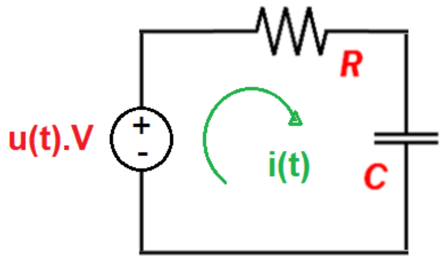
5 Transformada de Laplace

Aula 12 - Capítulo 5: páginas 5 e 6

5.3 Exercício Resolvido

Encontre as transformadas de Laplace $I(s)$ das correntes elétricas $i(t)$ para os circuitos elétricos abaixo.
a) Circuito RC.



- Passo 1: Equações dos elementos do circuito.

$$
\begin{aligned}
v_R(t) &= R.i(t) \\
v_C(t) &= \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)\,dt
\end{aligned}
$$

- Passo 2: Lei das malhas.

$$
\begin{aligned}
u(t).V - v_R(t) - v_C(t) &= 0 \\
u(t).V - R.i(t) - \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)\,dt &= 0
\end{aligned}
$$

- Passo 3: Transformadas de Laplace das equações dos elementos.

  Usando a transformada do degrau e as propriedades da linearidade e da integração tem-se

$$
\begin{aligned}
u(t).V &\leftrightarrow \frac{1}{s}.V \\
v_R(t) &= R.i(t) \leftrightarrow V_R(s) = R.I(s) \\
v_C(t) &= \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)\,dt \leftrightarrow V_C(s) = \frac{1}{C}.\left[\frac{I(s)}{s} + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0} i(t)\,dt\right]
\end{aligned}
$$

  Note que a condição inicial $\int_{-\infty}^{0} i(t)\,dt$ representa a carga elétrica no capacitor no instante $t = 0$, entretanto a grandeza mais comumente informada como condição inicial nos problemas de circuitos elétricos é a tensão no capacitor que pode ser obtida ao se fazer $t = 0$ na equação do capacitor, logo

$$
v_C(0) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i(t)\,dt \Rightarrow \int_{-\infty}^{0} i(t)\,dt = C.v_C(0)
$$

  e assim

$$
v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)\,dt \leftrightarrow V_C(s) = \frac{I(s)}{sC} + \frac{v_C(0)}{s}
$$

- Passo 4: Lei das malhas no domínio s.

$$\frac{1}{s}.V - R.I(s) - \left[\frac{I(s)}{sC} + \frac{v_C(0)}{s}\right] = 0$$

Isolando a incógnita $I(s)$ vem

$$I(s) = \frac{V/s - v_C(0)/s}{R + 1/sC}$$

- Passo 5: Forma padrão.

Embora a solução do problema já tenha sido obtida no passo anterior, é recomendável padronizar a expressão matemática resultante para facilitar a posterior transformada inversa que permite obter a solução para $i(t)$.

A forma padrão consiste em sempre que possível, deixar a expressão na forma de uma razão entre dois polinômios em s devendo ser unitário o coeficiente do termo de maior grau do denominador.

Então,

$$I(s) = \frac{V/s - v_C(0)/s}{R + 1/sC}.\frac{s}{s} = \frac{V - v_C(0)}{s.R + 1/C}$$

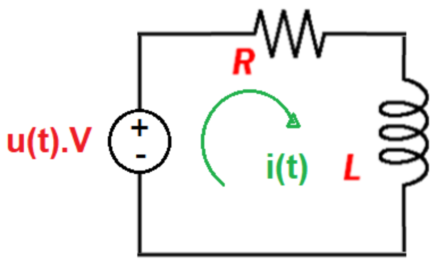
$$I(s) = \frac{V - v_C(0)}{s.R + 1/C}.\frac{1/R}{1/R}$$

$$I(s) = \frac{\dfrac{V - v_C(0)}{R}}{s + \dfrac{1}{RC}}$$

que resultou num polinômio de grau zero no numerador e um polinômio de grau um no denominador sendo unitário o coeficiente de s no denominador.

Note que V, R, C e $v_C(0)$ são constantes literais que poderiam ter seus valores numéricos informados no enunciado do problema.

b) Circuito RL.



- Passo 1: Equações dos elementos do circuito.

$$\begin{aligned} v_R(t) &= R.i(t) \\ v_L(t) &= L\frac{d}{dt}i(t) \end{aligned}$$

- Passo 2: Lei das malhas.

$$\begin{aligned} u(t).V - v_R(t) - v_L(t) &= 0 \\ u(t).V - R.i(t) - L\frac{d}{dt}i(t) &= 0 \end{aligned}$$

- Passo 3: Transformadas de Laplace das equações dos elementos.
  Usando a transformada do degrau e as propriedades da linearidade e da diferenciação tem-se

$$\begin{aligned} u(t).V &\leftrightarrow \frac{1}{s}.V \\ v_R(t) &= R.i(t) \leftrightarrow V_R(s) = R.I(s) \\ v_L(t) &= L\frac{d}{dt}i(t) \leftrightarrow V_L(s) = L\left[s.I(s) - i(0)\right] \end{aligned}$$

  Nesse exemplo, a condição inicial a ser informada é a corrente no indutor, portanto a própria corrente $i(t)$ em $t = 0$.

- Passo 4: Lei das malhas no domínio s.

$$\frac{1}{s}.V - R.I(s) - L\left[s.I(s) - i(0)\right] = 0$$

  Isolando $I(s)$ vem

$$I(s) = \frac{V/s + L.i(0)}{s.L + R}$$

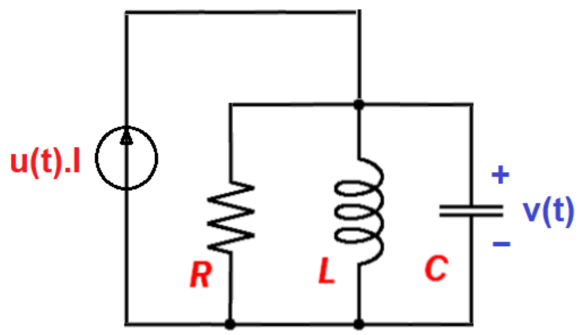
- Passo 5: Forma padrão.

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{V/s + L.i(0)}{s.L + R}.\frac{s}{s} = \frac{s.L.i(0) + V}{s^2.L + s.R} \\ I(s) &= \frac{s.L.i(0) + V}{s^2.L + s.R}.\frac{1/L}{1/L} = \frac{s.i(0) + V/L}{s^2 + s.R/L} \end{aligned}$$

  Resultando numa razão entre polinômios de grau um e dois com coeficiente unitário para s^2 no denominador.

5.4 Exercício Proposto

Encontre a transformada de Laplace $V(s)$ da tensão elétrica $v(t)$ para o circuito elétrico abaixo.



- Passo 1: Equações dos elementos do circuito.

$$\begin{aligned} i_R(t) &= \frac{1}{R}v(t) \\ i_L(t) &= \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(t)\,dt \\ i_C(t) &= C\frac{d}{dt}v(t) \end{aligned}$$

- Passo 2: Lei dos nós.
  Continue...