

Auto-Similaridade do Tráfego de Telecomunicações

Carlos Marcelo Pedroso

Mestrado em Engenharia Elétrica - PPGEE/UFPR

9 de novembro de 2011

Auto-Similaridade e Long Range Dependence

Estacionariedade

LRD e SRD

Auto-similaridade e a geometria fractal

Identificação de um processo auto-similar

Estatística R/S

Método da Variância

Método da Transformada de Wavelet

Modelos de tráfego Auto Similares

Modelo ON-OFF

Modelo FARIMA

Movimento Browniano Fracionário

Modelo SURGE

Estacionariedade

- ▶ A observação de uma série temporal discreta realizada em instantes de tempo $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_t, \dots, \tau_n$ pode ser denotada por $X(\tau_1), X(\tau_2), \dots, X(\tau_t), \dots, X(\tau_N)$. Normalmente são consideradas séries temporais discretas onde as observações são realizadas em um intervalo fixo h . Quando N valores sucessivos da série forem analisados, será escrito $X_1, X_2, \dots, X_t, \dots, X_N$ para denotar observações realizadas a intervalos de tempo equidistantes $\tau_0 + h, \tau_0 + 2h, \dots, \tau_0 + th, \dots, \tau_0 + Nh$. A esperança será denotada $E(X) = \mu$; a variância será denotada por $V[X] = E[(X - \mu)^2] = \sigma^2$; a auto-covariância com defasagem k será denotada por $E[(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu)] = \gamma_k$ e a auto-correlação com defasagem k será denotada por $\rho_k = \gamma_k / \gamma_0$.

Estacionariedade

- ▶ Estacionariedade estrita: X_t é estritamente estacionário se $[X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}]$ e $[X_{t_1+k}, X_{t_2+k}, \dots, X_{t_n+k}]$ possuem a mesma distribuição conjunta para todo $n \in \mathbb{N}$.
- ▶ Estacionariedade fraca ou de segunda ordem: A função de auto-covariância $\gamma(r, s) = E [(X_r - \mu)(X_s - \mu)]$ deve satisfazer à relação de invariância
$$\gamma(r, s) = \gamma(r + k, s + k) \quad \forall r, s, k \in \mathbb{Z}.$$

Processo com Dependência de Curta Duração

- ▶ Processo com memória de curta duração ou Short Range Dependence (SRD) indica o fenômeno onde a observação corrente não é correlacionada com observações muito antigas. Para um processo *SRD*, a função de auto-correlação decai rapidamente para zero.
- ▶ O valor $H = \frac{1}{2}$ é o limite entre a *LRD* e a *SRD*. Processos com $\frac{1}{2} < H < 1$ são *LRD*, enquanto processos com $0 < H < \frac{1}{2}$ são *SRD*. O efeito da *LRD* será maior quando H estiver próximo a 1.

Processo com Dependência de Longa Duração

- ▶ É o fenômeno que ocorre quando observações de um evento são significativamente correlacionadas com observações muito distantes no tempo. Este fenômeno é de particular interesse na modelagem de tráfego, uma vez que as pesquisas comprovaram que o tráfego em redes modernas de comunicação frequentemente apresenta *LRD*.
- ▶ Em um processo *LRD* a função de auto-correlação ρ_k decai para zero muito lentamente em função do deslocamento k . Processos auto-similares apresentam *LRD*.

Processo com Dependência de Longa Duração

- ▶ Seja X_t , $t = 1, 2, \dots$, um processo estacionário de segunda ordem. Se existe uma constante c tal que $\gamma_k \sim c/k^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, então o processo possui *LRD*.
- ▶ Hurst foi um famoso hidrólogo interessado no Egito e no rio Nilo que mostrou em 1951 que o nível do rio Nilo é uma sequência *LRD*. Por razões históricas, o parâmetro de Hurst $H = 1 - \alpha/2$ é utilizado para representar a auto-similaridade.

Fractais

- ▶ O modelo auto-similar foi estudado pelo matemático George Cantor no século XIX, em um estudo que o levou a teoria sobre fractais aprimorada por Benoit B. Mandelbrot.
- ▶ O valor $H = \frac{1}{2}$ é o limite entre a *LRD* e a *SRD*. Processos com $\frac{1}{2} < H < 1$ são *LRD*, enquanto processos com $0 < H < \frac{1}{2}$ são *SRD*. O efeito da *LRD* será maior quando H estiver próximo a 1.

Fractais

- ▶ A montagem do Conjunto de Cantor apresentado na abaixo, onde a sequência de iterações é representada usando a dimensão vertical, produz um objeto auto-similar. Para a montagem do conjunto, um dado segmento de reta é dividido em 3 partes iguais, sendo a parte central do segmento descartada, e assim recursivamente. O modelo geométrico referido é atingido no limite de infinitas iterações do processo descrito.



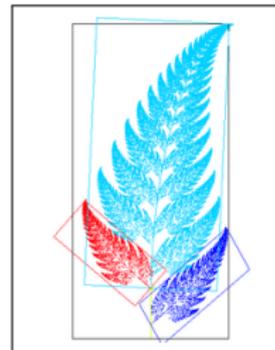
Fractais

- ▶ Um objeto auto-similar em 2 dimensões é mostrado abaixo. Este objeto é conhecido como floco de neve Koch, formado pela divisão do segmento de reta em três partes iguais, removendo-se o segmento central e incluindo-se dois segmentos do mesmo tamanho do segmento que foi removido conectados em suas extremidades aos segmentos restantes e entre si. A regra recursiva é executada sobre todos os segmentos de reta restantes. Imagine que a montagem da figura prossiga indefinidamente. Qualquer ampliação em escala de uma porção do objeto resultante possui semelhanças entre si.



Fractais - Exemplos

- ▶ Alguns fractais
- ▶ Fractais na natureza
- ▶ Mandelbrot set
- ▶ Ver apresentação Ashish Gupta



Fractais

- ▶ Suponha, por exemplo, o conjunto de Cantor. Cada divisão da figura original produz uma mudança de escala onde são criadas duas figuras iguais à original ($N = 2$) e o tamanho da figura será 3 vezes menor ($\varepsilon = 3$). O processo se repete de modo que a dimensão $d = 0,631$ permanece invariável. Para o fractal floco de neve, a quantidade de novos segmentos criados a partir da figura original será $N = 4$, com seu tamanho reduzido em $\varepsilon = 3$. A dimensão fractal deste objeto será $d = 1,262$:
- ▶ É possível determinar a dimensão fractal de um objeto observado fazendo uso da definição. O procedimento, chamado *contagem de caixas*, é o seguinte:

Dimensão Fractal

- ▶ 1- Coloque um *grid* sobre o objeto com quadrados de dimensão ε_0 . Conte quantos quadrados contêm pontos da figura e chame o resultado de $N(\varepsilon_0)$;
- ▶ 2- Repita o passo 1 utilizando quadrados com dimensão $\varepsilon_1 = \varepsilon_0/2, \varepsilon_2 = \varepsilon_1/2, \dots$ e anote o resultado em $N(\varepsilon_0), N(\varepsilon_1), \dots$;
- ▶ 3- A dimensão d é o número tal que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a \cdot \varepsilon^{-d}$ (derivado da equação anterior), onde a é uma constante. Na prática, d pode se estimado como

$$d = \frac{\log N(\varepsilon_{i+1}) / \log N(\varepsilon_i)}{\log \varepsilon_{i+1} / \log \varepsilon_i} \quad (1)$$

Dimensão Fractal

- ▶ A grande dificuldade do procedimento apresentado é selecionar o valor apropriado para i . Objetos reais não possuem um nível de granularidade infinitamente grande ou infinitamente pequeno. Além disso, a auto-similaridade pode manifestar-se apenas em determinadas escalas.
- ▶ O parâmetro de Hurst está relacionado com a dimensão fractal através da relação $d = 2 - H$;

Auto-Similaridade

- ▶ Assuma uma variável aleatória com $E[X] = 0$. Pela estacionariedade, $\gamma(r, s) = \gamma(r - s, 0)$ e a auto-covariância será dada por γ_k . Para formular a invariância de escala, primeiro define-se o processo agregado $X^{(m)}$ de X em um nível de agregação m .

$$X_k^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{t=m(k-1)+1}^{mk} X_t; \quad (2)$$

- ▶ Isso significa que X_t é particionado em blocos não sobrepostos de tamanho m , seus valores são anotados e k é utilizado como índice nestes blocos. O valor de X_t representa a quantidade de informação observada.

Definição de Auto-Similaridade

- ▶ Seja $\gamma^{(m)}(k)$ a função de auto-covariância de $X^{(m)}$.
Assumindo que o processo é estacionário de segunda ordem, pode-se colocar a seguinte definição de auto-similaridade.

$$\gamma_k = \frac{\sigma^2}{2} \left[(k+1)^{2H} - 2k^{2H} + (k-1)^{2H} \right], \quad \forall k \geq 1 \quad (3)$$

- ▶ implica em $\gamma_k = \gamma_k^{(m)}$, $\forall m \geq 1$. A auto-similaridade estacionária tem sido o modelo dominante para a modelagem de tráfego em redes de comunicação modernas. A função de auto-correlação de um processo auto-similar apresenta um lento decaimento em função do deslocamento k e $1/2 < H < 1$. Processos SRD apresentam $H \leq 1/2$

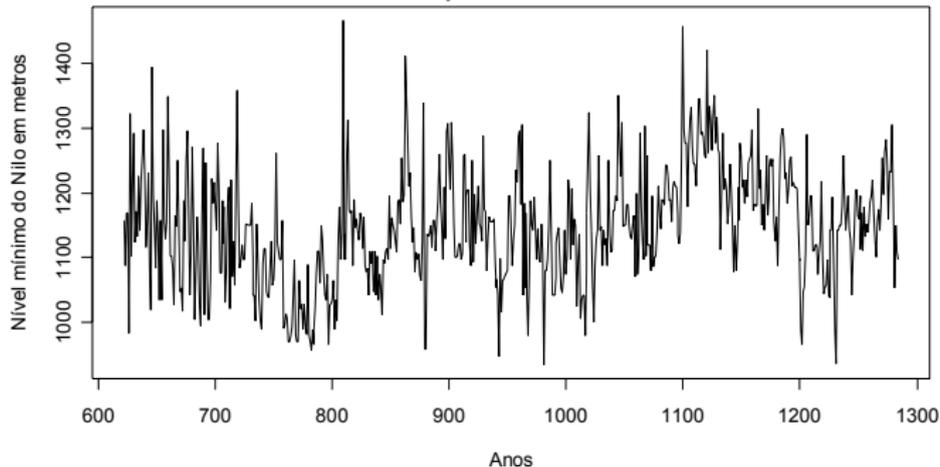
Definição de Auto-Similaridade

- ▶ Um processo será *auto-similar do ponto de vista estocástico* se o processo mantém características estocásticas sobre uma certa faixa de escalas, de modo a satisfazer a relação dada pela equação abaixo. A interpretação desta equação é a seguinte: o processo estocástico X_t deslocado em escala por um fator constante m possui aproximadamente as mesmas características de X_t em termos de sua distribuição de probabilidade. A amplitude do processo X_{mt} resultante será o de X_t multiplicado por m^H , com H representando o parâmetro de Hurst.

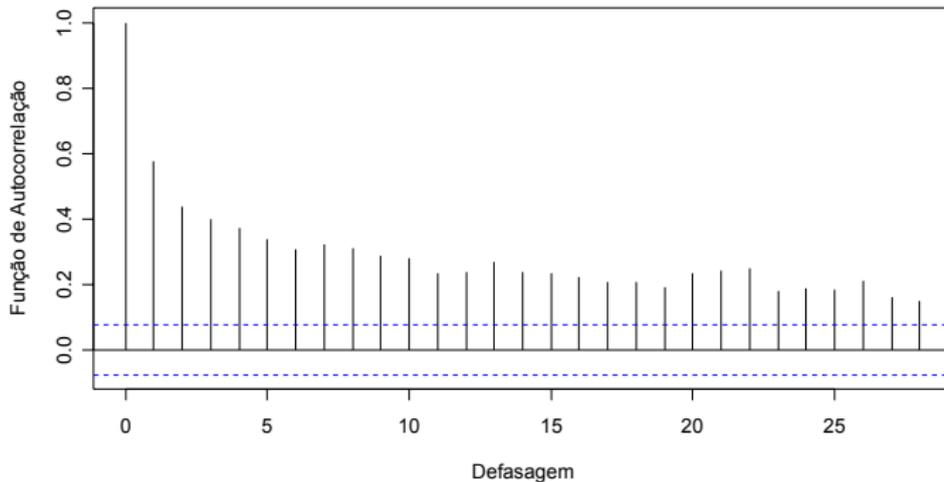
$$X_{mt} \cong_d m^H X_t, m > 0 \quad (4)$$

Identificação de um processo auto-similar

- ▶ Um dos fatores que indicam a presença da auto-similaridade é o lento decaimento da função de auto-covariância.



Identificação de um processo auto-similar



- ▶
- ▶ No entanto, o lento decaimento da ACF por si só não é suficiente para indicar a presença da auto-similaridade.

Estatística R/S

- ▶ A auto-similaridade manifesta-se através de uma linha reta no gráfico *log-log* na estatística R/S. Para um dado conjunto de números $\{X_1, \dots, X_n\}$ com média amostral $\hat{\mu}$ e variância amostral $\hat{S}^2(n)$, o parâmetro de Hurst H é dado pela razão $\hat{R}(n)/\hat{S}(n)$ (ou estatística R/S), onde \hat{R} é calculado através da Equação 5.

$$\hat{R}(n) = \max \left\{ \sum_{i=1}^k (X_i - \hat{\mu}), 1 \leq k \leq n \right\} - \min \left\{ \sum_{i=1}^k (X_i - \hat{\mu}), 1 \leq k \leq n \right\} \quad (5)$$

- ▶ O valor esperado de $R(n)/S(n)$ assintoticamente satisfaz a relação $E[R(n)/S(n)] \rightarrow a n^H$ conforme $n \rightarrow \infty$ com $\frac{1}{2} < H < 1$.

Método da Variância

- ▶ Este é um método simples e apresenta resultados aproximados. Consiste em verificar a auto-similaridade assintótica através do gráfico do estimador $\sigma^{2(m)}$ da variância do processo agregado, dado pela Equação 6. Para valores suficientemente grandes de m , $\sigma^{2(m)} \sim c m^{-2(1-H)}$ para uma constante c . Isto pode ser verificado em uma escala logarítmica.

$$\sigma^{2(m)} = \frac{m}{N} \sum_{t=1}^{N/m} (X_t^{(m)} - \mu)^2 \quad (6)$$

- ▶ Neste método, a variância $\sigma^{2(m)} = \text{Var}\{X_t^{(m)}\}$ em um nível de agregação m deve ser colocado em um gráfico em escala logarítmica ($\sigma^{2(m)} \times m$). A inclinação assintótica da reta formada será $\alpha = -2(1 - H)$.

Método da Transformada de Wavelet

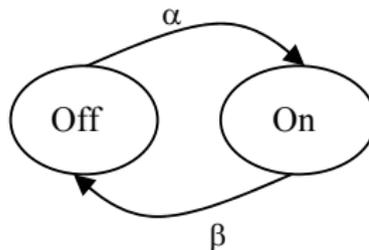
- ▶ Wavelets são funções matemáticas que seccionam os dados em diferentes componentes de frequência e então estudam cada componente com uma resolução ajustada à sua escala. Elas possuem vantagens sobre os métodos tradicionais de Fourier para a análise de situações onde o sinal contém descontinuidades e picos. Wavelets foram desenvolvidas independentemente nos campos da matemática, física quântica, engenharia elétrica e geologia sísmica.
- ▶ O procedimento básico de análise de uma série temporal consiste em um algoritmo recursivo que constrói a função, desloca-a e troca sua escala. Logo, a função original é decomposta em um conjunto de escalas e representada como parâmetros da função padrão, o que torna a análise menos sensível ao ruído porque mede as flutuações médias do sinal em diferentes escalas.

Automação da análise

- ▶ O software estatístico R possui o pacote FARma que disponibiliza funções para análise de séries auto-similares, incluindo diversos métodos para estimar o parâmetro de Hurst.

Modelo ON-OFF

- ▶ A figura abaixo mostra um dos modelos mais populares para geração de tráfego de voz, o modelo *ON-OFF*. Neste modelo, os pacotes são gerados somente durante o período onde o estado do sistema é *ON*. Durante o período onde o estado é *ON*, os pacotes são gerados com intervalos fixos entre chegadas; a sucessão entre estados *ON* e *OFF* é modelada pela distribuição exponencial.



Modelo ON-OFF

- ▶ O modelo *IPP* (*Interrupted Poisson Process*) modifica o modelo *ON-OFF* de tal maneira que, quando o processo está no estado *ON*, a chegada dos pacotes será realizada de acordo com a distribuição de Poisson com taxa λ .
- ▶ No entanto, estes dois casos constituem modelos que levam a séries com dependência de curta duração.

Modelo ON-OFF

- ▶ Um dos resultados mais interessantes obtidos foi quando a distribuição do tempo ON ou do tempo OFF é modelado por uma distribuição de cauda pesada, o tráfego resultante apresenta dependência de longa duração.
- ▶ Para este caso, $H = (3 - \alpha)/2$, onde α é o parâmetro de forma (shape) da distribuição.

Distribuições de Cauda Pesada

- ▶ Uma das explicações sobre as causas do tráfego de telecomunicações auto-similar é a natureza dos objetos transmitidos na Internet: tamanho de arquivos, tamanho de objetos na Web, ritmos de chegada de conexões ou mesmo tempo que o usuário processa informações são descritos por uma distribuição de cauda pesada, que torna o tráfego total observado uma série temporal com memória longa.
- ▶ Uma variável aleatória X possui distribuição de cauda pesada se:

$$\Pr\{X > x\} \sim x^{-\alpha}, \quad x \rightarrow \infty, \quad 0 < \alpha < 2 \quad (7)$$

onde α é chamado parâmetro de forma (*shape parameter*).

A distribuição de Pareto

- ▶ A distribuição de Pareto é uma distribuição de cauda pesada cuja função de distribuição de probabilidade é dada pela equação abaixo, onde $0 < \alpha < 2$ é o parâmetro de forma e β é chamado de parâmetro de localização. A esperança é dada por $E[X] = \alpha \beta / (\alpha - 1)$, $\alpha > 1$.

$$\Pr\{X \leq x\} = 1 - \left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha, \quad \beta \leq x \quad (8)$$

- ▶ A distribuição de Pareto é uma das distribuições de cauda pesada mais utilizadas na modelagem de tráfego.

Fractional ARIMA (FARIMA)

- ▶ O modelo *FARIMA* proposto por Hosking em 1981 é uma extensão natural do processo *ARIMA* que permite valores reais para o grau de diferenciação (parâmetro d do modelo *ARIMA*).
- ▶ A diferenciação utiliza a Equação 9 alterada com d representando um número real, $-1/2 < d < 1/2$. Neste modelo, X_t é um processo *LRD* se $0 < d < 1/2$ e *SRD* se $d = 0$.

Fractional ARIMA (FARIMA)

- ▶ Em um modelo *FARIMA* com *LRD*, o parâmetro de Hurst está relacionado com o parâmetro d através da relação $H = d + \frac{1}{2}$.
- ▶ O operador de diferenças é redefinido como

$$\nabla^d X_t = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{d}{i} (-1)^i X_{t-i}, \quad -1/2 < d < 1/2 \quad (9)$$

- ▶ e o coeficiente binomial pode ser interpretado como

$$\binom{d}{i} (-1)^i = \frac{\Gamma(-d + i)}{\Gamma(-d)\Gamma(i + 1)} \quad (10)$$

Movimento Browniano

- ▶ O termo movimento Browniano¹ refere-se a:
 1. O fenômeno físico em que minúsculas partículas imersas em um fluido movem-se randomicamente; ou
 2. Os modelos matemáticos utilizados para descrever tais movimentos randômicos.
- ▶ Ver:
 1. <http://www.youtube.com/watch?v=6VdMp46ZIL8>
 2. <http://www.youtube.com/watch?v=BaX7DOSvK1k>

¹em homenagem ao botânico Robert Brown

Movimento Browniano

- ▶ Matematicamente, o movimento Browniano pode ser caracterizado por um processo de *Wiener*, que é um processo contínuo no tempo com incrementos independentes. Para cada valor positivo de t , denote o valor do processo por W_t . O processo será caracterizado pelas duas condições seguintes:
 1. Para $0 < s < t$, $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$. $N(\mu, \sigma^2)$ denota a distribuição normal com média μ e variância σ^2 ;
 2. Para $0 \leq s < t \leq u < v$, ou seja, dois intervalos $[s, t]$ e $[u, v]$ não sobrepostos, $W_t - W_s$ e $W_v - W_u$ são variáveis aleatórias independentes.

Movimento Browniano Fracionário

- ▶ No movimento Browniano fracionário (fBm), os incrementos também são normalmente distribuídos – mas não independentes. Para um número H com $0 < H < 1$ em um intervalo de tempo $[s, t]$, $0 < s < t$, o valor do processo $W_t - W_s \sim N(0, (t - s)^H)$. Seja o valor $\delta = t - s$ a escala de observação. O incremento do processo estará relacionado em todas as escalas. Este modelo leva a um processo auto-similar, com dependência de longo prazo.

Movimento Browniano Fracionário

- ▶ O modelo fBm tem sido utilizado para estudar o tráfego em redes de comunicação digital. Uma variação proposta é o movimento Browniano multi-fracionário (mBm), onde ao invés de utilizar-se um número H se utiliza uma função contínua no tempo $H(t)$, chamada função de Hölder, e tem merecido atenção dos pesquisadores.
- ▶ No entanto, Darryl Veich, et al., questionam a qualidade das ferramentas matemáticas disponíveis atualmente para a análise das propriedades multi-fractais do tráfego.

Scalable URL Reference Generator

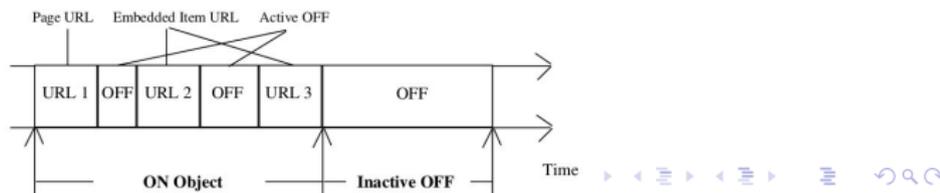
- ▶ Modelos de desempenho para servidores Web podem utilizar ou não características de comportamento do usuário. Modelos baseados na teoria de filas, como o modelo $M/G/1/K*PS$ não consideram o comportamento do usuário nem o conteúdo do servidor. Por outro lado, no modelo *SURGE* o conhecimento do comportamento do usuário e do conteúdo do servidor são utilizados para atingir uma melhor aproximação do tráfego real.

Scalable URL Reference Generator

- ▶ O modelo *SURGE* para geração de tráfego é baseado em um autômato *ON-OFF* que captura o comportamento do usuário. Quando o sistema está no estado *ON*, a sessão está ativa enviando os objetos requisitados na sessão. O intervalo de tempo entre os arquivos enviados durante a sessão é denominado de tempo *active-off*. O tamanho dos arquivos e o número de referências em uma sessão de usuário também é utilizada. As principais variáveis do modelo são:

Scalable URL Reference Generator

- ▶ *Tempo OFF*: É o tempo que o usuário permanece pensando. Normalmente modelado por uma distribuição de Pareto;
- ▶ *Tamanho dos arquivos*: É o tamanho dos objetos transmitidos. Normalmente modelado por uma distribuição de Pareto;
- ▶ *Número de referências*: Número de arquivos transmitidos em uma sessão de usuário. Também modelado normalmente por uma distribuição de Pareto;
- ▶ *Tempo active-off*: É o intervalo de tempo entre os arquivos transmitidos em uma sessão de usuário. Modelada pela distribuição de Weibull;



Scalable URL Reference Generator

- ▶ *Popularidade*: É o número relativo de acessos realizados a um arquivo individual. A popularidade de arquivos em servidores Web segue, via de regra, a lei de Zipf. A lei de Zipf argumenta que se os arquivos forem ordenados do mais popular para o menos popular, então o número de referências a um arquivo P tende a ser inversamente proporcional a sua posição na classificação r , ou $P = kr^{-1}$ para uma constante positiva qualquer k ;

Scalable URL Reference Generator

- ▶ *Localidade temporal*: A localidade temporal assume que, uma vez tendo sido requisitado um arquivo, a probabilidade de que ele seja novamente requisitado no futuro aumenta. Para o estudo desta variável os acessos são armazenados em uma estrutura de pilha. A distância entre os acessos nesta pilha são estudados e modelados comumente com uma distribuição lognormal.
- ▶ Tráfego agregado resultante: auto-similar.

Exercício

- ▶ Escolher um método para geração de uma série temporal autosimilar.
- ▶ Avaliar a qualidade através de:
 1. Inspeção visual da série.
 2. Verificação da função de auto-correlação.
 3. Estimação do parâmetro de Hurst utilizando os métodos disponíveis no pacote fArma (R).