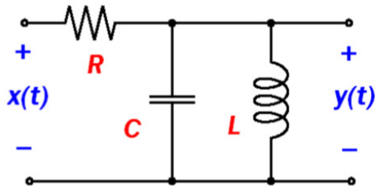
6 Sistemas de Tempo Contínuo

Aula 17 - Capítulo 6: páginas 14 a 23

6.5 Exercício Resolvido

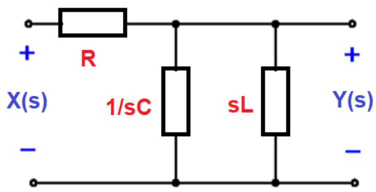
Discrimine as matrizes $[A]$, $[B]$, $[C]$ e $[D]$ da representação no espaço de estados do sistema de tempo contínuo dado pelo circuito elétrico abaixo.



Esse exercício será resovido de duas formas distintas. A primeira segue a metodologia de resolução de circuitos elétricos diretamente aplicada ao espaço de estados (cap6/pag17) e a segunda consiste em calcular a função de transferência e depois representá-la no espaço de estados (cap6/pag22). Como a página 22 não foi digitalizada no arquivo do capítulo 6, a parte teórica será reproduzida aqui.

Primeira Forma de Resolução

- Passo 1: Transformar o circuito para o domínio s considerando condições iniciais nulas (cap5/pag16-17).



- Passo 2: Variáveis de estado.

  A corrente elétrica no indutor $I_L(s)$ e a tensão elétrica no capacitor $V_C(s)$ são as variáveis de estado.

- Passo 3: Equação de saída.

  A tensão no capacitor é a própria variável de saída, logo a equação de saída é

$$Y(s) = V_C(s)$$

- Passo 4: Lei das malhas.

$$X(s) - V_R(s) - V_C(s) = 0$$

- Passo 5: Lei dos nós.

$$I_R(s) - I_C(s) - I_L(s) = 0$$

- Passo 6: Eliminar as variáveis desnecessárias.

$$\begin{aligned}
V_R(s) &= X(s) - V_C(s) \\
I_R(s) &= \frac{X(s) - V_C(s)}{R} \\
I_C(s) &= sCV_C(s)
\end{aligned}$$

$$\frac{X(s) - V_C(s)}{R} - sCV_C(s) - I_L(s) = 0$$

- Passo 7: Equações de estado.
  Como há duas variáveis de estado são necessárias duas equações: uma isolando $sV_C(s)$ e a outra isolando $sI_L(s)$.
  Do passo 6 vem

$$sV_C(s) = -\frac{V_C(s)}{RC} - \frac{I_L(s)}{C} + \frac{X(s)}{RC}$$

  e da equação do indutor vem

$$V_L(s) = sLI_L(s) = V_C(s) \quad \text{e} \quad sI_L(s) = \frac{1}{L}V_C(s)$$

- Passo 8: Forma matricial.

$$\begin{aligned}
s\begin{bmatrix} V_C(s) \\ I_L(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_C(s) \\ I_L(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} X(s) \\
Y(s) &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_C(s) \\ I_L(s) \end{bmatrix} + [D]\ X(s)
\end{aligned}$$

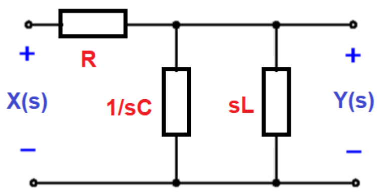
$$\begin{aligned}
s\begin{bmatrix} V_C(s) \\ I_L(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1/RC & -1/C \\ 1/L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_C(s) \\ I_L(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/RC \\ 0 \end{bmatrix} X(s) \\
Y(s) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_C(s) \\ I_L(s) \end{bmatrix} + [0]\ X(s)
\end{aligned}$$

  Portanto

$$[A] = \begin{bmatrix} -1/RC & -1/C \\ 1/L & 0 \end{bmatrix} \qquad [B] = \begin{bmatrix} 1/RC \\ 0 \end{bmatrix} \qquad [C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad [D] = [0]$$

Segunda Forma de Resolução

- Passo 1: Transformar o circuito para o domínio s considerando condições iniciais nulas (cap5/pag16-17).



- Passo 2: Divisor de tensão.

$$Y(s) = \frac{\dfrac{sL/sC}{sL+1/sC}}{\dfrac{sL/sC}{sL+1/sC}+R}X(s) = \frac{L/C}{L/C+sRL+R/sC}X(s)$$

- Passo 3: Função de transferência na forma racional.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{L/C}{L/C+sRL+R/sC}.\frac{s/RL}{s/RL}$$

$$H(s) = \frac{s/RC}{s^2+s/RC+1/LC} = \frac{b_2s^2+b_1s+b_0}{s^2+a_1s+a_0}$$

logo

$$a_1 = 1/RC \quad a_0 = 1/LC \quad b_2 = 0 \quad b_1 = 1/RC \quad b_0 = 0$$

- Passo 4: Forma canônica.

Para um sistema de terceira ordem cuja função de transferência é

$$H(s) = \frac{b_3s^3+b_2s^2+b_1s+b_0}{s^3+a_2s^2+a_1s+a_0}$$

uma das possíveis representações no espaço de estados, chamada de forma canônica, é

$$\begin{aligned} s\begin{bmatrix} Q_1(s) \\ Q_2(s) \\ Q_3(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1(s) \\ Q_2(s) \\ Q_3(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0-b_3a_0 \\ b_1-b_3a_1 \\ b_2-b_3a_2 \end{bmatrix} X(s) \\ Y(s) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1(s) \\ Q_2(s) \\ Q_3(s) \end{bmatrix} + [b_3]\ X(s) \end{aligned}$$

Reduzindo para um sistema de segunda ordem fica

$$\begin{aligned} s\begin{bmatrix} Q_1(s) \\ Q_2(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1(s) \\ Q_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0-b_2a_0 \\ b_1-b_2a_1 \end{bmatrix} X(s) \\ Y(s) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1(s) \\ Q_2(s) \end{bmatrix} + [b_2]\ X(s) \end{aligned}$$

como

$$a_1 = 1/RC \quad a_0 = 1/LC \quad b_2 = 0 \quad b_1 = 1/RC \quad b_0 = 0$$

vem

$$\begin{aligned} s\begin{bmatrix} Q_1(s) \\ Q_2(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -1/LC \\ 1 & -1/RC \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1(s) \\ Q_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/RC \end{bmatrix} X(s) \\ Y(s) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_1(s) \\ Q_2(s) \end{bmatrix} + [0]\ X(s) \end{aligned}$$

Portanto

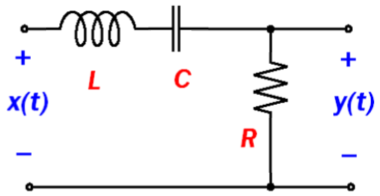
$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & -1/LC \\ 1 & -1/RC \end{bmatrix} \qquad [B] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/RC \end{bmatrix} \qquad [C] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad [D] = [0]$$

Note que as duas resoluções resultam em matrizes diferentes porque a representação no espaço de estados não é única, mas ambas as representações fornecem a mesma função de transferência ao calcular

$$H(s) = [D] + [C]\left(s[I]-[A]\right)^{-1}[B]$$

6.6 Exercício Proposto

Discrimine as matrizes $[A]$, $[B]$, $[C]$ e $[D]$ da representação no espaço de estados do sistema de tempo contínuo dado pelo circuito elétrico abaixo.



Escolha a forma de resolução que você achar mais conveniente.