
Cadeias de Markov

Exercícios

Carlos Marcelo Pedroso

23 de setembro de 2013

Exercício 1: Considere a matriz P a seguir:

$$P = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 11 & 30 \end{vmatrix}$$

Assinale a alternativa que indica a matriz inversa P^{-1} correspondente.

a) $P = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 8 & -14 \end{vmatrix}$

b) $P = \begin{vmatrix} 3 & -11 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$

c) $P = \begin{vmatrix} 11 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$

d) $P = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -11 & 4 \end{vmatrix}$

e) $P = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

☐

Exercício 2: Suponha uma matriz de transição de probabilidade dada por:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,7 \\ 0,9 & 0,1 & 0,0 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Os estados são dados respectivamente por A, B e C. Suponha a seguinte notação: $X_0, X_1, \dots, X_n$, onde n representa o passo da cadeia.

- a) Escreva o diagrama de transição de estados correspondente.
- b) Determine $P(X_1 = A | X_0 = B)$.
- c) Determine $P(X_1 = C | X_0 = A)$.
- d) Determine $P(X_2 = A | X_0 = A)$.
- e) Determine $P(X_2 = B | X_0 = A)$.
- f) Se $P[X_0 = A, X_0 = B, X_0 = C] = [0,1 \ 0,5 \ 0,4]$, calcule $P(X_1 = C)$.

□

Exercício 3: Considere o problema de transmitir uma mensagem binária (bit 0 ou 1) através de um canal consistindo de diversos estágios, onde a transmissão em cada estágio possui uma probabilidade fixa de erro, dada por α . Suponha que o bit 0 foi transmitido no primeiro estágio (ou $X_0 = 0$) e o sinal recebido no n -ésimo estágio seja dado por X_n . Utilizando cadeias de Markov, supondo que a ocorrência de erro em cada estágio é um evento independente, determine:

- a) Matriz de transição de probabilidade para o sistema e diagrama de transição de estados correspondente.
- b) $P(X_1 = 0 | X_0 = 0)$, ou seja a probabilidade de recebimento do bit correto no primeiro estágio.
- c) $P(X_2 = 0 | X_0 = 0)$, ou seja a probabilidade de recebimento do bit correto no segundo estágio.
- d) $P(X_2 = 0, X_1 = 0 | X_0 = 0)$, ou seja a probabilidade de recebimento do bit correto no primeiro e no segundo estágio. De que forma isto é diferente do item anterior?
- e) Deduza a expressão com a probabilidade de recebimento do bit correto um sistema com 3 estágios.
- f) Calcule as probabilidades de estado estacionário para o item anterior (sistema com 3 estágios) e forneça uma explicação para o significado destes resultados
- g) Considere que o sistema possui 2 estágios, mas com probabilidade de erro diferente para cada estágio, respectivamente dado por α e β . Para este caso, calcule a expressão que indica a probabilidade de recebimento do bit correto na recepção.

□

Exercício 4: Partículas se movem entre os estados, que representam a localização de certa partícula em um dado intervalo fixo de tempo. A partícula pode se encontrar nos estados A, B e C, com matriz de transição de probabilidades correspondente dada por:

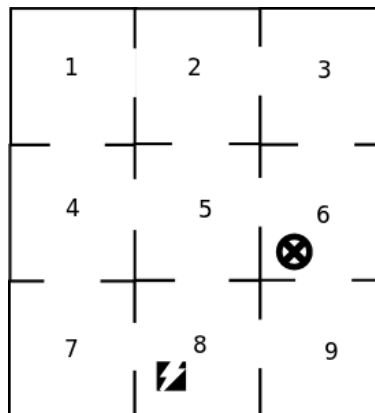
$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Determine:

- a) $P(X_1 = A | X_0 = A)$.
- b) $P(X_2 = A | X_0 = A)$.
- c) $P(X_3 = A | X_0 = A)$.
- d) $P(X_4 = A | X_0 = A)$.
- e) Probabilidades de estado estacionário.

□

Exercício 5: Considere novamente o problema do rato no labirinto. No entanto, desta vez, em um dos lugares estará a comida e em outro um dispositivo que dá um choque no rato. Estes dois estados serão considerados absorventes, encerrando o experimento. O rato pode iniciar em qualquer um dos lugares do labirinto, que tem a configuração apresentada a seguir.



Note que na célula 8 o rato leva um choque e na célula 6 ele encontra a comida. Quando atingir um destes dois lugares, o experimento é encerrado. Desta forma responda as seguintes questões:

- a) Escreva a matriz de transição de probabilidade do sistema.
- b) Determine o número médio de passos para absorção se o estado inicial é $X_0 = 1$.
- c) Determine o número médio de visitas em cada estado (lugar, célula do labirinto) se o estado inicial é $X_0 = 1$.
- d) Determine a probabilidade do sistema encerrar no estado 8 ou no estado 6, para os casos onde o estado inicial é $X_0 = 1$, $X_0 = 4$ e $X_0 = 5$.

□

Exercício 6: Considere a cadeia de Markov com matriz de transição dada por:

$$P = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Note que a matriz apresentada é absorvente. Calcule o número médio de passos para a absorção.

□