos\alpha = dcos11,3^0 = 0,98d \quad e \quad y = dsen\alpha = dsen11,3^0 = -0,2d$$

Assim a equação do vetor posição será:

$$(0,98d;-0,2d) = (9,9;1,6)t + (0;-4,9)t^2$$

Resolvendo-se a equação na direção do versor i, vem:

$$0,98d = 9,9t \rightarrow t = 0,1d\ s$$

Com este tempo substituído na equação da posição vem:

$$(x;y) = (0;0) + (9,9;1,6)(0,1d) + (0;-4,9)(0,1d)^2$$

$$(0,98d;-0,2d) = (0;0) + (0,99d;-0,16d) + (0;-0,05d^2)$$

Resolvendo na direção do versor j vem:

$$-0,2d = 0,16d - 0,05d^2 \rightarrow d(0,05d - 0,36) = 0 \rightarrow d = 0 \ \ e\ d = 7,2\ m$$

Assim o vetor posição na chegada será:

$$(x;y) = (0,98d;-0,2d) = (0,98.7,2;-0,2.7,2) = (7,06;-1,44)m$$

Ou seja, 1,44 m abaixo do nível em que começou o salto.

O vetor velocidade na chegada será:

$$\vec{v} = (9,9;1,6) + (0;-9,8)t = (9,9;1,6) + (0;-9,8)(0,1d)$$
$$\vec{v} = (9,9;1,6) + (0;-9,8)(0,1.(7,2))$$

$$\vec{v} = (9,9;-5,5)$$

O ângulo será:

$$\boldsymbol{\theta = arctg\frac{-5,5}{9,9} = -29,1^0}$$

•**56** Um viciado em aceleração centrípeta executa um movimento circular uniforme de período $T = 2,0$ s e raio $r = 3,00$ m. No instante t_1 sua aceleração é $\vec{a} = (6,00\ \text{m/s}^2)\hat{\text{i}} + (-4,00\ \text{m/s}^2)\hat{\text{j}}$. Nesse instante, quais são os valores de (a) $\vec{v}\cdot\vec{a}$ e (b) $\vec{r}\times\vec{a}$?

a) **Como é sabido, no movimento circular os vetores velocidade e aceleração são perpendiculares entre si. Assim o produto escalar $\boldsymbol{\vec{v}\cdot\vec{a} = |\vec{v}|.|\vec{a}|cos90^0 = 0}$**

b) **Como os vetores aceleração e posição que é dado pelo vetor raio estão sempre opostos, o ângulo entre eles é 180^0. O produto vetorial $\boldsymbol{|\vec{r}\times\vec{a}| = |\vec{r}|.|\vec{a}|sen180^0 = 0}$ ou $\boldsymbol{\vec{r}\times\vec{a} = \vec{0}}$**

••**63** Uma bolsa a 2,00 m do centro e uma carteira a 3,00 m do centro descrevem um movimento circular uniforme no piso de um carrossel. Elas estão na mesma linha radial. Em um certo instante, a aceleração da bolsa é $(2,00\ \text{m/s}^2)\hat{\text{i}} + (4,00\ \text{m/s}^2)\hat{\text{j}}$. Qual é a aceleração da carteira nesse instante, em termos dos vetores unitários?

Como o movimento é circular e uniforme, o período do movimento é dado por:

$$\boldsymbol{T = \frac{2\pi r}{v}}$$

A aceleração centrípeta é dada por:

$$\boldsymbol{a = \frac{v^2}{r} = \frac{1}{r}\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^2 r}{T^2}}$$

Desta equação pode-se concluir que a aceleração centrípeta é diretamente proporcional ao raio da trajetória descrita pelo objeto. Assim a razão entre as acelerações da carteira de da bolsa será $\boldsymbol{\frac{a_c}{a_b}\frac{\frac{4\pi^2 3,00}{T^2}}{\frac{4\pi^2 2,00}{T^2}} = 1,50}$. Assim $\boldsymbol{a_c = 1,50.a_b}$, logo:

$$\boldsymbol{a_c = 1,50.[(2,00m/s^2)\hat{\imath} + (4,00m/s^2)\hat{\jmath}] = (3,00m/s^2)\hat{\imath} + (6,00m/s^2)\hat{\jmath}}$$

$$\boldsymbol{a_c = (3,00m/s^2)\hat{\imath} + (6,00m/s^2)\hat{\jmath}}$$

••65 Em $t_1 = 2{,}00$ s, a aceleração de uma partícula em movimento circular no sentido anti-horário é $(6{,}00\ \mathrm{m/s^2})\hat{\mathrm{i}} + (4{,}00\ \mathrm{m/s^2})\hat{\mathrm{j}}$. Ela se move com velocidade escalar constante. Em $t_2 = 5{,}00$ s, sua aceleração é $(4{,}00\ \mathrm{m/s^2})\hat{\mathrm{i}} + (-6{,}00\ \mathrm{m/s})\hat{\mathrm{j}}$. Qual é o raio da trajetória da partícula se a diferença $t_2 - t_1$ é menor que um período?

Se você observar com atenção as coordenadas dos dois vetores aceleração dados, irá verificar que eles são perpendiculares entre si. Pode-se provar isto fazendo-se o produto escalar entre os vetores aceleração.

$$\boldsymbol{\overrightarrow{a_1} \cdot \overrightarrow{a_2} = [6,00\hat{\imath} + 4,00\hat{\jmath}] \cdot [4,00\hat{\imath} - 6,00\hat{\jmath}] = 24,0 - 24,0 = 0}$$

Se estes vetores são perpendiculares, e se movimentam no sentido anti-horário, pelas coordenadas dadas observa-se que no instante inicial 2,00 s o vetor esta no primeiro quadrante e no instante 5,00 s encontra-se no quarto quadrante. Assim pode-se concluir que $t_2 - t_1 = 3{,}00 = \dfrac{3T}{4}$**, donde se tira que o período T será** $T = 4{,}00\ \mathrm{s}$ **.**

O módulo do vetor aceleração será:

$$a = \sqrt{6{,}00^2 + 4{,}00^2} = 7{,}21\ \mathrm{m/s^2}$$

A aceleração centrípeta é dada por:

$$a = \frac{v^2}{r} \Rightarrow r = \frac{v^2}{a}$$

Mas $v = \dfrac{2\pi r}{T}$**, assim:**

$$r = \frac{(\frac{2\pi r}{T})^2}{a} \Rightarrow r = \frac{aT^2}{4\pi^2} = \frac{7{,}21.4{,}00}{4\pi^2} = 2{,}92\ \mathrm{m}$$

••73 Dois navios, A e B, deixam o porto ao mesmo tempo. O navio A navega para noroeste a 24 nós e o navio B navega a 28 nós em uma direção 40° a oeste do sul. (1 nó = 1 milha marítima por hora; veja o Apêndice D.) Quais são (a) o módulo e (b) a orientação da velocidade do navio A em relação ao navio B? (c) Após quanto tempo os navios estarão separados por 160 milhas marítimas? (d) Qual será o curso de B (orientação do vetor posição de B) em relação a A nesse instante?

Inicialmente deve-se escrever o vetor velocidade dos dois navios na base de versores.

$$\overrightarrow{v_A} = -(v_A cos45^0)\hat{\imath} + (v_A sen45^0)\hat{\jmath}$$

$$\overrightarrow{v_B} = -(v_B sen40^0)\hat{\imath} - (v_B cos40^0)\hat{\jmath}$$

$$\overrightarrow{v_A} = -(24cos45^0)\hat{\imath} + (24sen45^0)\hat{\jmath} = (-17\hat{\imath} + 17\hat{\jmath})nós$$

$$\overrightarrow{v_B} = -(28sen40^0)\hat{\imath} - (28cos40^0)\hat{\jmath} = (-18\hat{\imath} - 21\hat{\jmath})nós$$

a) **A velocidade relativa será:**

$$\overrightarrow{v_{AB}} = \overrightarrow{v_A} - \overrightarrow{v_B} = 1\hat{\imath} + 38\hat{\jmath}$$

Cujo módulo será:

$$|\overrightarrow{v_{AB}}| = \sqrt{1^2 + 38^2} = 38\ nós$$

b) **O ângulo será:**

$$\theta = arctg\frac{1}{38} = 1,5^0$$

c) **O tempo será dado por:**

$$t = \frac{|\Delta\overrightarrow{r_{AB}}|}{|\Delta\overrightarrow{v_{AB}}|} = \frac{160}{38} = 4,2\ h$$

d) **Observe que no tempo o vetor velocidade não muda, tendo assim a mesma direção do vetor posição. Mudando-se o sentido do vetor velocidade$\overrightarrow{v_{AB}}$ para $\overrightarrow{v_{AB}} = -\overrightarrow{v_{BA}}$ conseqüentemente $\overrightarrow{r_{AB}} = -\overrightarrow{r_{BA}}$ será correta, ou seja, estão opostos. Portanto, podemos concluir que B fica navegando a 1,5^{0}para oeste do sul relativo ao navio A.**

••79 Duas rodovias se cruzam, como mostra a Fig. 4-49. No instante indicado, um carro de polícia P está a uma distância d_P = 800 m do cruzamento, movendo-se com uma velocidade escalar v_P = 80 km/h. O motorista M está a uma distância d_M = 600 m do cruzamento, movendo-se com uma velocidade escalar v_M = 60 km/h. (a) Qual é a velocidade do motorista em relação ao carro da polícia na notação de vetores unitários? (b) No instante mostrado na Fig. 4-49, qual é o ângulo entre a velocidade calculada no item (a) e a reta que liga os dois carros? (c) Se os carros mantêm suas velocidades, as respostas dos itens (a) e (b) mudam quando os carros se aproximam da interseção?

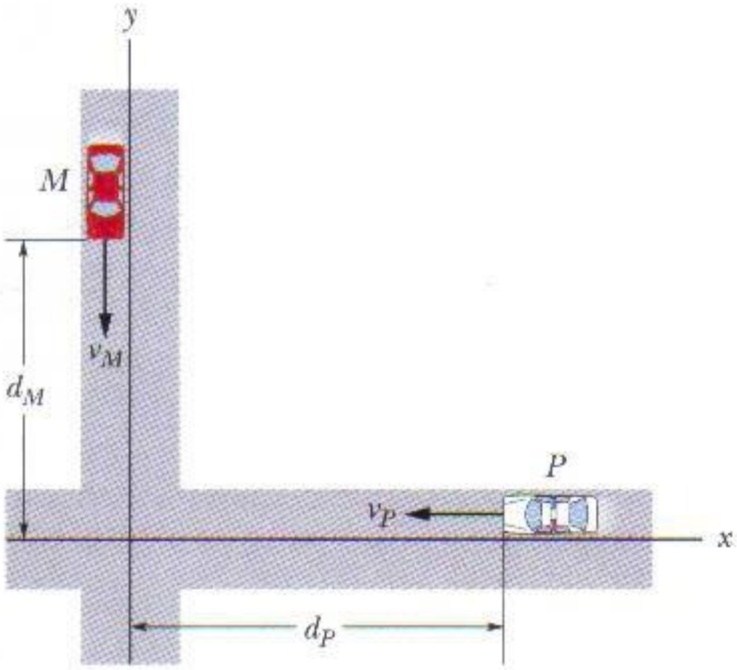


FIG. 4-49 Problema 79.

A velocidade do motorista em relação ao carro da polícia será:

$$\overrightarrow{v_{MP}} = \overrightarrow{v_M} - \overrightarrow{v_P}$$

A velocidade do motorista será:

$$\overrightarrow{v_M} = -60\hat{j}$$

A velocidade da polícia será:

$$\overrightarrow{v_P} = -80\hat{\imath}$$

a) **Assim:**

$$\overrightarrow{v_{MP}} = (-80\hat{\imath} - 60\hat{\jmath})\ km/h$$

b) O vetor posição dos carros será do motorista para a polícia:

$$\overrightarrow{r_{MP}} = \overrightarrow{r_M} - \overrightarrow{r_P}$$

$$\overrightarrow{r_{MP}} = (800\hat{\imath} - 600\hat{\jmath})\ m$$

O ângulo entre as velocidades será:

$$\theta = arctg\frac{-60}{-80} = 38,9^0$$

Que é o mesmo quando calculado pelas distância pois as distâncias são múltiplas de 10 das velocidades.

c) Pelos dados fornecidos no enunciado elas não mudam.

86 Uma partícula descreve um movimento circular uniforme em torno da origem de um sistema de coordenadas xy, movendo-se no sentido horário com um período de 7,00 s. Em um certo instante o vetor posição da partícula (em relação à origem) é $\vec{r} = (2{,}00\ \text{m})\hat{i} - (3{,}00\ \text{m})\hat{j}$. Qual é a velocidade da partícula nesse instante, em termos dos vetores unitários?

No movimento circular sabe-se que o vetor velocidade é perpendicular ao raio da trajetória e seu módulo é dado por:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

O módulo do raio será dado pelo módulo do vetor posição da partícula. Assim:

$$|\vec{r}| = r = \sqrt{(2,00)^2 + (-3,00)^2} = 3,61\ m$$

Observe no vetor posição que o mesmo se encontra no quarto quadrante. Como o vetor velocidade deve ser perpendicular ao vetor posição, as componentes do vetor velocidade neste quadrante serão negativas.

Assim:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2.\pi.3,61}{7} = 3,24\ m/s$$

O ângulo formado pelo vetor posição será:

$$\theta = arctg\frac{-3,00}{2,00} = 33,7^0$$

Assim as componentes da velocidade serão:

$$v_x = 3,24cos33,7^0 = 2,69\ m/s$$

$$v_y = 3,24sen33,7^0 = 1,80\ m/s$$

Assim o vetor velocidade será:

$$\vec{v} = (-2,69\hat{\imath} - 1,80\hat{\jmath})m/s$$

111 Uma partícula parte da origem no instante $t = 0$ com uma velocidade de $8{,}0\hat{j}$ m/s e se move no plano xy com uma aceleração constante igual a $(4{,}0\hat{i} + 2{,}0\hat{j})$ m/s^2. Quando a coordenada x da partícula é 29 m, quais são (a) a coordenada y e (b) a velocidade escalar?

A equação vetorial da posição é:

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \overrightarrow{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

Que para este movimento fica:

$$\vec{r} = \vec{0} + (8{,}0\hat{j})t + \frac{1}{2}(4{,}0\hat{\imath} + 2{,}0\hat{j})t^2 = [2{,}0t^2\hat{\imath} + (8{,}0t + 1{,}0t^2)\hat{j}]\ m$$

Para x = 29 m, resolvendo-se a equação acima para o eixo x vem:

$$29 = 2{,}0t^2 \rightarrow t = 3{,}8\ s$$

a) **Com este valor de tempo resolvendo-se a equação para y vem:**

$$y = 8{,}0.(3{,}8) + 1{,}0.(3{,}8^2) = 45\ m$$

b) **A equação vetorial da velocidade é:**

$$\vec{v} = \overrightarrow{v_o} + \vec{g}t$$

$$\vec{v} = 8{,}0\hat{j} + (4{,}0\hat{\imath} + 2{,}0\hat{j})t$$

Em t=3,8 s:

$$\vec{v} = 8{,}0\hat{j} + (4{,}0\hat{\imath} + 2{,}0\hat{j})(3{,}8)$$

$$\vec{v} = 15{,}2\hat{\imath} + 15{,}6\hat{j}\ m/s$$

Cujo módulo será:

$$v = \sqrt{(15{,}2)^2 + (15{,}6)^2} = 22\ m/s$$