

TE144 - PROF. C.M. PEDROSO

NOTAS DE AULA

Notas de aula da disciplina TE144 - Prof. Carlos Marcelo Pedroso

O objetivo deste material é fornecer um resumo dos temas relacionados com fundamentos de circuitos elétricos para disciplina de Eletricidade Aplicada, que é ministrada no primeiro ano do curso de Engenharia Civil da Universidade Federal do Paraná. O conteúdo se refere a aproximadamente 50% do total da disciplina. Se você encontrar erros neste material, por favor, me avise (pedroso@eletrica.ufpr.br) O tema “instalações elétricas de baixa tensão” propriamente dito não é tratado neste material e deve ser estudado em outras referências.

Capítulo 1

Materiais Elétricos

1.1 Introdução

O estudo de Materiais Elétricos constitui-se em um tema básico para que sejam estudados tópicos de Instalações Elétricas, Projeto de Máquinas, Eletrônica Industrial, entre outras.

O objetivo básico do tema é permitir que um Engenheiro possa analisar as propriedades dos materiais de que são construídos equipamentos e componentes eletrônicos, que fornece subsídio para que o Engenheiro possa raciocinar em termos de matérias primas e, eventualmente, de sua adaptação a novas condições de serviço ou de sua substituição por outros mais adequados.

Nesta aula serão abordados os tópicos básicos a respeito de Materiais Elétricos, de forma a introduzir os seguintes temas:

1. Materiais Condutores;
2. Materiais Semicondutores;
3. Materiais Isolantes;

Também é de interesse especial o estudo dos materiais magnéticos, que podem ser divididos em materiais ferromagnéticos, diamagnéticos e paramagnéticos.

Os materiais podem ser caracterizados por diversas métricas, destacando-se a Condutibilidade (térmica, elétrica), a Ductibilidade (capacidade de ser transformada em fios), a Maleabilidade (ser maleável, e ter a capacidade de ser transformado em uma lâmina), a Elasticidade (ser esticado e voltar ao normal) e a Tenacidade (resistência à tração).

Os materiais podem ser classificados com base no valor da resistividade do material. A resistividade é a capacidade de um corpo qualquer se opor a passagem de corrente elétrica quando existe uma diferença de potencial aplicada a ele. O critério de classificação dos materiais com base em sua resistividade é dada por:

1. Condutores: 10^{-2} a $10\Omega mm^2/m$

Tabela 1.1: Sumário das características dos principais metais

Nome do metal	Resistividade (ρ)	Nome do metal	Resistividade (ρ)
Ouro	0.0240	Mercúrio	0.960
Prata	0.0162	Chumbo	0.205
Cobre	0.0169	Ferro	0.098
Alumínio	0.0262	Platina	0.100
Níquel	0.072	Tungstênio	0.055
Zinco	0.059	Estanho	0.114

2. Semicondutores: 10 a $10^{12} \Omega mm^2/m$
3. Isolantes: 10^{12} a $10^{24} \Omega mm^2/m$

1.2 Materiais Condutores

Do ponto de vista prático, a maior parte dos materiais condutores é formada por *metais*. Isso se dá pela estrutura atômica dos metais, em que os átomos da camada de valência podem fluir livremente de átomo para outro. Quando uma corrente elétrica é estabelecida em um condutor metálico, um número muito elevado de elétrons livres passa a se deslocar neste condutor. Neste movimento, os elétrons podem colidir entre si e com os átomos que constituem o material, encontrando certa dificuldade para se deslocar - no entanto esta resistência oferecida à passagem de corrente é muito pequena. Deve ser destacado que existem não metais que são bons condutores de eletricidade, como o grafite, a água salgada ou qualquer material em estado de plasma.

Os principais metais são o cobre, alumínio, ferro, prata, ouro, titânio, zinco, estanho, chumbo. Na natureza, os metais são obtidos unidos à outros materiais (oxigênio, enxofre, sais e ácidos) em forma de minério. Processos de metalurgia podem separar os diversos componentes.

Também é de particular interesse o estudo de ligas metálicas, formadas por diversos metais, devido à melhoria em aspectos como a resistência mecânica. Os metais apresentam boas características de condutividade elétrica e também boa condutividade térmica, além de apresentar boa resistência mecânica. Em particular, o cobre apresenta características que lhe garante posição de destaque entre os materiais condutores.

A Tabela 1.1 mostra a resistividade para os principais metais utilizados como condutores. A escolha do material mais adequado para uma aplicação deve satisfazer simultaneamente uma série de requisitos quanto à resposta a esforços mecânicos, térmicos, magnéticos, luminosos, entre outros. Os metais mais utilizados na eletrônica são:

cobre pequena resistividade, boas características mecânicas, baixa oxidação, fácil deformação a quente - o bronze e o latão são as ligas mais usadas;

alumínio é o segundo metal mais usado depois do cobre, tendo características elétricas e mecânicas piores do que este mas com um custo menor;

chumbo é utilizado principalmente em soldas, sendo sensível a vinagre, cal e materiais orgânicos em apodrecimento - é um produto venenoso;

prata seu principal uso é em peças de contato;

ouro bastante resistente à oxidação por sua estrutura altamente estável, é utilizado principalmente em peças de contato.

Metais puros tem uma estrutura cristalina perfeita, o que reduz a sua resistividade. A inserção de impurezas, mesmo em pequenas quantidades, alteram a estrutura aumentando a resistividade do material. Um aumento de resistividade também ocorre quando se realiza uma liga de dois ou mais metais. Desta forma, as ligas possuem valores próprios de resistividade e geralmente apresentam uma resistividade maior do que a dos seus componentes - fato que se deve à alteração da estrutura cristalina do produto resultante.

Um material condutor não metálico que merece destaque por sua utilização é o carvão. O carvão é obtido a partir de grafita natural ou antracito (reduzido a pó e moldado no formato desejado), que possui características aceitáveis de condutividade e é utilizado em peças de contato, com destaque para as escovas em motores onde o problema de faiscamentos intensos pode exigir o uso de um material com boas características de resistência térmica, o que é o caso do carvão.

1.3 Semicondutores

São sólidos cristalinos de condutividade intermediária. Os principais materiais em uso atualmente são o Silício e o Germânio - mas já foram utilizados o Selênio e o Carbono (em certas condições). A característica comum a todos os semicondutores é que todos eles são tetravalentes, possuindo o Silício uma configuração eletrônica s^2p^2 .

A condutividade de um semicondutor é influenciada por eventuais perturbações de suas condições cristalinas, sobretudo pela presença de impurezas. A inserção de impurezas pode ser utilizada para criar materiais abundantes em elétrons livres ou materiais com vazios de elétrons livres (o material “prende” elétrons ou “fornece” elétrons ao semicondutor), em um processo chamado *dopagem*, criando respectivamente materiais N e P. A associação do Silício (tetravalente) com o Antimônio (pentavalente) irá fazer com que apenas 4 dos 5 elétrons do Antimônio participem das ligações de valência, ficando livre um dos elétrons em um movimento próprio de rotação, não estando fixo em sua posição poderá ser deslocado com uma facilidade maior do que qualquer outro elétron, criando a dopagem N. Uma outra situação, em que podem ser acrescentados ao Silício átomos com Índio, com 3 elétrons na camada de valência, fará com que uma das ligações do silício ficará com falta de um elétron, que provocará

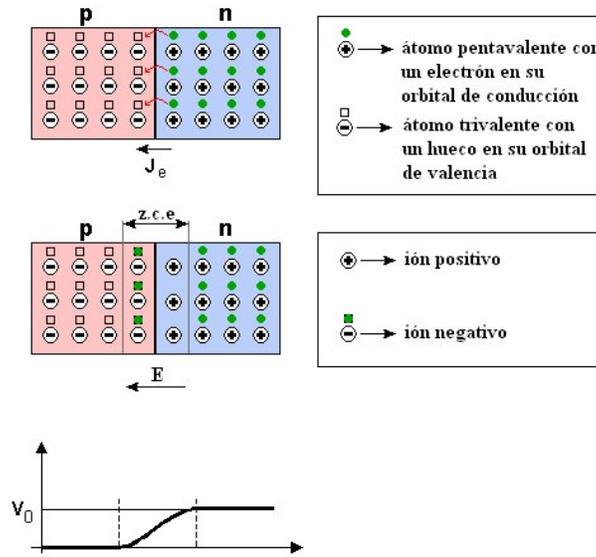


Figura 1.1: Operação do diodo [Fonte: Wikipedia]

uma re-estruturação das ligações dos átomos vizinhos, produzindo uma lacuna (material P).

Materiais N e P podem ser combinados de modo a obter-se controle sobre a corrente elétrica, criando dispositivos como diodos e transistores. Um diodo é formado por uma união entre materiais P e N de modo a permitir a passagem de corrente apenas caso o componente seja polarizado em um sentido. Um transistor bipolar é obtido a partir de uma junção NPN ou PNP de modo a permitir o controle do fluxo de corrente a partir de um pino de controle.

As junções entre os materiais N e P criam campos elétricos, que tende a separar os elétrons e as lacunas e este efeito é crucial para a operação dos dispositivos criados a partir de materiais semicondutores. Além disso, a diferença de densidade entre a quantidade de impurezas é utilizada para produzir materiais com diferentes finalidades. Adicionalmente, a dopagem cria resistências elétricas que podem ser controladas dinamicamente pela aplicação de campos elétricos - um grande número de dispositivos semicondutores podem ser encontrados, por exemplo, diodos (zener, túnel, scotch, led, varicap, etc.) transistores (bipolares, FET, MOSFET, etc.).

A Figura 1.1 mostra um diodo composto por uma junção PN, ilustrando o caso de uma polarização direta, que leva o dispositivo à condução (desde que a tensão da fonte seja suficiente para romper a barreira de potencial formada pela recombinação dos materiais NP na junção).

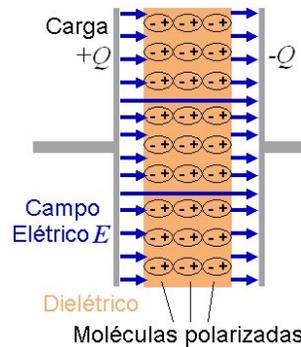


Figura 1.2: Elemento dielétrico sob carga [Fonte: Wikipedia]

1.4 Isolantes ou Dielétricos

Os dielétricos oferecem uma considerável resistência à passagem de cargas elétricas. Exemplos de materiais dielétricos são a borracha, o silicone, o vidro, a cerâmica, o ar, o papel e a madeira.

O que torna um material isolante é a ausência de elétrons livres a uma determinada temperatura. A propriedade de isolante é mantida até determinados níveis de diferença de potencial aplicada ao material - acima deste limite o material irá tornar-se um condutor de eletricidade.

Um dielétrico submetido a uma diferença de potencial será polarizado devido à presença do campo elétrico, comportando-se de forma semelhante a um capacitor de placas paralelas, ilustrado na Figura 1.2. A polarização do dielétrico leva a um aumento de temperatura, resultante de um consumo de energia. Os dielétricos são classificados em relação ao tipo de polarização apresentando os materiais dielétricos características bastante diversas. Quando o dielétrico é submetido a uma tensão existirá uma pequena corrente circulando em um circuito fechado, que deverá ser estudada dependendo da aplicação em questão. As condições de resposta como temperatura, rigidez, envelhecimento são de particular importância.

A *rigidez dielétrica* de um material é o valor limite de *tensão* aplicado sobre o material a partir de que os átomos que compõem o material se ionizam e o material dielétrico deixa de funcionar como um isolante. O valor da rigidez dielétrica depende de diversos fatores como: temperatura, espessura, tempo de aplicação da diferença de potencial, taxa de crescimento da tensão; a pressão é fator importante para gases. A Tabela 1.2 mostra a rigidez dielétrica de vários materiais.

Os materiais dielétricos podem ser sólidos, líquidos ou gasosos. Os dielétricos sólidos são provavelmente o tipo mais utilizado na engenharia elétrica pois muitos sólidos são bons isolantes. Alguns exemplos incluem a porcelana, vidro e plásticos. Ar e hexafluorido sulfúrico são dois dielétricos gasosos comumente utilizados.

Material	Rigidez dielétrica (kV/mm)
Ar (1 atm)	3
Vidro	35
Papel	20
Oleo	4
Borracha	25

Tabela 1.2: Rigidez dielétrica de vários materiais

Em um dielétrico real, as misturas de estruturas de matérias-primas levam à presença simultânea de diversas das formas de polarização possíveis. O circuito equivalente é em essência um circuito capacitivo com os seguintes elementos:

- capacitância C_0 e carga no vácuo Q_0
- capacitância C_e e carga na polarização eletrônica Q_e
- capacitância C_i e carga na polarização iônica Q_i
- capacitância C_d e carga na polarização dipolar Q_d
- capacitância C_s e carga na polarização estrutural Q_s

A *polarização eletrônica* é proveniente de um deslocamento elástico dos elétrons ligados ao núcleo do átomo pela ação de um campo elétrico externo. A *polarização iônica* é uma característica dos sólidos devido ao deslocamento de íons - lembro que um íon é um átomo que ganhou ou perdeu elétrons na camada de valência. A *polarização dipolar* se destaca como sendo a orientação espacial de conexões das moléculas, havendo possibilidade de re-organização molecular quando o dielétrico é submetido a uma diferença de potencial. A *polarização estrutural* é a orientação de estruturas complexas de material perante a ação de um campo externo, aparecendo devido a um deslocamento de íons e de dipolos, na presença de aquecimentos. As polarizações estrutural e dipolar apresentam grande sensibilidade à temperatura.

A carga Q_0 , que um capacitor possui no vácuo e a carga eletrônica Q_e , resultante da polarização eletrônica, estão sempre presentes. As demais polarizações (iônica, estrutural e dipolar) dependem do tipo de dielétrico. A constante dielétrica ε de um dielétrico é dada por

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\kappa_e + 4\pi\kappa_d + 4\pi\kappa_s, \quad (1.1)$$

onde κ_e , κ_d e κ_s são as suscetibilidades elétricas que se originam nas polarizações respectivas.

O comportamento dos materiais dielétricos mais utilizados pode deve ser objeto de discussão detalhada, normalmente realizada em função da constante dielétrica e das propriedades mecânicas dos materiais - será abordado em aulas futuras.

1.5 Materiais Magnéticos

Os materiais podem ser classificados magneticamente em três grandes grupos: os materiais ferromagnéticos, diamagnéticos e paramagnéticos.

Os materiais ferromagnéticos caracterizam-se por uma magnetização espontânea, que é totalmente independente de campos magnéticos externos. A grandeza desta magnetização depende da temperatura (a partir de uma temperatura crítica o material passa de ferromagnético a diamagnético).

A permeabilidade magnética μ é dada por $\mu = H/B$, sendo B a indução magnética por unidade de superfície e H a intensidade de campo no interior do material. Os materiais ferromagnéticos apresentam valores de μ muito maiores que a unidade. Materiais neste grupo são o ferro, cromo, o cobalto, entre outros e suas respectivas ligas.

Materiais diamagnéticos são os materiais nos quais o valor de $\mu < 1$, havendo neste grupo metais (cobre, bismuto, ouro), gases inertes, bem como a grafita. Nestes materiais, sob a ação de um campo magnético, os elétrons que giram em torno de seu próprio eixo vão se ajustando, liberando durante este ajuste um momento magnético dirigido contrariamente ao campo de magnetização aplicado, enfraquecendo o próprio campo.

O paramagnetismo representa materiais com μ próximo a unidade - ex. alumínio, platina, certos sais de cobalto, etc.

É de particular interesse o estudo destes materiais, principalmente por sua aplicação em transformadores, de modo a obter técnicas para reduzir as resistências parasitas em núcleos de materiais ferromagnéticos, com destaque para o estudo dos núcleos laminados de modo a dificultar a formação de correntes elétricas e a permitir a condução de campos eletromagnéticos.

1.6 Exercícios

Exercício 1: Quais os dois principais mecanismos que proporcionam a condução de corrente em materiais? Quais as características dos materiais que determinam a maior ou menor facilidade de condução?
□

Exercício 2: Considere dois condutores distantes entre si em 10cm separados apenas por ar. Qual a tensão máxima pode ser aplicada entre os condutores? □

Exercício 3: Compare o cobre e o alumínio como condutores, analisando resistividade, peso e custo. Se a utilização do alumínio é

aparentemente vantajosa, por que os fios de cobre são tão utilizados?

Exercício 4: Porque a inserção de um dielétrico entre as placas de um capacitor provoca o aumento da capacitância?

Exercício 5: Quais são os três tipos de polarização de dielétricos? Compare suas características.

Exercício 6: Quais as diferenças nas bandas de energia dos condutores semicondutores e isolantes?

Exercício 7: Durante a construção de um prédio, uma parede encostou na linha de alimentação da rede de alta tensão. Assinale a alternativa que indica uma possível linha de ação tomada pelo Engenheiro responsável:

- a) Um funcionário com botas de borracha pode afastar a linha de transmissão do prédio e as atividades podem continuar.
- b) Pode ser utilizada uma vara de madeira seca para afastar a linha de transmissão e as atividades podem continuar.
- c) As atividades devem ser paralisadas e a companhia de energia deve ser chamada.
- d) As atividades podem continuar sem prejuízo à segurança, pois o tijolo e o concreto são materiais isolantes.
- e) As atividades podem continuar desde que o disjuntor na entrada do prédio seja desligado.

Capítulo 2

Circuitos Básicos

2.1 Introdução

A matéria é constituída por átomos, que por sua vez são compostos por 3 partículas fundamentais. Estas partículas são os prótons, com carga positiva, os elétrons, com carga negativa e os neutrons, sem carga alguma. Quando um material possui um desbalanceamento em relação ao número de prótons e elétrons ele estará carregado positiva ou negativamente. Normalmente, representamos por Q uma carga constante (não varia em função do tempo) e por q uma carga variável no tempo.

Corpos com cargas semelhantes repelem-se, enquanto corpos com cargas diferentes atraem-se devido ao campo elétrico. A força F de atração ou repulsão entre duas cargas punctiformes, q_1 e q_2 , é diretamente proporcional ao produto das cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância d entre elas,

$$F = k \frac{|q_1 q_2|}{d^2}, \quad (2.1)$$

onde k é uma constante dada por $k = 10^{-7} c^2$ e c é a velocidade da luz no vácuo ($c = 2,99810^8 m.s^{-1}$).

A unidade fundamental de carga é chamada Coulomb, que é definida como segue:

“duas pequenas partículas, identicamente carregadas e separadas por um metro, no vácuo, se repelem uma a outra com uma força de $10^{-7} c^2$ Newtons, possuem uma carga de um Coulomb”

Existe um campo elétrico E num dado ponto, se uma força F de origem elétrica atuar sobre um corpo carregado com carga q , colocado neste ponto, sendo uma grandeza vetorial. Assim,

$$E = \frac{F}{q} \quad (2.2)$$

de forma que E possui a mesma orientação de F (Figura 2.1). A Figura 2.2 mostra a interação entre as linhas de campo elétrico de duas cargas carregadas próximas.

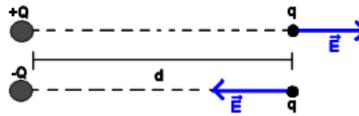


Figura 2.1: Campo Elétrico

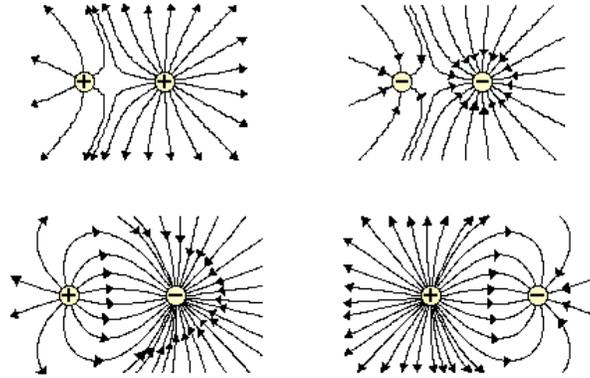


Figura 2.2: Campo Elétrico

Na física, a diferença de potencial é a energia necessária para mover um objeto de um ponto para outro. Em eletricidade, é a energia necessária para mover uma carga elétrica de um ponto a outro. Em outras palavras, a diferença de potencial elétrica entre dois pontos é responsável pela movimentação de elétrons. O potencial elétrico mede a força que experimenta uma carga elétrica dentro de um campo elétrico, expressa na lei de Coulomb, pelo tanto a tensão é a tendência que tem uma carga de ir de um ponto a outro. A corrente é definida como a variação da carga através de uma área ao longo do tempo,

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (2.3)$$

2.2 Elementos Básicos de Circuitos Elétricos

É necessário realizar a leitura do roteiro “Materiais Elétricos” antes de iniciar esta seção.

Resistência

A resistência de um elemento é uma medida da oposição de um material ao fluxo de corrente elétrica. A resistência de um elemento depende da resistividade do material que a compõe, do seu comprimento e da área da seção, e pode ser dado por

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad (2.4)$$

onde

R Resistência, dada em Ohms (Ω);

A Área da seção (m^2);

l Comprimento (m);

ρ Resistividade do material (Ωm).

Podem ser encontrados resistores com valor de resistência fixa ou variável. Um resistor não armazena energia, dissipa-a na forma de calor.

Lei de Ohm: a queda de tensão no resistor é igual ao valor da resistência R multiplicada pela corrente i ,

$$v = R \cdot i \quad (2.5)$$

A Condutância, G , é o inverso da resistência e sua unidade é o Siemens (S); é a medida da facilidade com que o material conduz eletricidade.

A potência P dissipada em um resistor é igual ao produto da tensão pela corrente. A unidade da potência é o Watt (W).

$$P = v \cdot i = R \cdot i^2 = \frac{v^2}{R} \quad (2.6)$$

Associação de Resistores

A associação em série de resistores possui resistência equivalente R_e igual a soma dos n resistores associados,

$$R_e = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad (2.7)$$

A associação em paralelo de resistores possui resistência equivalente R_e igual ao inverso da soma dos inversos dos n resistores associados,

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad (2.8)$$

Exemplo 8: Qual das duas configurações apresentadas na Figura 2.3 é mais adequado para utilizar em uma casa?

R. A conexão em paralelo é melhor pois a tensão da fonte está aplicada em todas as lâmpadas igualmente.

□

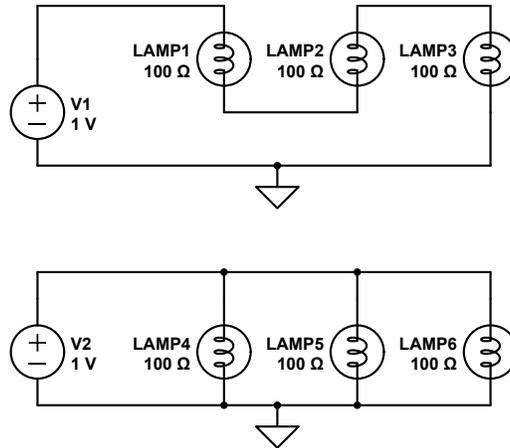


Figura 2.3: Exemplo - Lâmpadas

Capacitor

Um capacitor é um dispositivo eletrônico que armazena energia na forma de *campo elétrico*. A capacitância de um capacitor é a medida da quantidade de carga armazenada entre duas placas para uma dada diferença de potencial (ou voltagem), que pode ser dada por $c = q/v$.

- Unidade no Sistema Internacional: Farad (F);
- Símbolo do componente: ⊥ ;
- Tipos: fixo e variável;
- Material Dielétrico: papel, cerâmica, etc.
- Característica: Armazena energia na forma de campo elétrico.

Fase de Carga

Dado o circuito RC da Figura 2.4, a chave é levada para a posição 1 no momento $t = 0$. Considere que a chave anteriormente a $t = 0$ estava na posição 2 e o capacitor estava descarregado. Neste instante, o circuito tem o seguinte comportamento:

1. As cargas da fonte começam a migrar para o capacitor, gerando uma corrente. No momento em que a chave é fechada, o capacitor se comporta como um curto-circuito (corrente plena I_C).

- Esta transferência de cargas é muito rápida inicialmente, ficando mais lenta a medida que a diferença de potencial entre os terminais do capacitor se aproxima da tensão fornecida pela fonte.
- Quando o capacitor for totalmente carregado, significa que a tensão no capacitor será igual à tensão na fonte e a corrente no circuito será nula.

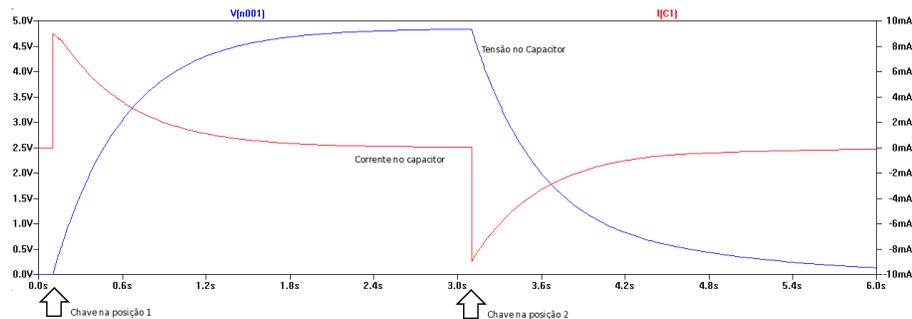
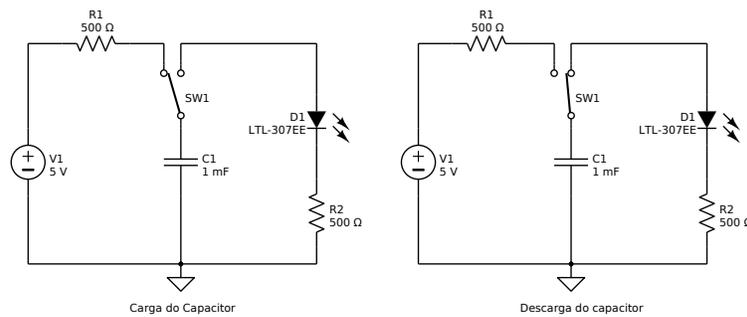


Figura 2.4: Circuito com capacitor

Após o capacitor estar carregado, ele se comporta como um circuito aberto. Este comportamento pode ser observado pelos gráficos de tensão e corrente mostrado na Figura 2.4.

Se ao invés da chave passar para a posição 2 ela fosse aberta novamente, o capacitor manteria sua energia (carga) armazenada na forma de um campo elétrico por um período determinado apenas pela sua corrente de fuga. Logo, um capacitor carregado e isolado vai trabalhar, por um tempo, como uma bateria, armazenando energia).

Fase de Descarga

Colocando agora a chave na posição 2, o capacitor começa a se descarregar pelo resistor $R = 500\Omega$ até $V_c = 0$, acendendo o LED por um breve período de

tempo. Neste caso, o capacitor torna-se uma bateria. Observe que o sentido da corrente é ao contrário da fase de carga. A corrente então vai se extinguindo até zero, quando toda a energia armazenada no capacitor se dissipa pelo resistor e pelo LED.

Portanto, a corrente que circula em um capacitor está associada a uma capacitância C e a variação de tensão em seus terminais (v_c) ao longo do tempo, de acordo com a relação

$$i_c = C \frac{dv_c}{dt}. \quad (2.9)$$

Desta forma, a queda de tensão no capacitor pode ser calculada por $v_c = 1/C \int i_c dt$.

Associação de Capacitores

A associação em série de capacitores possui capacitância equivalente C_e igual ao inverso da soma dos inversos dos n capacitores associados, ou seja

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}. \quad (2.10)$$

A associação em paralelo de capacitores possui capacitância equivalente C_e igual a soma dos n capacitores associados, dado por

$$C_e = C_1 + C_2 + \dots + C_n. \quad (2.11)$$

Indutor

Um indutor armazena energia na forma de *campo magnético* quando uma corrente elétrica circula através de uma bobina condutora. O campo magnético criado é proporcional a corrente - alterações nesta corrente criam alterações no fluxo magnético que, por sua vez, geram uma força (FEM, Força Eletro Motriz), que age em oposição a esta corrente. A indutância é a medida da FEM gerada por alterações na corrente. Por exemplo, um indutor com uma indutância de 1 Henri produz uma FEM de 1 volt quando a corrente através do indutor se altera na taxa de 1 Ampere por segundo. O fluxo magnético pode ser aumentado pela utilização de um núcleo altamente permeável magneticamente.

A Figura 2.5 ilustra a criação do campo magnético criado por uma corrente elétrica e ilustra a regra da mão direita para recordar o sentido do campo criado. A Figura 2.6 ilustra o campo magnético provocado pela corrente circulando em uma bobina. Note o sentido do campo magnético criado.

Um campo magnético variável pode produzir um uma tensão v num circuito indutivo próximo. Esta tensão é proporcional a razão da variação da corrente produtora do campo magnético com o tempo. Variando-se a intensidade da corrente percebe-se uma constante de proporcionalidade com a tensão. Esta constante é a indutância L , dada por

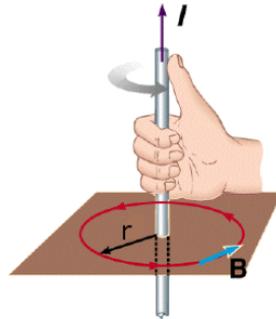


Figura 2.5: Campo magnético criado por uma corrente e regra da mão direita

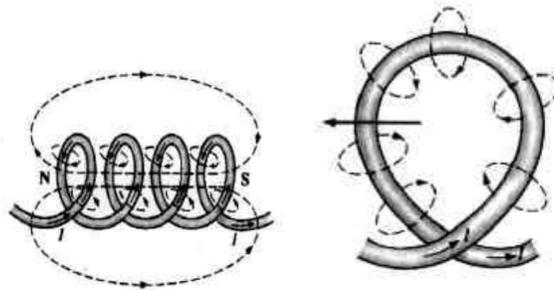


Figura 2.6: Campo magnético ao redor de uma bobina

$$v_l = L \frac{di_l}{dt}. \quad (2.12)$$

Portanto, a *variação de corrente* ao longo do tempo numa bobina, provoca uma tensão induzida nos terminais da própria bobina. É como se fosse a "queda de tensão" devido a indutância da bobina.

Caso não haja variação na corrente, a bobina comporta-se como um curto circuito; neste caso ela nada mais é do que um fio enrolado.

Fase de Carga

Seja o circuito RL mostrado na Figura 3.11. Fechando a chave na posição 1 em $t = 1$ ms estaremos alimentando o indutor com corrente contínua da fonte. Já sabemos que para fonte CC a bobina torna-se um curto-circuito ($V_l = 0$). Logo, a corrente no circuito será $i_l = v/R$.

No instante do fechamento da chave a corrente era zero e passado um curtíssimo espaço de tempo ela foi para E/R . Portanto, houve uma variação de corrente no circuito (de zero para v/R). Mesmo sendo de curtíssimo tempo, esta

variação de corrente provocou na bobina uma tensão V_L . Esta tensão na bobina provoca o armazenamento de energia, na forma de um campo magnético.

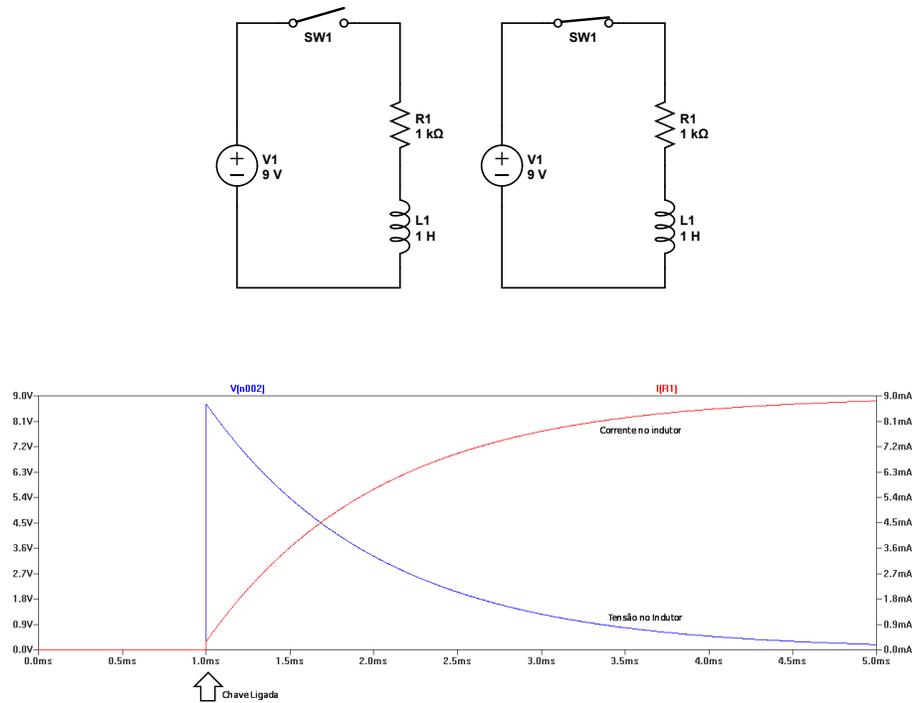


Figura 2.7: Circuito com Indutor

Fase de Descarga

Quando a fonte de alimentação é retirada, toda a energia armazenada na bobina será descarregada a partir do momento que não houver mais corrente no circuito. Convém lembrar que a energia é armazenada em um campo magnético, este campo por sua vez é gerado por uma corrente. Com o fim da alimentação, a energia armazenada na forma de campo não permitirá que a corrente circulante na bobina cesse. Desta forma, surgirá um grande potencial entre os contatos da chave com um possível rompimento do dielétrico e o surgimento de uma corrente durante um curto período de tempo (faísca) - diferentemente da capacitância, onde a energia armazenada se sustenta durante um período de tempo.

Associação de Indutores

A associação em série de indutores possui indutância equivalente L_e igual a soma dos n indutores associados,

$$L_e = L_1 + L_2 + \dots + L_n \quad (2.13)$$

A associação em paralelo de indutores possui indutância equivalente R_e igual ao inverso da soma dos inversos dos n indutores associados,

$$\frac{1}{L_e} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n} \quad (2.14)$$

2.3 Leis de Kirchhoff

As Leis de Kirchhoff são um conjunto de leis que tratam da conservação de cargas e de energia em circuitos elétricos, que foram primeiramente descritas por Gustav Kirchhoff em 1845. O uso das leis é a base para a análise de circuitos elétricos.

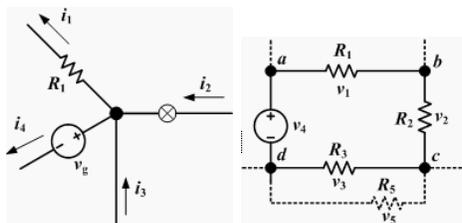


Figura 2.8: Leis de Kichhoff: à esquerda, lei dos nós; à direita, lei das malhas

Lei das malhas O somatório das quedas de tensão em uma malha fechada deve ser nulo (lei de conservação de energia). Convencionou-se que quando uma bateria é percorrida do terminal - para o terminal +, a voltagem é considerada positiva e a queda de tensão em um resistor ou outro elemento percorrido pela corrente i é considerada negativa.

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0 \quad (2.15)$$

Por exemplo, na Figura 2.8, à direita, $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$.

Lei dos nós Um ponto onde dois ou mais elementos tem uma conexão comum é chamado de nó. O somatório das correntes chegando e saindo de um nó deve ser zero (lei da conservação das cargas).

$$\sum_{k=1}^n v_k = 0 \quad (2.16)$$

Por exemplo, na Figura 2.8, à esquerda, $i_1 + i_4 = i_2 + i_3$.

Exemplo 8: Encontre o valor da corrente em todos os resistores da Figura 2.10.

Resposta. Utilizando a lei das malhas, encontramos:

$$-v_a + R_1 i_1 + (i_1 - i_2) R_2 = 0$$

$$v_b + R_3 (i_2 - i_1) + R_2 i_2 = 0$$

Resolvendo a equação, utilizando $V_a = 5$, $V_b = 5$, $R_1 = R_2 = R_3 = 10K\Omega$, obtemos $i_1 = 166\mu A$ e $i_2 = -166\mu A$. A corrente circulando em R_2 será de $(i_1 - i_2) = 333\mu A$.

□

2.4 Exercícios

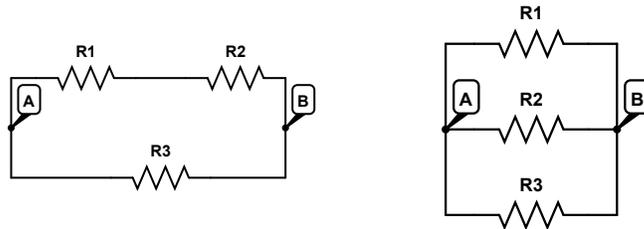


Figura 2.9: Exercício - Resistores

Exercício 8: Encontre a resistência equivalente para cada os circuitos apresentados na Figura 2.9. Considere $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 8\Omega$, $R_3 = 4\Omega$ □

Exercício 9: Suponha que os circuitos da Figura 2.9 sejam conectados à uma fonte DC de 10V (entre os pontos A e B). Calcule a corrente em cada um dos resistores e a potência dissipada. □

Exercício 10: Um cabo de 60 metros necessita carregar uma corrente de 150A com uma queda de tensão não maior do que 0,5V. O cabo é feito de cobre, que possui resistividade $1,7 \cdot 10^{-8} \Omega m$. Qual o diâmetro mínimo do cabo? □

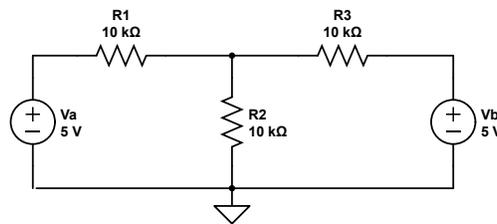


Figura 2.10: Exercício

Exercício 11: Encontre as quedas de tensão e corrente em todos os resistores do circuito da Figura 2.11. □

Exercício 12: Encontre a equação de malha para o circuito da Figura 2.12, em função dos valores da tensão da fonte $v(t)$, da corrente i e dos valores do capacitor C e do indutor L . Encontre a expressão em função da carga q e compare a equação com a equação de resposta do sistema massa-mola-amortecedor e estabeleça uma relação entre os dois sistemas (exercício avançado). □

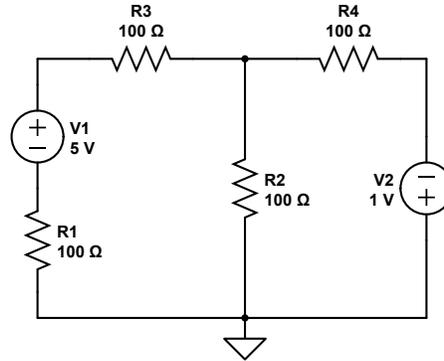


Figura 2.11: Exercício

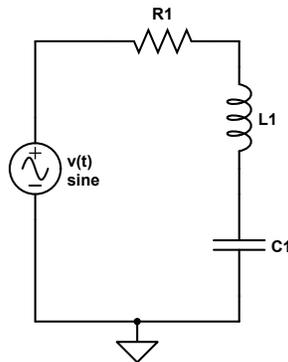


Figura 2.12: Exercício

Exercício 13: Dois fios, um de cobre com resistividade $1,7 \times 10^{-9} \Omega \cdot m$ e outro de alumínio com resistividade $2,8 \times 10^{-8} \Omega \cdot m$, possuem mesmo comprimento e mesmo diâmetro. Se ambos forem percorridos pela mesma corrente i , pode-se afirmar que:

1. As resistências ôhmicas dos dois fios são iguais.
2. A d.d.p. é menor no fio de cobre.
3. O efeito de capacitância do fio de cobre será maior que do fio de alumínio.

4. O efeito de indutância do fio de cobre será maior que do fio de alumínio.
5. se os dois fios forem submetidos a uma mesma tensão, separadamente, a corrente elétrica será a mesma nos dois fios.

□

Exercício 14:

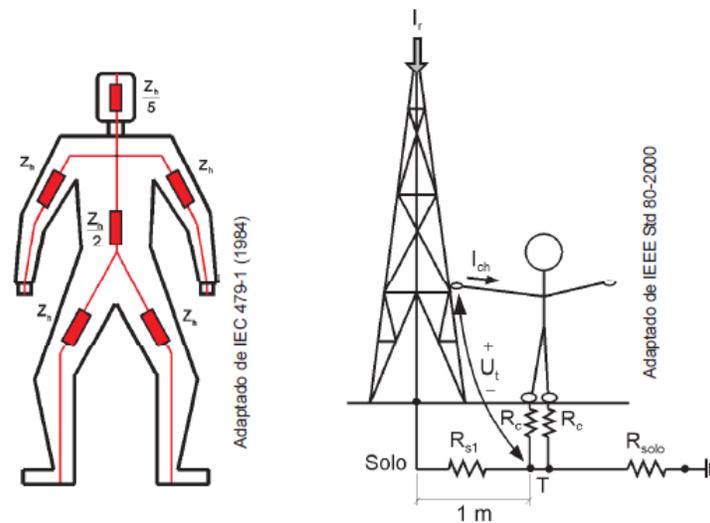


Figura 2.13: Equivalente elétrico do corpo humano

Em instalações elétricas, o sistema de aterramento é projetado de modo que as diferenças de potenciais (d.d.p.) de toque e de passo fiquem abaixo do limite de risco de fibrilação ventricular do coração. A Figura 2.13 mostra um equivalente elétrico simplificado do corpo humano, em que $Z_h = 500\Omega$.

A Figura 2.13 apresenta as impedâncias equivalentes do corpo humano e a d.d.p. de toque (U_t) para uma instalação sem aterramento. A resistência do solo R_{s1} depende da resistividade do solo, $\rho_s = 10\Omega \cdot m$, e da distância do trecho correspondente. A resistência de contato R_C de cada pé com o solo depende da área da superfície de contato e da resistividade do solo, podendo ser aproximada por $R_C = k \cdot \rho_s$, com $k = 8m^{-1}$.

- a) (5) Mostre qual será o equivalente elétrico do corpo humano no caso de contato como indicado na Figura 2.13, indicando quais as resistências correspondentes.
- b) (15) Suponha que $U_t = 10,4V$. Calcule a corrente de choque (I_{CH}) e a corrente I_r (na estrutura) (dica: não esqueça de R_{s1}).

□

Exercício 15: Um cabo de 100 metros necessita carregar uma corrente de 50A com uma queda de tensão não maior do que 0,2V. O cabo é feito de cobre, que possui resistividade $1,7 \cdot 10^{-8} \Omega m$. Qual o diâmetro mínimo do cabo? □

Capítulo 3

Sistemas de Corrente Alternada

3.1 Considerações sobre Potência e Energia

A potência fornecida a uma carga à qual está aplicada um tensão instantânea u e por onde circula uma corrente i pode ser dada por pela fórmula fundamental de potência,

$$P = ui \quad (3.1)$$

A unidade de potência é o Watt (W).

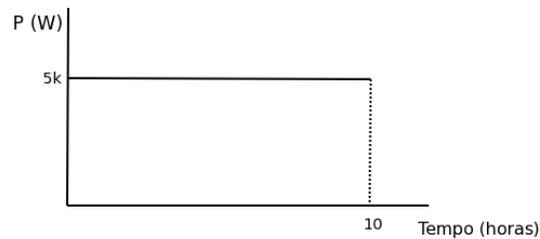


Figura 3.1: Energia

A energia é a potência dissipada ao longo do tempo, dada pela área abaixo da curva de potência em função do tempo. Para o caso de um sistema onde o consumo de potência é contínuo ao longo do tempo, conforme ilustra a Figura 3.1, é dada por

$$W = P.t \quad (3.2)$$

se o tempo considerado for de uma hora, a energia é expressa em Watts x hora. Na prática, utiliza-se normalmente a potência em quilowatts ($kW.h$). Obs, muito cuidado para não confundir a unidade (W-Watt) com o nome da variável utilizada para representar a energia consumida (normalmente W).

Exemplo 16: Em um circuito alimentado por uma tensão de 110 volts, onde a corrente medida é de 10 ampères, considerando o circuito apenas resistivo, qual será a energia consumida em 8 horas?
 Solução: $W = 110 \cdot 10 \cdot 8 = 8,8kWh$ □

Exemplo 16: Qual a potência consumida por motor elétrico cuja tensão é de 220V e a corrente necessária 20 ampères? Solução:
 $P = U \cdot I = 220 \cdot 20 = 4,4kW$ □

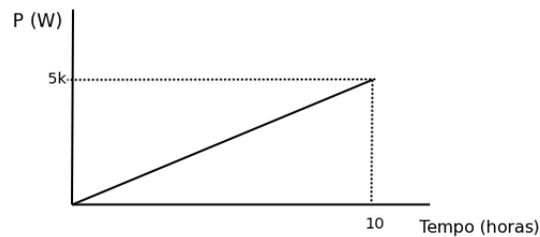


Figura 3.2: Energia

Exemplo 16: Considere um sistema onde a Potência consumida não é mais constante e sim variável com o tempo, de acordo com a Figura 3.2. Solução: Neste caso, energia consumida pode ser calculada através da área abaixo da curva simplesmente observando-se a figura geométrica, ou $W = 25kWh$. No entanto, uma solução alternativa é realizar o cálculo da área através de

$$W = \int_0^{10} \frac{5}{10} t dt = \frac{1}{2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{10} = 25kWh$$

□

3.2 Corrente Contínua e Alternada

Uma tensão contínua é aquela que não varia ao longo do tempo. Já a tensão alternada é oscilatória e varia sua amplitude em relação ao tempo, segundo uma lei definida (normalmente senoidal).

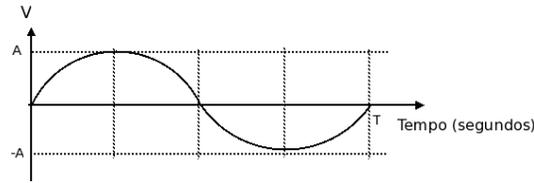


Figura 3.3: Forma de uma tensão alternada

A Figura 3.3 mostra o formato de uma tensão alternada. O período T é o tempo necessário à realização de um ciclo, onde ω representa a velocidade angular em radianos por segundos.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (3.3)$$

A frequência é dada por

$$f = \frac{1}{T}$$

de onde pode-se concluir que $\omega = 2\pi f$.

A tensão alternada pode ser representada por uma senóide na forma

$$u = U_m \cos(\omega t) \quad (3.4)$$

onde

u representa o valor instantâneo de tensão;

U_m representa o valor máximo da tensão;

ω representa a velocidade angular em radianos por segundo.

No Brasil o fornecimento de energia elétrica é realizado através de uma tensão alternada em uma frequência de 60 Hz. Uma curiosidade: as lâmpadas apagam e acendem 120 vezes por segundo? Sim, porém nesta velocidade não é possível perceber porque o filamento não chega a se apagar por completo.

Circuito Resistivo

Uma fonte de alimentação fornecendo uma tensão senoidal para um circuito puramente resistivo, por exemplo: chuveiros, aquecedores, fornos, etc. Neste caso, a corrente circulando sobre a carga e a tensão estão em fase.

Exemplo 16: A corrente sobre o resistor da Figura 3.4 é dada por $i = \frac{u}{R} = \frac{U_m}{R} \cos(\omega t)$, ou, $i = I_m \cos(\omega t)$. \square

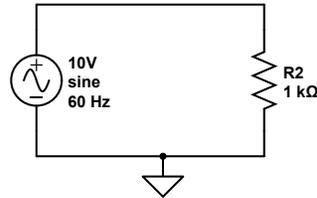


Figura 3.4: Circuito resistivo em corrente alternada

Em corrente contínua, a potência é dada sempre pelo produto da tensão pela corrente. No entanto, em corrente alternada pode haver uma defasagem entre tensão e corrente, o que provoca uma variação no cálculo da potência. Em sistemas de corrente alternada puramente resistivos, tensão e corrente estarão sempre em fase e a potência consumida também será dada pelo produto da tensão pela corrente.

Circuito Capacitivo Puro

Suponha um circuito consistindo em um capacitor alimentado com uma tensão alternada. Neste caso, a capacidade do capacitor em acumular carga produzirá uma defasagem entre a tensão e a corrente observada no circuito. Para o caso do circuito puramente capacitivo, a defasagem entre corrente e tensão será de exatamente 90° (ou $\pi/2$), como pode ser observado na Figura 3.5. Nesta figura, I_C representa a corrente circulando no circuito e V representa a tensão fornecida. Observa-se que a corrente está **avancada** em relação à tensão. A corrente para o circuito pode ser dada por $i = I_m \cos(\omega t + 90)$ (pode ser obtido através da equação de malha no circuito considerando a queda de tensão no capacitor).

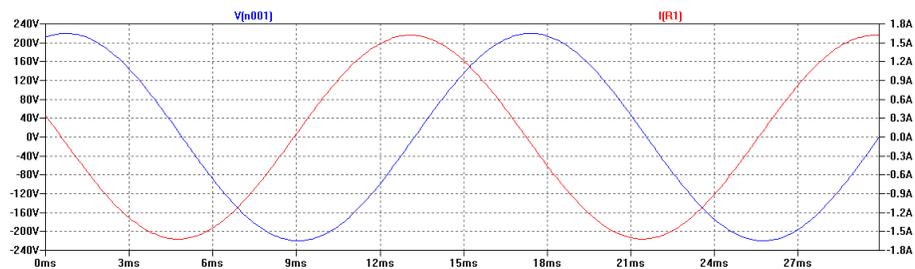


Figura 3.5: Resposta de um circuito capacitivo puro

Desta forma, um capacitor oferece certa resistência à passagem de corrente alternada e esta resistência é chamada de reatância capacitiva, que pode ser

calculada por $X_c = \frac{1}{\omega C}$.

Quando existe uma resistência ôhmica no mesmo circuito onde existe um capacitor, a impedância capacitiva é dada por $Z = \sqrt{R^2 + X_c^2}$.

Circuito Indutivo Puro

Suponha um circuito consistindo em um indutor alimentado com uma tensão alternada. A corrente observada é função da tensão e da indutância L . A corrente instantânea pode ser dada por $i = I_m \cos(\omega t)$, sendo que a corrente está **atrasada** em relação à tensão, conforme mostrado na Figura 3.6. A reatância indutiva será dada por $X_L = \omega L$.

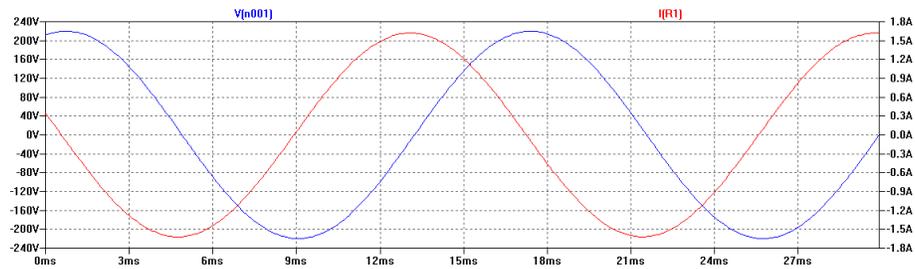


Figura 3.6: Resposta de um circuito indutivo puro

A soma vetorial das reatâncias é a impedância Z .

Circuito RLC em Série

Suponha o circuito RLC em série da Figura 3.7 operando com corrente alternada de 60Hz, com os seguintes componentes: $R = 8\Omega$, $L = 500mH$, $C = 50\mu F$ e $V = 220V$.

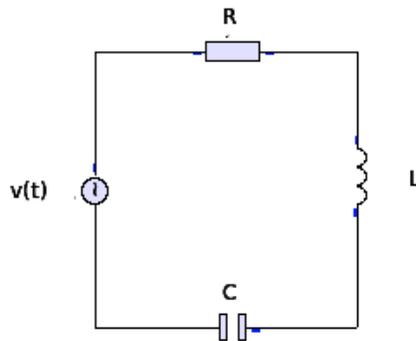


Figura 3.7: Resposta RC

Pode-se calcular

$$\begin{aligned}\omega &= 2\pi.f = 2\pi.60 = 377\text{rad/s} \\ X_L &= \omega.L = 377.0,5 = 188,5\Omega \\ X_C &= \frac{1}{\omega.C} = \frac{1}{377.50\mu} = 53,05\Omega\end{aligned}$$

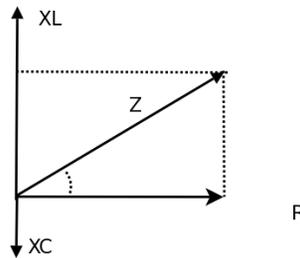


Figura 3.8: Diagrama de Impedância RLC série

A impedância do circuito pode ser calculada considerando o diagrama da Figura 3.8,

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{(8^2 + (188,5 - 53,5)^2)} = 135,68\Omega$$

A corrente pode ser dada por

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{135,8} = 1,62A$$

A diferença de fase entre a corrente e a tensão será de

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{R}{Z} = \frac{8}{135,8} = 0,589 \\ \theta &= 86,62^\circ\end{aligned}$$

Como $X_L > X_C$, o efeito predominante é o indutivo, com a corrente estando atrasada em relação à tensão, como pode-se observar no comparativo entre a forma de onda da tensão e da corrente observada no resistor apresentado na Figura 3.9.

Circuito RLC em Paralelo

Suponha um circuito com uma ligação paralela entre uma fonte de alimentação alternada de 220V e 60Hz, um resistor $R = 8\Omega$, um capacitor $C = 132\mu F$ e um indutor $L = 26mH$.

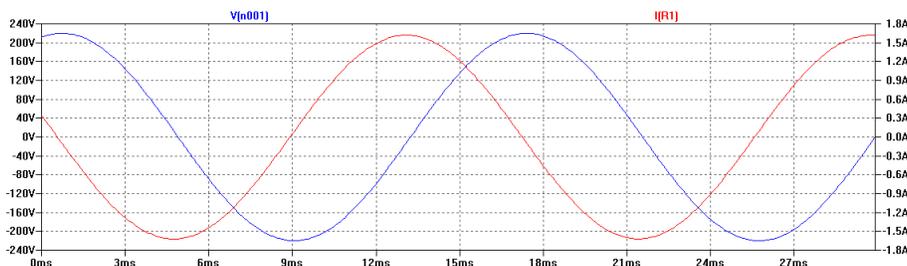


Figura 3.9: Resposta para o exemplo de circuito RLC em série

Pode-se determinar a corrente nos diversos elementos,

$$I_R = \frac{220}{8} = 27,5A$$

$$\omega = 2.\pi.f = 377rad/s$$

$$X_C = \frac{1}{\omega.C} = \frac{1}{377.132\mu} = 20,1\Omega$$

$$I_C = \frac{220}{20} = 10,9A$$

$$X_L = \omega.L = 377.26m = 9,8\Omega$$

$$I_L = \frac{220}{9,8} = 22,4\Omega$$

A corrente no capacitor C está avançada em relação a tensão em 90° e a corrente no indutor L está adiantada em relação a tensão também em 90° .

3.3 Fator de Potência

Já foi estudado que a potência pode ser dada por $P = U.I$. Isto é válido para circuitos em corrente contínua ou para circuitos monofásicos com carga resistiva (por exemplo, lâmpadas incandescentes, ferro elétrico, chuveiro elétrico).

Em circuitos contendo capacitores e/ou indutores, tensão e corrente não estarão necessariamente em fase. A diferença de fase entre tensão e corrente provoca efeitos indesejados, em função desta defasagem parte da energia armazenada nos indutores/capacitores retorna para a fonte e não produz trabalho útil.

Quando for utilizada uma carga indutiva ou capacitiva (por exemplo, com motores), devem ser definidos três tipos de potência:

Potência Ativa É a potência dissipada em calor, dada por P. É a capacidade do circuito em produzir trabalho. Sua unidade é o Watt (W).

Potência Reativa É a potência trocada entre gerador e carga sem ser consumida, dada por Q e medida em var.

Potência Aparente É o produto da tensão pela corrente do circuito, que será igual ou maior do que a potência ativa. É a soma vetorial das potências Ativa e Reativa, dada por N . É medida em volt-ampères (VA)

Suponha um circuito alimentado com uma tensão alternada onde a corrente apresenta uma diferença de fase em relação à tensão, sendo esta diferença dada em um ângulo θ . Chama-se fator de potência ao co-seno do ângulo de defasagem entre a corrente e a tensão. O fator de potência também pode ser dado por:

$$FP = \frac{P}{N} = \cos(\theta) \quad (3.5)$$

No caso de formas de onda perfeitamente senoidais, P , Q e N podem ser representados por vetores que formam um triângulo retângulo, também conhecido como triângulo de potências, conforme mostrado na Figura 3.10.

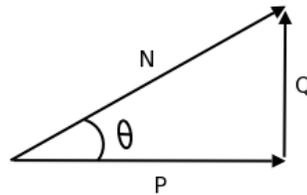


Figura 3.10: Triângulo de Potência

A expressão geral da potência em circuitos monofásicos de corrente alternada é dada pela Equação 3.6.

$$P = U.I.|\cos\theta| \quad (3.6)$$

Para circuitos trifásicos, obtém-se a expressão $P = \sqrt{3}U.I.\cos\theta$.

O fator de potência varia de 0 a 1. O valor 0 representa uma indutância pura - neste caso o fluxo de energia é puramente reativo e a energia armazenada é inteiramente devolvida à fonte a cada ciclo. O valor 1 representa um circuito puramente resistivo, onde toda a energia fornecida pela fonte é consumida pela carga. Um circuito com baixo fator de potência terá correntes elétricas maiores para realizar o mesmo trabalho do que um circuito com alto fator de potência.

Cargas indutivas (como motores e transformadores, que são equipamentos com bobinas) produzem potência reativa com a onda de corrente atrasada em relação à tensão. Cargas capacitivas (bancos de capacitores ou cabos elétricos enterrados) produzem potência reativa com corrente adiantada em relação à tensão. Ambos os tipos de carga absorverão energia durante parte do ciclo de

corrente alternada, apenas para devolver essa energia novamente para a fonte durante o resto do ciclo.

As concessionárias de energia estabelecem que os consumidores, especialmente os que possuem cargas maiores, mantenham os fatores de potência de suas instalações elétricas dentro de um limite, caso contrário serão penalizados com cobranças adicionais. Engenheiros freqüentemente analisam o fator de potência de uma carga como um dos indicadores que afetam a eficiência da transmissão e geração de energia elétrica.

Exemplo 16: Um motor trifásico de 220V exige da rede 25 ampères por fase, com fator de potência de 0,8. Qual a potência oferecida pela rede? Solução: $P = \sqrt{3} \cdot 220 \cdot 25 \cdot 0,8 = 7621W$ □

Quando o fator de potência atinge valores abaixo de 0,85 podem ser observados problemas em uma instalação (como, por exemplo, o aquecimento dos condutores). Isso deve ser corrigido com a instalação de capacitores de modo a compensar o efeito indutivo.

3.4 Exercícios

Exercício 16: Descreva o que ocorre na fase de carga e descarga de um capacitor. □

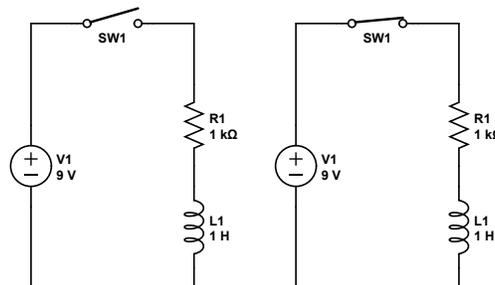


Figura 3.11: Circuito com Indutor

Exercício 17: Descreva o que ocorre na fase de carga e descarga de um indutor. Mostre a tensão e a corrente quando a chave passa para a posição 1 e depois para posição 2 na Figura 3.11 \square

Exercício 18: Suponha um circuito RC em série operando com corrente alternada de 60Hz, com os seguintes componentes: $R = 1K\Omega$, $C = 100\mu F$ e $V = 10V$. Encontre a corrente circulando por este circuito e seu respectivo ângulo de fase em relação à tensão. \square

Exercício 19: Suponha um circuito RL em série operando com corrente alternada de 60Hz, com os seguintes componentes: $R = 1K\Omega$, $L = 150mH$ e $V = 10V$. Encontre a corrente circulando por este circuito e seu respectivo ângulo de fase em relação à tensão. \square

Exercício 20: Suponha um circuito RLC em série operando com corrente alternada de 60Hz, com os seguintes componentes: $R = 1K\Omega$, $L = 50mH$, $C = 100\mu F$ e $V = 10V$. Encontre a corrente circulando por este circuito e seu respectivo ângulo de fase em relação à tensão. \square

Exercício 21: Considere um circuito formado por uma associação em série entre uma fonte de alimentação senoidal, um indutor de 530mH(mili Henry) e um resistor de 200 Ω . Considere que a fonte de alimentação fornece $V_e = 127V$ em uma frequência de 60Hz. Calcule a corrente circulando no circuito, indicando:

- a) (5) Corrente eficaz I_e .
- b) (5) Expressão para $i(t)$.
- c) (5) Potência ativa.
- d) (5) Fator de potência.

Dado: $X_L = \omega \cdot L$. \square

Exercício 22: Qual o problema com a potência em sistemas CA onde existe um ângulo de fase entre a tensão e corrente? \square

Exercício 23: Quais os elementos em um circuito elétrico operando com CA causadores da defasagem entre tensão e corrente? □

Exercício 24: Mostre a relação entre as diversas potências em um sistema CA (Potência Ativa, Reativa e Aparente) □

Exercício 25: Demonstre qual a potência em um sistema CA operando com uma carga puramente resistiva. Considere que a tensão é dada por $V_m \cos(\omega t)$ e que a impedância da carga é dada por 1Ω . Compare o resultado com a potência dissipada pela mesma carga em um sistema CC com V_m .

Nota. O resultado mostra o porque da definição do valor eficaz (ou RMS) em sistemas, que é normalmente dado por $V/\sqrt{2}$ para obter a mesma potência que seria observada em um sistema CC com a mesma tensão V . □

Exercício 26: Considere uma instalação elétrica com fator de potência muito baixo, digamos $FP=0,65$.

- a) (5) Explique porque este FP baixo é ruim para o dono da instalação.
- b) (5) Explique porque este FP baixo é ruim para a concessionária de energia elétrica local.
- c) (5) Como este problema pode ser corrigido?

□

Exercício 27: Suponha uma instalação operando com fator de potência igual a 0,5. Qual o problema com este fator de potência? Como corrigir? □

Capítulo 4

Fasores - Breve Introdução

O fasor é um número complexo que representa a magnitude e fase de uma onda senoidal. A notação fasorial simplifica a resolução de problemas envolvendo funções senoidais no tempo, e é utilizada para análise da resposta estacionária de circuitos em corrente alternada.

Ao utilizar a notação fasorial, as equações diferenciais que representam circuitos elétricos em CA são transformadas em equações algébricas. A resolução de equações algébricas exige matemática do nível de segundo grau.

Suponha uma função $y(t)$ no domínio do tempo, dada por:

$$y(t) = A \cos(\omega t + \theta) \quad (4.1)$$

onde A é a amplitude máxima, ω é a frequência angular dada em radianos por segundo e θ é o ângulo de fase em radianos.

Considere a representação gráfica do fasor apresentada na Figura 4.1.

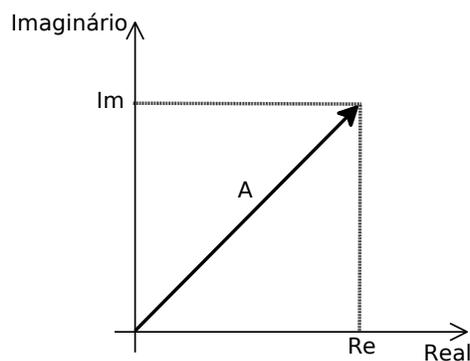


Figura 4.1: Representação gráfica do fasor

A fórmula de Euler estabelece que:

$$e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha) \quad (4.2)$$

onde e é o número de Euler (2,7182...) e j é o número imaginário ($j = \sqrt{-1}$).

Pode-se escrever:

$$\cos \alpha = R_e [e^{j\alpha}] \quad (4.3)$$

de forma que a forma de onda senoidal apresentada na Equação 4.1 pode ser escrita por:

$$y(t) = R_e [Ae^{j(\omega t + \theta)}] \quad (4.4)$$

O fasor que representa a função $y(t)$ será denotado por \hat{Y} , e é dado por:

$$\hat{Y} = Ae^{j\theta} \quad (4.5)$$

Outras formas muito utilizadas para representar o fasor são apresentadas a seguir:

$$\text{Forma quadrangular: } \hat{Y} = R_e + jI_m \quad (4.6)$$

$$\text{Forma polar: } \hat{Y} = \underline{A} \angle \theta$$

onde estas formas são muito úteis para o cálculo de associações entre impedâncias.

Desta forma, o fasor \hat{Y} , que representa a forma de onda senoidal de $y(t)$ pode ser escrito também utilizando suas componentes no plano real e imaginário (respectivamente R_e e I_m), conforme ilustrado pela Figura 4.1, utilizando as seguintes relações:

$$\begin{aligned} A^2 &= R_e^2 + I_m^2 \\ \cos \theta &= R_e/A \\ \sin \theta &= I_m/A \end{aligned} \quad (4.7)$$

Exemplo 28: Suponha uma tensão dada por $v(t) = 10 \cos(100\omega t + \pi/4)$.

O fasor correspondente pode ser dado por $10/\underline{\pi/4}$ ou por \square

4.1 Circuitos Resistivos

A lei de Ohm pode ser escrita em função do tempo como:

$$v(t) = Ri(t) \quad (4.8)$$

Considerando um circuito constituído por uma associação em série entre uma fonte de tensão alternada e um resistor, com a forma de onda da fonte dada por:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta) \quad (4.9)$$

Em termos fasoriais, o resistor apresenta uma impedância dada por

$$Z_R = R \quad (4.10)$$

a corrente no resistor pode ser calculada através da relação:

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}}{Z_R} \quad (4.11)$$

A Equação 4.11 é a própria lei de Ohm escrita em forma fasorial. É importante perceber que o valor da impedância Z_R não altera o ângulo de fase. Desta forma, o ângulo de fase da forma de onda da corrente será igual ao ângulo de fase da tensão, iguais a θ . A frequência da forma de onda da corrente também será igual à frequência da tensão.

Exemplo 28: Suponha um circuito composto por uma fonte de tensão alternada e um resistor. A tensão é dada por $v(t) = 10 \cos(100t + \pi/4)$ e o resistor é de 20Ω . Qual a forma de onda da corrente?

Resposta. O fasor da tensão é dado por $\hat{V} = 10/\pi/4$. Para calcular a corrente, utiliza-se a Equação 4.11, de onde se obtém:

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}}{R} = \frac{10/\pi/4}{20} = 0,5/\pi/4$$

Convertendo-se o fasor para o plano do tempo, pode-se obter forma de onda da corrente como $i(t) = 0,5 \cos(100t + \pi/4)$. \square

4.2 Circuitos Indutivos

Em termos fasoriais, o indutor apresenta a seguinte impedância:

$$Z_L = j\omega L \quad (4.12)$$

com os termos já definidos.

Pode-se obter a corrente circulando por um indutor utilizando-se a lei de Ohm, da seguinte forma:

$$\hat{V} = \hat{I}Z_L \quad (4.13)$$

Exemplo 28: Suponha um circuito constituído por uma associação em série entre uma fonte de tensão com forma de onda dada por $v(t) = 10 \cos(100t)$ e um indutor de $L = 0,1H$.

A impedância do indutor pode ser dada por $Z_L = j10\Omega$, que pode ser escrito também em no formato polar como $10/\underline{\pi/2}$. Aplicando-se a Equação 4.13, obtêm-se:

$$\hat{I} = \frac{10\angle 0}{10/\underline{\pi/2}} = 1/\underline{-\pi/2}$$

Tomando-se o fasor da corrente encontrado, pode-se escrever a função da corrente no domínio do tempo como:

$$i(t) = 1\cos(100t - \pi/2)$$

Observe que a frequência da corrente e tensão são iguais, porém com uma defasagem de -90° . \square

4.3 Circuitos Capacitivos

Em termos fatoriais, o capacitor apresenta a seguinte impedância:

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C} \quad (4.14)$$

Da mesma forma que aplicado para o circuito indutivo, é possível utilizar a lei de Ohm com os fasores resultantes, calculando:

$$\hat{V} = \hat{I}Z_C \quad (4.15)$$

Exemplo 28: Suponha um circuito constituído por uma associação em série entre uma fonte de tensão com forma de onda dada por $v(t) = 10 \cos(100t)$ e um capacitor de $C = 0,02F$.

A impedância do indutor pode ser dada por $Z_C = -j1/20\Omega$, que pode ser escrito também em no formato polar como $1/2/\underline{-\pi/2}$. Aplicando-se a Equação 4.15, obtêm-se:

$$\hat{I} = \frac{10\angle 0}{1/2/\underline{-\pi/2}} = 20/\underline{\pi/2}$$

Tomando-se o fasor da corrente encontrado, pode-se escrever a função da corrente no domínio do tempo como:

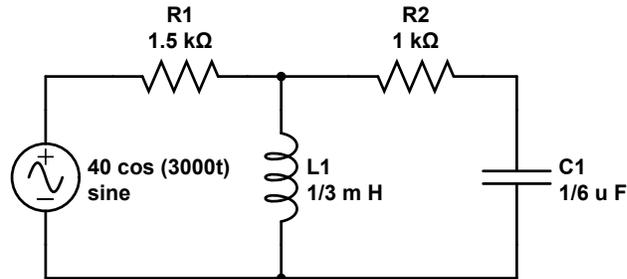


Figura 4.2: Exercício

$$i(t) = 20\cos(100t + \pi/2)$$

Observe que a frequência da corrente e tensão são iguais, porém com uma defasagem de $+90^\circ$. \square

4.4 Associações de Impedâncias

Um dos aspectos interessantes em se utilizar o conceito de fasor é a possibilidade de associar impedâncias exatamente como se faz a associação de resistores, com as regras de associação em série e paralelo definidas anteriormente.

Considere o circuito apresentado na Figura 4.2. O fasor correspondente para a fonte de alimentação é $40\angle 0$. A impedância do indutor L1 é dada por $X_{L1} = j1\Omega$ e do capacitor L2 por $X_{C1} = -j2k\Omega$. A impedância equivalente vista pela fonte pode calculada por:

$$Z_{eq} = 1,5 + \frac{(1j)(1-j2)}{j1+1-j2} = 1,5 + \frac{2+j1}{1-j1} = 2 + j1,5 = 2,5\angle 36,9^\circ$$

Desta forma, é possível calcular o fasor da corrente que sai da fonte é dada por:

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}}{Z_{eq}} = \frac{40\angle 0}{2,5\angle 36,9^\circ} = 16\angle -36,9^\circ$$

de onde é possível deduzir que a corrente que sai da fonte é dada por $16 \cos(3000t - 36,9^\circ)$.

Uma boa dica é para manipulação de números complexos é realizar somas e subtrações no formato *retangular* e divisões e multiplicações no formato *polar*. Desta forma, associações em série são tratadas mais facilmente em formato retangular e associações em paralelo são tratadas mais facilmente no formato polar.

Exercício 28: Calcule as correntes em L_1 e C_1 no exemplo da figura 4.2 □

Exercício 29:

- a) Determine a impedância de um resistor de $2k\Omega$ em paralelo com um indutor de $10mH$, considerando a frequência de $60Hz$.
- b) Determine a impedância entre a associação em série de um capacitor de $50\mu F$ com o circuito do exercício anterior.
- c) Determine a impedância da associação em série de um capacitor de $200\mu F$ com o circuito do exercício anterior.
- d) Suponha que uma fonte com fasor dado por $100\angle -90^\circ$ foi associada em paralelo com o circuito do exercício anterior. Determine a corrente em todos os elementos do circuito.

□