

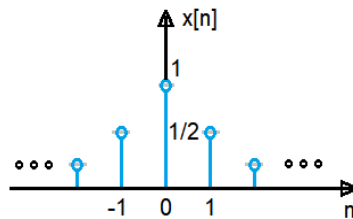
7 Transformada Z

Aula 20 - Capítulo 7: páginas 9 e 10

7.5 Exercício Resolvido

Calcule transformada z direta da sequência $x[n] = 2^{-|n|}$ e especifique sua ROC.

- Passo 1: Gráfico da sequência $x[n]$.

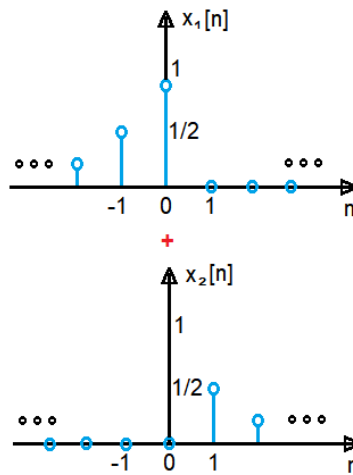


- Passo 2: Separar em duas sequências: à esquerda e à direita.

É possível expressar a sequência $x[n]$ por uma combinação linear de uma sequência $x_1[n]$ à esquerda e outra $x_2[n]$ à direita tal que

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n]$$

conforme os gráficos abaixo,



onde

$$x_1[n] = 2^n \cdot u[-n] \quad \text{e} \quad x_2[n] = 2^{-n} \cdot u[n-1]$$

- Passo 3: Propriedades da reversão e do produto por exponencial.

Sabe-se que

$$u[n] \leftrightarrow \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1$$

logo

$$u[-n] \leftrightarrow \frac{(1/z)}{(1/z)-1}, \quad |1/z| > 1$$

ou

$$u[-n] \leftrightarrow \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1$$

e ainda

$$2^n \cdot u[-n] \leftrightarrow \frac{1}{1 - (z/2)} \quad , \quad |z/2| < 1$$

ou

$$x_1[n] = 2^n \cdot u[-n] \leftrightarrow X_1(z) = \frac{2}{2 - z} \quad , \quad |z| < 2$$

Sequência à esquerda: a ROC é o interior de uma circunferência. Polo em $z = 2$: a ROC não contém o polo e é delimitada por ele.

- Passo 4: Propriedades do deslocamento e do produto por exponencial.

Sabe-se que

$$u[n] \leftrightarrow \frac{z}{z - 1} \quad , \quad |z| > 1$$

logo

$$u[n - 1] \leftrightarrow \frac{z}{z - 1} \cdot z^{-1} \quad , \quad |z| > 1$$

ou

$$u[n - 1] \leftrightarrow \frac{1}{z - 1} \quad , \quad |z| > 1$$

e ainda

$$2^{-n} \cdot u[n - 1] = (2^{-1})^n \cdot u[n - 1] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot u[n - 1] \leftrightarrow \frac{1}{(z/2) - 1} \quad , \quad |z/2| > 1$$

ou

$$x_2[n] = 2^{-n} \cdot u[n - 1] \leftrightarrow X_2(z) = \frac{1/2}{z - 1/2} \quad , \quad |z| > \frac{1}{2}$$

Sequência à direita: a ROC é o exterior de uma circunferência. Polo em $z = 1/2$: a ROC não contém o polo e é delimitada por ele.

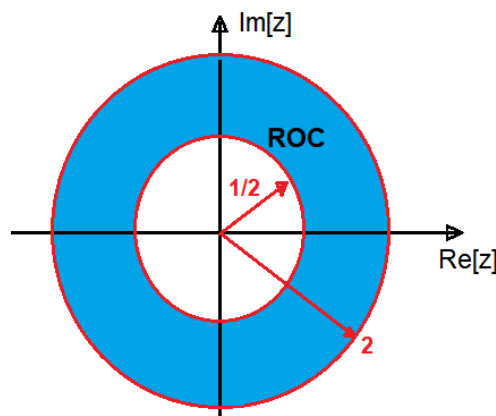
- Passo 5: Propriedade da linearidade.

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n] \leftrightarrow X(z) = X_1(z) + X_2(z) \quad \text{para ROC de } X_1(z) \cap \text{ROC de } X_2(z)$$

$$X(z) = \frac{2}{2 - z} + \frac{1/2}{z - 1/2} \quad , \quad |z| < 2 \cap |z| > \frac{1}{2}$$

$$X(z) = \frac{2 \cdot (z - 1/2) + (2 - z)/2}{(2 - z)(z - 1/2)} = \frac{-z \cdot 3/2}{z^2 - z \cdot 5/4 + 1} \quad , \quad \frac{1}{2} < |z| < 2$$

Sequência bilateral: a ROC é um anel. Polos em $z = 1/2$ e $z = 2$: a ROC não contém os polos e é delimitada por eles.



7.6 Exercício Proposto

Calcule transformada z direta da sequência $x[n] = n \cdot u[n]$ e especifique sua ROC.