Modelagem e Avaliação de Desempenho

Pós Graduação em Engenharia Elétrica - PPGEE

Prof. Carlos Marcelo Pedroso

2011

Cadeias de Markov

- Em 1907, Andrew Markov iniciou um estudo sobre um modelo onde o resultado de um experimento depende do resultado de um experimento anterior;
- Este processo de modelagem é conhecido atualmente como Cadeias de Markov (*Markov Chain*).

Cadeias de Markov

- Uma cadeia de Markov pode ser descrita da seguinte forma
  - Considere um conjunto de estados $S=\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$
  - O processo inicia-se em um destes estados e se move sucessivamente de um estado para outro;
  - Cada troca é chamada de passo;
  - Se o estado corrente é s_i, então ela se move para o estado s_j com uma probabilidade denotada por p_{ij}, e esta probabilidade não depende dos estados anteriores da cadeia de Markov.
  - As probabilidades p_{ij} são chamadas de probabilidades de transição.

Exemplo

- Suponha que a Terra de Oz foi abençoada com muitas coisa, menos com bom tempo. Eles nunca tem dois dias com com tempo em seguida. Se há um dia bom, é mais provável ter neve ou chuva no próximo dia. Se há neve ou chuva, existe uma chance de haver tempo bom no próximo dia. Suponha a cadeia de Markov que representa a transição destes estados, onde R representa chuva, N representa tempo bom e S representa neve.

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \mathrm{R} & \mathrm{N} & \mathrm{S} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{R} \\ \mathrm{N} \\ \mathrm{S} \end{array} & \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Pode-se escrever uma máquina de estados discreta para representar esta situação

Matriz P

- P é chamada *matriz de transição* e possui algumas propriedades interessantes.
- As linhas representam a probabilidade de transição de um estado para outro.
- Para calcular a probabilidade da cadeia se encontrar no estado j, mas a n passos adiante, pode-se calcular P^n.

Exemplo

- Para o caso do exemplo anterior (previsão do tempo na terra de Oz, temos:

$$\mathbf{P}^1 = \begin{array}{c} \\ \text{Rain} \\ \text{Nice} \\ \text{Snow} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Rain} & \text{Nice} & \text{Snow} \end{array} \\ \begin{pmatrix} .500 & .250 & .250 \\ .500 & .000 & .500 \\ .250 & .250 & .500 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{P}^2 = \begin{array}{c} \\ \text{Rain} \\ \text{Nice} \\ \text{Snow} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Rain} & \text{Nice} & \text{Snow} \end{array} \\ \begin{pmatrix} .438 & .188 & .375 \\ .375 & .250 & .375 \\ .375 & .188 & .438 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{P}^3 = \begin{array}{c} \\ \text{Rain} \\ \text{Nice} \\ \text{Snow} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Rain} & \text{Nice} & \text{Snow} \end{array} \\ \begin{pmatrix} .406 & .203 & .391 \\ .406 & .188 & .406 \\ .391 & .203 & .406 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{P}^4 = \begin{array}{c} \\ \text{Rain} \\ \text{Nice} \\ \text{Snow} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Rain} & \text{Nice} & \text{Snow} \end{array} \\ \begin{pmatrix} .402 & .199 & .398 \\ .398 & .203 & .398 \\ .398 & .199 & .402 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{P}^5 = \begin{array}{c} \\ \text{Rain} \\ \text{Nice} \\ \text{Snow} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Rain} & \text{Nice} & \text{Snow} \end{array} \\ \begin{pmatrix} .400 & .200 & .399 \\ .400 & .199 & .400 \\ .399 & .200 & .400 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\mathbf{P}^6 = \begin{array}{c} \\ \text{Rain} \\ \text{Nice} \\ \text{Snow} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{Rain} & \text{Nice} & \text{Snow} \end{array} \\ \begin{pmatrix} .400 & .200 & .400 \\ .400 & .200 & .400 \\ .400 & .200 & .400 \end{pmatrix} \end{array}$$

Matriz P

- Para se calcular a probabilidade de se encontrar no estado j dado um estado i, n passos adiante, podemos calcular:

$$\mathbf{u}^{(n)} = \mathbf{u}\mathbf{P}^n$$

- Exemplo: suponha que a probabilidade inicial para o clima na terra de Oz seja de (1/3, 1/3 e 1/3) e deseja-se fazer a previsão do tempo para 3 dias. Neste caso,

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{(3)} = \mathbf{u}\mathbf{P}^3 &= \begin{pmatrix} 1/3, & 1/3, & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} .406 & .203 & .391 \\ .406 & .188 & .406 \\ .391 & .203 & .406 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} .401, & .188, & .401 \end{pmatrix} .\end{aligned}$$

Exercício

Considere três grandes universidades americanas, Harvard, Darmouth e Yale. Suponha que os filhos de ex-alunos Harvard tem 80% de chance de estudar na mesma escola e os demais estudam em Yale. Suponha que 40% dos filhos de ex-alunos de Yale estudam também em Yale e os demais dividem-se igualmente entre Darmouth e e Harvard. Suponha que os filhos de ex-alunos de Darmouth tem 70% de chance de estudar em Darmouth, enquanto 20% entram em Harvard e 10% em Yale.

1) Encontre a matriz P.

2) Encontre a probabilidade de que um neto de um ex-aluno de Harvard estude em Darmouth.

3) Encontre a probabilidade de que um bisneto de um ex-aluno de Darmouth estude em Yale.

$$
\mathbf{P} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \mathrm{H} & \mathrm{Y} & \mathrm{D} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{H} \\ \mathrm{Y} \\ \mathrm{D} \end{array} & \begin{pmatrix} .8 & .2 & 0 \\ .3 & .4 & .3 \\ .2 & .1 & .7 \end{pmatrix} \end{array}
$$

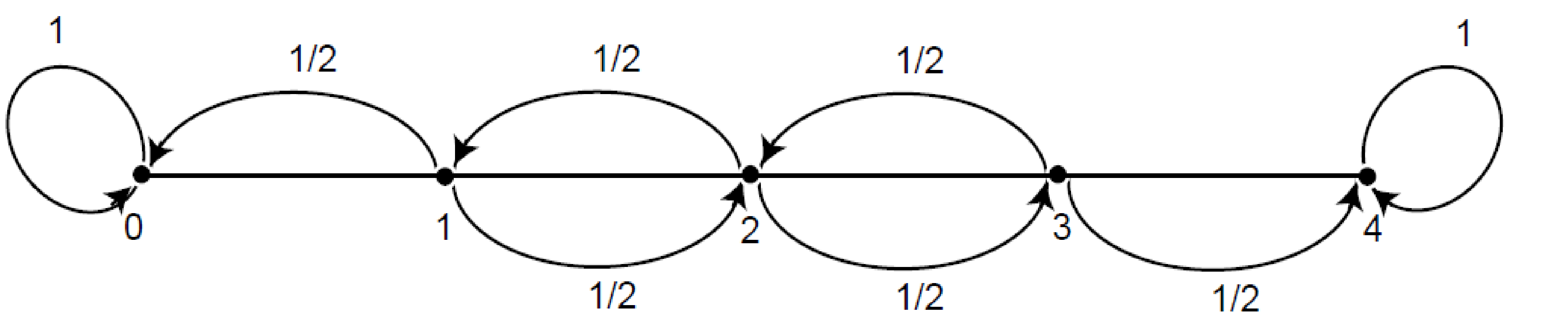
Cadeias de Markov Absorventes

Considere uma cadeia de Markov onde existem estados onde não é possível realizar a transição para nenhum outro estado.

- Este estado é denominado estado absorvente.
- Um estado absorvente apresenta $p_{ij} = 1$.
- Esta é uma variação especial das cadeias de Markov.
- Em uma cadeia de Markov absorvente, o número de passos até atingir o estado absorvente é chamado transiente.

Cadeias de Markov Absorventes

- Exemplo. Um bêbado caminha na rua. Cada número de 1 a 3 representa um quarteirão, enquanto o número 0 representa a casa dele e o número 4 representa o bar.
- Escreva a matriz P correspondente.



Cadeias de Markov Absorventes

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Cadeias de Markov Absorventes

- As questões que surgem são:
  - Qual a probabilidade de que o processo seja eventualmente absorvido?
  - Na média, quantos passos serão dados até que o processo seja absorvido?
  - Na média, quantas vezes um dado estado transiente será visitado até que o processo seja absorvido?
- As respostas a estas questões dependem do estado inicial e da matriz de transição.

Cadeias de Markov Absorventes

- Considere a matriz P com r estados absorventes (ABS) e t estados transientes (TR). A matriz P canônica é formada conforme abaixo:
  - I é uma matriz identidade r por r.
  - O é uma matriz 0 r por t.
  - R é uma matriz t por r.
  - Q é uma matriz t por t.

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ \text{TR.} \\ \text{ABS.} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{TR.} & \text{ABS.} \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{Q} & \mathbf{R} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array} \right) \end{array}$$

Exemplo

- No exemplo do bêbado,

$$
\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\
0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\
0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ \text{TR.} \\ \text{ABS.} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} \text{TR.} & \text{ABS.} \end{array} \\
\left(\begin{array}{c|c}
\mathbf{Q} & \mathbf{R} \\ \hline
\mathbf{0} & \mathbf{I}
\end{array}\right)
\end{array}
$$

$$
\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc|cc}
0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\
1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\
0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)
\end{array}
$$

Cadeias de Markov Absorventes

- Para uma cadeia de Markov absorvente, a matriz $N=(I-Q)^{-1}$ é chamada matriz fundamental para P.
  - Um elemento n_{ij} de N fornece o número esperado de vezes que o processo estará no estado transiente s_j caso o estado inicial seja o estado s_i

Cadeias de Markov Absorventes

- Exemplo:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$\mathbf{I} - \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} .$$

$$\mathbf{N} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Iniciando-se no estado 2, o número médio de vezes em que o sistema permanece nos estados 1, 2 e 3 será, respectivamente, 1, 2 e 1.

Cadeias de Markov Absorventes

- Outro fator importante a se considerar é o número médio de passos para a absorção.
- Seja t número de passos até a absorção, dado que o estado inicial seja s_i e t ser o vetor coluna que armazena o número médio de passos para absorção a partir dos estados transientes e **c** é um vetor coluna com todos os elemtos iguais a 1.
  - Então:

$$\mathbf{t} = \mathbf{N}\mathbf{c}$$

- Calcular para o exemplo anterior.

Cadeias de Markov Absorventes

- Um analista pode estar interessado também em calcular a probabilidade do sistema encerrar em um dos estados absorventes.
- Neste caso, se b_{ij} representar a probabilidade da cadeia ser absorvida por um estado s_j caso o estado inicial seja um estado transiente s_i, então a matriz B (t por r) será dada por:

$$\mathbf{B} = \mathbf{NR}$$

Resposta

$$\mathbf{N} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \end{array} .$$

$$\begin{aligned} \mathbf{t} = \mathbf{Nc} &= \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Cadeias de Markov Absorventes

- Um analista pode estar interessado também em calcular a probabilidade do sistema encerrar em um dos estados absorventes.
- Neste caso, se b_{ij} representar a probabilidade da cadeia ser absorvida por um estado s_j caso o estado inicial seja um estado transiente s_i, então a matriz B (t por r) será dada por:

$$\mathrm{B} = \mathrm{NR}$$

Exemplo

- No exemplo do bêbado:

$$\mathbf{R} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array} .$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{NR} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \end{array} .$$

Cadeias de Markov Ergódicas

- Uma cadeia de Markov é chamada de ergódica se é possível ir de um estado para qualquer outro da cadeia (não necessariamente em um único passo).
  - Alguns autores chamam este tipo de cadeia de Markov de irredutível.
  - Seja P a matriz de transição de uma cadeia de Markov. Diz-se que P é regular se alguma potência de P contêm somente entradas positivas, Diz-se que a cadeia de Markov é regular se sua matriz de transição é regular.
  - Uma cadeia de Markov absorvente não pode ser regular

Cadeias de Markov Ergódicas

- Suponha a matriz de transição de probabilidade dada por

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \mathbf{P} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \end{array}$$

A cadeia é ergódica

– No entanto, não é regular (se o número de passo é ímpar não é possível atingir um dado estado)

Outro exemplo

$$
\mathbf{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\
0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\
0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

- A cadeia é ergódica e regular?
- E a cadeia do exemplo do clima na terra de Oz?

Cadeias de Markov Regulares

- Seja P uma matriz de transição para uma cadeia de markov regular. Então, conforme n tende a infinito, as potências P^n se aproximam da matriz limite W em que todas as linhas são iguais (vetor w). O vetor w é um vetor de probabilidade onde todos os componentes são positivos e sua soma é igual a 1.
  - Ver exemplo da terra de Oz.

Cadeias de Markov Regulares

- No exemplo,

$$
\mathbf{P}^6 = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \mathrm{R} & \mathrm{N} & \mathrm{S} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{R} \\ \mathrm{N} \\ \mathrm{S} \end{array} & \begin{pmatrix} .4 & .2 & .4 \\ .4 & .2 & .4 \\ .4 & .2 & .4 \end{pmatrix} \end{array}
$$

- De modo geral,

$$
\mathbf{W} = \lim_{n \to \infty} \mathbf{P}^n \ ,
$$

Cadeias de Markov Regulares

- Utilizando o resultado, é possível determinar o valor limite fazendo:

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1$$

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} .$$

Cadeias de Markov Regulares

- De onde se obtem

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 + w_3 &= 1 \ , \\ (1/2)w_1 + (1/2)w_2 + (1/4)w_3 &= w_1 \ , \\ (1/4)w_1 + (1/4)w_3 &= w_2 \ , \\ (1/4)w_1 + (1/2)w_2 + (1/2)w_3 &= w_3 \ . \end{aligned}$$

- Resolvendo o sistema, obtemos:

$$\mathbf{w} = (\ .4 \quad .2 \quad .4\ )$$

Cadeias de Markov Regulares

- Utilizando o resultado, é possível determinar o valor limite fazendo:

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1$$

$$\begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} .$$

Cadeias de Markov

- Para uma cadeia de Markov Ergodica, existe um único vetor w tal que wP=w, com w positivo. Qualquer linha do vetor é tal que vP=v é múltiplo de w. Qualquer coluna do vetor x tal que Px=x é um vetor constante.

Cadeias de Markov Ergodica

- Para uma cadeia de Markov Ergodica,

$$P\left(|H_j^{(n)} - w_j| > \epsilon\right) \to 0$$

  – O que significa que a longo prazo a permanência em cada estado é dada pelo vetor W, independentemente do estado inicial

Cadeias de Markov - Simulação

```
SSRNRNSSSSSSNRSNSSRNSRNSSSNSRRRNSSSNRRSSSSNRSSNSRRRRRRNSSS
SSRRRSNSNRRRRSRSRNSNSRRNRRNRSSNSRNRNSSRRSRNSSSNRSRRSSNRSNR
RNSSSSNSSNSRSRRNSSNSSRNSSRRNRRRSRNRRRNSSSNRNSRNSNRNRSSSRSS
NRSSSNSSSSSSNSSSNSNSRRNRNRRRRSRRRSSSSNRRSSSSRSRRRNRRRSSSSR
RNRRRSRSSRRRRSSRNRRRRRRNSSRNRSSSNRNSNRRRRNRRRNRSNRRNSRRSNR
RRRSSSRNRRRNSNSSSSSRRRRSRNRSSRRRRSSSRRRNRNRRRSRSRNSNSSRRRR
RNSNRNSNRRNRRRRRRSSSNRSSRSNRSSSNSNRNSNSSSNRRSRRRNRRRRNRNRS
SSNSRSNRNRRSNRRNSRSSSRNSRRSSNSRRRNRRSNRRNSSSSSNRNSSSSSSSNR
NSRRRNSSRRRNSSSNRRSRNSSRRNRRNRSNRRRRRRRRRNSNRRRRRNSRRSSSSN
SNS
```

State	Times	Fraction
R	217	.413
N	109	.208
S	199	.379

Exercício

- Suponha que um experimento possui a matriz P como segue:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} .5 & .5 \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

  - O valor de p é desconhecido. No entanto, repetindo-se muitas vezes o experimento, 20% das vezes o sistema encontran-se no estado 1 e 80% no estado 2.
  - Encontre o valor p.

Número médio de passos médio para primeira passagem e recorrência

- Duas medidas quantitativas de interesse para cadeias de Markov ergódicas são:
  - Número médio de passos para retornar a um determinado estado;
  - Número médio de passos para ir de um estado para outro.

Número médio de passos para primeira passagem

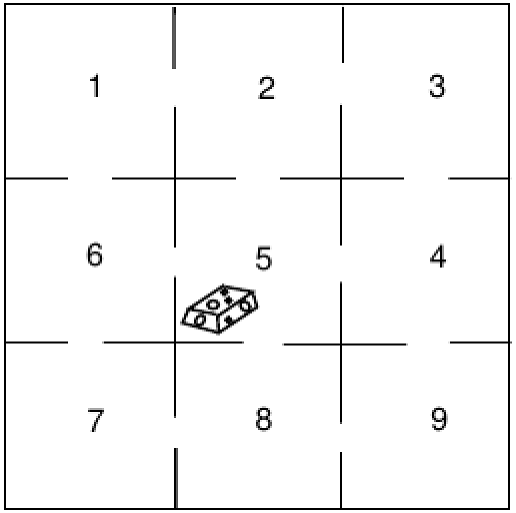
- Uma maneira de analisar o problema é o seguinte:
  - Suponha que a cadeia de Markov em estudo é ergódica (qualquer estado pode ser atingido a partir que qualquer estado inicial).
  - Para determinar o número médio de passos para atingir um determinado estado i, basta fazer este estado um estado absorvente.
  - Depois, apenas é necessário fazer o estudo com a teoria de cadeias de Markov absorventes.

Número médio de passos para primeira passagem

- Uma maneira de analisar o problema é o seguinte:
  - Suponha que a cadeia de Markov em estudo é ergódica (qualquer estado pode ser atingido a partir que qualquer estado inicial).
  - Para determinar o número médio de passos para atingir um determinado estado i, basta fazer este estado um estado absorvente.
  - Depois, apenas é necessário fazer o estudo com a teoria de cadeias de Markov absorventes.

Tempo médio para primeira passagem

- Exemplo: Labirinto



Número médio de passos para primeira passagem

- Exemplo: Labirinto

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\
\mathbf{P} = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} &
\left(\begin{array}{ccccccccc}
0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\
1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\
0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\
1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\
0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0
\end{array}\right)
\end{array}
$$

Como podemos determinar se o rato é mais esperto ?

Número médio de passos para primeira passagem

- Exemplo: Para calcular o tempo médio para atingir o estado 5, fazemos este estado absorvente:

$$
\mathbf{P} = \begin{array}{c|cccccccc|c}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 & 7 & 8 & 9 & 5 \\
\hline
1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\
3 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\
6 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\
7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\
8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\
9 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\
\hline
5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}
$$

Número médio de passos para primeira passagem

- Exemplo: Calculamos a matriz fundamental N

$$\mathbf{N} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 14 & 9 & 4 & 3 & 9 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 14 & 6 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 9 & 14 & 9 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 14 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 2 & 14 & 6 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 9 & 14 & 9 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 6 & 14 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 9 & 3 & 4 & 9 & 14 \end{pmatrix}$$

- Iniciando-se no estado 1, o número médio de vezes em que o sistema permanece nos estados 1, 2, 3 , … etc., será, respectivamente, 14, 9, 4.

Número médio de passos para primeira passagem

- Exemplo: Labirinto

$$\mathbf{t} = \mathbf{N}\mathbf{c}$$

$$\mathbf{N}\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 6 \\ 5 \\ 5 \\ 6 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- Iniciando-se no estado 1, o sistema leva em média 6 passos para atingir o estado 5 (absorvente). Iniciando-se no estado 2, o sistema leva 5 passos para atingir o estado absorvente e assim por diante.

Número médio de passos para recorrência

- Qual será o número médio de passos em que um estado será visitado novamente?
  - Dado um estado s_i, qual será o número médio de passos que o sistema irá levar para se encontrar novamente no estado s_i no futuro?
  - Dado o vetor w, com a probabilidade limite, basta calcular $1/w_i$ e teremos o número médio de passos para visitar o estado

Número médio de passos para recorrência

- No exemplo do labirinto, pode ser calculado w.P=w (acrescentado somatório de w_i=1), obtendo-se:

$$\mathbf{w} = \left(\frac{1}{12} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{12} \right)$$

- De onde pode ser deduzido o vetor r (número médio de passsos para recorrência):

$$\mathbf{r} = \left(12 \quad 8 \quad 12 \quad 8 \quad 6 \quad 8 \quad 12 \quad 8 \quad 12 \right)$$

Cadeias de Markov Ergódicas em *tempo contínuo*

- *Ergodic Continous Time Markov Chain*
- A novidade é considerar a variável *tempo.*
- Neste caso, o tempo de permanência em cada transição é considerado como exponencialmente distribuído (esta é uma *exigência,* <u>hipótese básica</u> para validade deste raciocínio).
- Considere que o parâmetro que determina a taxa de transição do estado i para o próximo estado j seja dado por q_{ij}

Cadeias de Markov Ergódicas em *tempo contínuo*

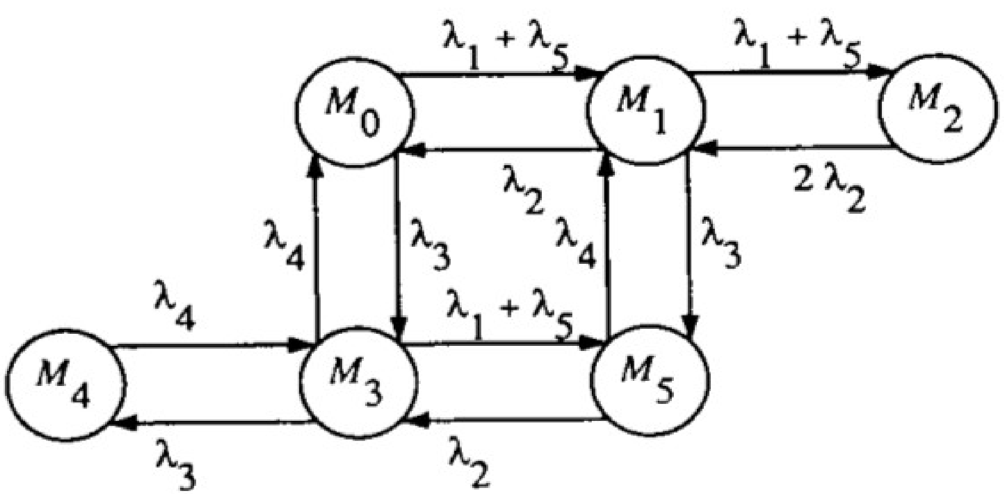
- Desta forma, podemos definir: $\Pi Q = 0, \sum_{i=1}^{S} \pi_i = 1$
  - Onde Q é a matriz de transição de taxas
  - O vetor Π é o vetor de estado estacionário
  - Para o vetor Q, o elemento q_{ii} (diagonal principal) é obtido fazendo-se o complemento do somantório dos demais elementos da linha (ver exemplo em sala).

Cadeias de Markov Ergódicas em *tempo contínuo*

- *Exemplo: Suponha dois servidores operando em cluster. Um servidor falha com uma taxa μ, exponencialmente distribuída (ou seja, o tempo médio entre falhas é dado por 1/μ). A taxa de reparo é dada por λ (ou seja, o tempo médio de reparo é dado por 1/λ). Suponha que as instalações de reparo podem trabalhar em dois servidores simultaneamente.*
  - *Deseja-se descobrir expressões para o estado estacionário.*
  - *Qual a probabilidade de falha total do sistema?*
  - *Ver solução apresentada em sala*

Cadeias de Markov Ergódicas em *tempo contínuo*

- *Exercício: Suponha um sistema com diagrama de transição de estados a seguir:*



  – *Suponha que as transições possuem distribuição exponencial e λ_i representa as taxas correspondentes. Calcule as probabilidades de estado estacionário.*

Cadeias de Markov Ergódicas em *tempo contínuo*

- *Exemplo: Suponha dois servidores operando em cluster. Um servidor falha com uma taxa μ, exponencialmente distribuída (ou seja, o tempo médio entre falhas é dado por 1/μ). A taxa de reparo é dada por λ (ou seja, o tempo médio de reparo é dado por 1/λ). Suponha que as instalações de reparo podem trabalhar em dois servidores simultaneamente.*
  - *Deseja-se descobrir expressões para o estado estacionário.*
  - *Qual a probabilidade de falha total do sistema?*
  - *Ver solução apresentada em sala*