5 Transformada de Laplace

Aula 13 - Capítulo 5: páginas 10 a 12

5.5 Exercício Resolvido

Encontre a transformada inversa de Laplace $v(t)$ da tensão elétrica no domínio da frequência complexa

$$V(s) = \frac{s.v(o) + I/C - i_L(0)/C}{s^2 + s/RC + 1/LC}$$

para os valores numéricos abaixo.

a) $R = 1/3$, $L = 1/2$, $C = 1$, $I = 1$, $i_L(0) = 0$, $v(0) = 2$ (unidades SI)

- Passo 1: Substituir os valores numéricos na expressão de $V(s)$.

$$V(s) = \frac{s.2 + 1}{s^2 + s.3 + 2}$$

- Passo 2: Encontrar os polos.

$$s^2 + s.3 + 2 = 0$$

$$s = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4.1.2}}{2.1} = \begin{cases} -1 = \lambda_1 \\ \\ -2 = \lambda_2 \end{cases}$$

- Passo 3: Forma fatorada.

$$V(s) = \frac{s.2 + 1}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)} = \frac{s.2 + 1}{(s + 1)(s + 2)}$$

- Passo 4: Encontrar os respectivos resíduos.

  Situação com polos reais e distintos, logo

$$\begin{aligned} c_1 &= [(s - \lambda_1)V(s)]_{s=\lambda_1} = \left[(s + 1)\frac{s.2 + 1}{(s + 1)(s + 2)}\right]_{s=-1} \\ c_1 &= \left[\frac{s.2 + 1}{s + 2}\right]_{s=-1} = \frac{-2 + 1}{-1 + 2} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2 &= [(s - \lambda_2)V(s)]_{s=\lambda_2} = \left[(s + 2)\frac{s.2 + 1}{(s + 1)(s + 2)}\right]_{s=-2} \\ c_2 &= \left[\frac{s.2 + 1}{s + 1}\right]_{s=-2} = \frac{-4 + 1}{-2 + 1} = 3 \end{aligned}$$

  Note que é necessário simplificar o numerador com o denominador antes de substituir o valor do polo. Caso isso não seja feito, tem-se uma indeterminação do tipo 0/0.

- Passo 5: Substituir os valores dos polos e resíduos na expressão da transformada inversa.

  Na situação com polos reais e distintos a transformada inversa é

$$v(t) = u(t).\left[c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}\right]$$

$$v(t) = u(t).\left[-e^{-t} + 3e^{-2t}\right]$$

b) $R = 1$, $L = 2/5$, $C = 1$, $I = 1$, $i_L(0) = 0$, $v(0) = 0$ (unidades SI)

- Passo 1: Substituir os valores numéricos na expressão de $V(s)$.

$$V(s) = \frac{1}{s^2 + s + 5/2}$$

- Passo 2: Encontrar os polos.

$$s^2 + s + 5/2 = 0$$

$$s = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.5/2}}{2.1} = \begin{cases} -1/2 + j3/2 = \lambda_1 \\ -1/2 - j3/2 = \lambda_2 \end{cases}$$

- Passo 3: Forma fatorada.

$$V(s) = \frac{1}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)} = \frac{1}{(s + 1/2 - j3/2)(s + 1/2 + j3/2)}$$

- Passo 4: Encontrar os respectivos resíduos.
  Situação com polos complexos conjugados, logo

$$\begin{aligned} c_1 &= [(s - \lambda_1)V(s)]_{s=\lambda_1} = \left[(s + 1/2 - j3/2)\frac{1}{(s + 1/2 - j3/2)(s + 1/2 + j3/2)}\right]_{s=-1/2+j3/2} \\ c_1 &= \left[\frac{1}{s + 1/2 + j3/2}\right]_{s=-1/2+j3/2} = \frac{1}{-1/2 + j3/2 + 1/2 + j3/2} = \frac{1}{j3}.\frac{j}{j} = -j\frac{1}{3} \\ c_2 &= c_1^* = j\frac{1}{3} \end{aligned}$$

- Passo 5: Separar as partes real e imaginária dos polos e resíduos.

$$\lambda_1 = -a + jb = -1/2 + j3/2 \Rightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = 3/2 \end{cases}$$

$$c_1 = c_r + jc_i = -j\frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} c_r = 0 \\ c_i = -1/3 \end{cases}$$

- Passo 5: Substituir os valores na expressão da transformada inversa.
  Na situação com polos complexos conjugados a transformada inversa é

$$v(t) = u(t).\left[2c_r.e^{-at}\cos\left(bt\right) - 2c_i.e^{-at}\sin(bt)\right]$$

$$v(t) = \frac{2}{3}u(t).e^{-t/2}\sin\left(\frac{3}{2}t\right)$$

5.6 Exercício Proposto

Encontre a transformada inversa de Laplace $v(t)$ da tensão elétrica no domínio da frequência complexa

$$V(s) = \frac{s.v(o) + I/C - i_L(0)/C}{s^2 + s/RC + 1/LC}$$

para os valores numéricos $R = 1/2$, $L = 1$, $C = 1$, $I = 0$, $i_L(0) = 1$, $v(0) = 1$ (unidades SI).