2 Análise de Fourier no Tempo Contínuo

Aula 04 - Capítulo 2: páginas 9 e 10

2.3 Exercício Resolvido

Considerando o sinal

$$x(t) = \cos(2\pi t)$$

obtenha a expressão usando o símbolo de somatório para a expansão em série trigonométrica de Fourier do sinal

$$y(t) = |x(t)|$$

- Passo 1: Fórmula da série trigonométrica de Fourier (cap2/pag10).

  $$y(t) = C_o + \sum_{m=1}^{\infty} A_m.\cos(2\pi mt/T) + B_m.\sin(2\pi mt/T)$$

  com

  $$\begin{aligned} C_o &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} y(t)\,dt \\ A_m &= 2\,\mathrm{Re}(C_m) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} y(t)\cos(2\pi mt/T)\,dt \\ B_m &= -2\,\mathrm{Im}(C_m) = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} y(t)\sin(2\pi mt/T)\,dt \end{aligned}$$

- Passo 2: Encontrar o período T e substituir no passo 1.

  Sabe-se que o sinal $\cos(t)$ tem período 2π e que se for escalonado por $k = 1/2\pi$ passa a ser $\cos(t/k) = \cos(2\pi t)$ com período $k.2\pi = 1$.

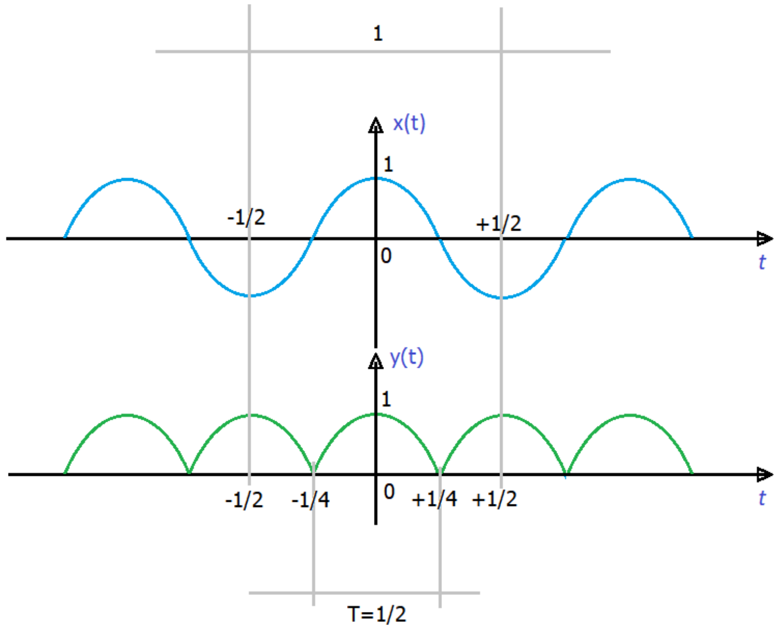
  O resultado de $|x(t)|$ faz com que os valores negativos de $x(t)$ tornem-se positivos. Isso corresponde ao processo de retificação de onda completa do sinal $x(t)$.

  Portanto, conclui-se que o período de $y(t)$ é a metade do período de $x(t)$, $T = 1/2$ como pode ser observado nos gráficos, logo

  $$y(t) = C_o + \sum_{m=1}^{\infty} A_m.\cos(4\pi mt) + B_m.\sin(4\pi mt)$$

  com

  $$\begin{aligned} C_o &= 2\int_{-1/4}^{+1/4} y(t)\,dt \\ A_m &= 2\,\mathrm{Re}(C_m) = 4\int_{-1/4}^{+1/4} y(t)\cos(4\pi mt)\,dt \\ B_m &= 2\,\mathrm{Im}(C_m) = 4\int_{-1/4}^{+1/4} y(t)\sin(4\pi mt)\,dt \end{aligned}$$



- Passo 3: Cálculo dos coeficientes C_o, A_m e B_m

  Na série trigonométrica há duas possibilidades de cálculo: calcular os coeficientes C_m da série exponencial e separar as partes real e imaginária, ou calcular diretamente os coeficientes C_o, A_m e B_m sem utilizar valores complexos. Vou optar pela segunda opção.

  Nesse exercício, se for retirado o operador de módulo, o sinal $y(t)$ também assume duas equações: $-\cos(2\pi t)$ e $+\cos(2\pi t)$ dependendo do instante de tempo, entretanto, ao observar o intervalo de integração no gráfico, percebe-se que apenas a equação $+\cos(2\pi t)$ é necessária, logo

$$\begin{aligned} C_o &= 2\int_{-1/4}^{+1/4} \cos(2\pi t)\, dt \\ A_m &= 4\int_{-1/4}^{+1/4} \cos(2\pi t)\cos(4\pi m t)\, dt \\ B_m &= 4\int_{-1/4}^{+1/4} \cos(2\pi t)\sin(4\pi m t)\, dt \end{aligned}$$

  Iniciando com

$$C_o = 2\int_{-1/4}^{+1/4} \cos(2\pi t)\, dt$$

  Sabe-se que

$$\int \cos(kt)\, dt = \frac{\sin(kt)}{k}$$

  logo

$$C_o = 2\left[\frac{\sin(2\pi t)}{2\pi}\right]_{-1/4}^{+1/4} = 2\frac{\sin(\pi/2) - \sin(-\pi/2)}{2\pi} = 2\frac{1-(-1)}{2\pi} = \frac{2}{\pi}$$

  Passando para

$$A_m = 4\int_{-1/4}^{+1/4} \cos(2\pi t)\cos(4\pi m t)\, dt$$

  Sabe-se que

$$\cos(a).\cos(b) = \frac{1}{2}\cos(a+b) + \frac{1}{2}\cos(a-b)$$

logo

$$\begin{aligned}
A_m &= 4\int_{-1/4}^{+1/4} \cos(2\pi t)\cos(4\pi m t)\,dt = 2\int_{-1/4}^{+1/4} \cos\left[2\pi(1+2m)t\right]\,dt + 2\int_{-1/4}^{+1/4} \cos\left[2\pi(1-2m)t\right]\,dt \\
A_m &= 2\left[\frac{\sin\left[2\pi(1+2m)t\right]}{2\pi(1+2m)}\right]_{-1/4}^{+1/4} + 2\left[\frac{\sin\left[2\pi(1-2m)t\right]}{2\pi(1-2m)}\right]_{-1/4}^{+1/4} \\
A_m &= \frac{\sin\left(\pi/2+\pi m\right) - \sin\left(-\pi/2-\pi m\right)}{\pi(1+2m)} + \frac{\sin\left(\pi/2-\pi m\right) - \sin\left(-\pi/2+\pi m\right)}{\pi(1-2m)}
\end{aligned}$$

Como

$$\sin(-kt) = -\sin(kt)$$

tem-se

$$A_m = \frac{2\sin\left(\pi/2+\pi m\right)}{\pi(1+2m)} + \frac{2\sin\left(\pi/2-\pi m\right)}{\pi(1-2m)}$$

e ainda

$$\sin(\pi/2 \pm \pi m) = \sin(\pi/2)\cos(\pi m) \pm \sin(\pi m)\cos(\pi/2) = \cos(\pi m)$$

logo

$$\begin{aligned}
A_m &= \frac{2\cos(\pi m)}{\pi(1+2m)} + \frac{2\cos(\pi m)}{\pi(1-2m)} = \frac{2\cos(\pi m)}{\pi}.\frac{(1-2m)+(1+2m)}{(1+2m)(1-2m)} \\
A_m &= \frac{2\cos(\pi m)}{\pi}.\frac{2}{1^2-2^2m^2} = \frac{4\cos(\pi m)}{\pi\left(1-4m^2\right)}
\end{aligned}$$

Finalmente

$$B_m = 4\int_{-1/4}^{+1/4} \cos(2\pi t)\sin(4\pi m t)\,dt$$

Sabe-se que

$$\sin(a).\cos(b) = \frac{1}{2}\sin(a+b) + \frac{1}{2}\sin(a-b) \quad \text{e que} \quad \int \sin(kt)\,dt = \frac{\cos(kt)}{-k}$$

então

$$\begin{aligned}
B_m &= 4\int_{-1/4}^{+1/4} \cos(2\pi t)\sin(4\pi m t)\,dt = 2\int_{-1/4}^{+1/4} \sin\left[2\pi(2m+1)t\right]\,dt + 2\int_{-1/4}^{+1/4} \sin\left[2\pi(2m-1)t\right]\,dt \\
B_m &= 2\left[\frac{\cos\left[2\pi(2m+1)t\right]}{-2\pi(2m+1)}\right]_{-1/4}^{+1/4} + 2\left[\frac{\cos\left[2\pi(2m-1)t\right]}{-2\pi(2m-1)}\right]_{-1/4}^{+1/4} \\
B_m &= \frac{\cos\left(\pi m+\pi/2\right) - \cos\left(-\pi m-\pi/2\right)}{-\pi(2m+1)} + \frac{\cos\left(\pi m-\pi/2\right) - \cos\left(-\pi m+\pi/2\right)}{-\pi(2m-1)}
\end{aligned}$$

Como

$$\cos(-kt) = \cos(kt)$$

tem-se

$$B_m = 0$$

- Passo 4: Substituem-se os resultados do passo 3 na expressão com o somatório obtida no passo 2 e conclui-se o exercício.

$$y(t) = |x(t)| = \frac{2}{\pi} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4\cos(\pi m)}{\pi\left(1-4m^2\right)}\cos(4\pi m t)$$

- Perguntas frequentes:

  ▷ Posso calcular as integrais com o operador de módulo no integrando ?

  Não. É necessário separar a função em duas equações iguais porém sendo uma delas multiplicada por -1 nos instantes de t em que a função é negativa e a outra multiplicada por $+1$ no caso contrário.

2.4 Exercío Proposto

Considerando o sinal

$$x(t) = \sin(2\pi t)$$

obtenha a expressão usando o símbolo de somatório para a expansão em série trigonométrica de Fourier do sinal

$$y(t) = 2.u\left[x(t)\right] - 1$$

$\triangleright$ Complementação: o ícone da disciplina na web é um gif animado com a representação gráfica da soma dos primeiros termos da série trigonométrica de Fourier desse exercício. Clique no ícone na página da web e veja a animação. Cada termo senoidal é denominado componente harmônico do sinal periódico com designação ordinal: primeiro componente harmônico (ou fundamental $m = 1$), segundo componente harmônico ($m = 2$), terceiro ... e assim por diante.