

Modelagem e Avaliação de Desempenho

Pós Graduação em Engenharia Elétrica - PPGEE
Prof. Carlos Marcelo Pedroso

Cadeias de Markov

- Em 1907, Andrew Markov iniciou um estudo sobre um modelo onde o resultado de um experimento depende do resultado de um experimento anterior;
- Este processo de modelagem é conhecido atualmente como Cadeias de Markov (*Markov Chain*).

Cadeias de Markov

- Uma cadeia de Markov pode ser descrita da seguinte forma
 - Considere um conjunto de estados $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$
 - O processo inicia-se em um destes estados e se move sucessivamente de um estado para outro;
 - Cada troca é chamada de passo;
 - Se o estado corrente é s_i , então ela se move para o estado s_j com uma probabilidade denotada por p_{ij} , e esta probabilidade não depende dos estados anteriores da cadeia de Markov.
 - As probabilidades p_{ij} são chamadas de probabilidades de transição.

Exemplo

- Suponha que a Terra de Oz foi abençoada com muitas coisa, menos com bom tempo. Eles nunca tem dois dias com com tempo em seguida. Se há um dia bom, é mais provável ter neve ou chuva no próximo dia. Se há neve ou chuva, existe uma chance de haver tempo bom no próximo dia. Suponha a cadeia de Markov que representa a transição destes estados, onde R representa chuva, N representa tempo bom e S representa neve.

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \text{R} & \text{N} & \text{S} \\ \text{R} & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ \text{N} & 1/2 & 0 & 1/2 \\ \text{S} & 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{array} \end{array}$$

Matriz P

- P é chamada *matriz de transição* e possui algumas propriedades interessantes.
- As linhas representam a probabilidade de transição de um estado para outro.
- Para calcular a probabilidade da cadeia se encontrar no estado j , mas a n passos adiante, pode-se calcular P^n .

Exemplo

- Para o caso do exemplo anterior (previsão do tempo na terra de Oz, temos:

$$\mathbf{P}^1 = \begin{array}{c} \text{Rain} \\ \text{Nice} \\ \text{Snow} \end{array} \begin{array}{ccc} \text{Rain} & \text{Nice} & \text{Snow} \\ \left(\begin{array}{ccc} .500 & .250 & .250 \\ .500 & .000 & .500 \\ .250 & .250 & .500 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\mathbf{P}^2 = \begin{array}{c} \text{Rain} \\ \text{Nice} \\ \text{Snow} \end{array} \begin{array}{ccc} \text{Rain} & \text{Nice} & \text{Snow} \\ \left(\begin{array}{ccc} .438 & .188 & .375 \\ .375 & .250 & .375 \\ .375 & .188 & .438 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\mathbf{P}^3 = \begin{array}{c} \text{Rain} \\ \text{Nice} \\ \text{Snow} \end{array} \begin{array}{ccc} \text{Rain} & \text{Nice} & \text{Snow} \\ \left(\begin{array}{ccc} .406 & .203 & .391 \\ .406 & .188 & .406 \\ .391 & .203 & .406 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\mathbf{P}^4 = \begin{array}{c} \text{Rain} \\ \text{Nice} \\ \text{Snow} \end{array} \begin{array}{ccc} \text{Rain} & \text{Nice} & \text{Snow} \\ \left(\begin{array}{ccc} .402 & .199 & .398 \\ .398 & .203 & .398 \\ .398 & .199 & .402 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\mathbf{P}^5 = \begin{array}{c} \text{Rain} \\ \text{Nice} \\ \text{Snow} \end{array} \begin{array}{ccc} \text{Rain} & \text{Nice} & \text{Snow} \\ \left(\begin{array}{ccc} .400 & .200 & .399 \\ .400 & .199 & .400 \\ .399 & .200 & .400 \end{array} \right) \end{array}$$

$$\mathbf{P}^6 = \begin{array}{c} \text{Rain} \\ \text{Nice} \\ \text{Snow} \end{array} \begin{array}{ccc} \text{Rain} & \text{Nice} & \text{Snow} \\ \left(\begin{array}{ccc} .400 & .200 & .400 \\ .400 & .200 & .400 \\ .400 & .200 & .400 \end{array} \right) \end{array}$$

Matriz P

- Para se calcular a probabilidade de se encontrar no estado j dado um estado i , n passos adiante, podemos calcular:

$$\mathbf{u}^{(n)} = \mathbf{u}\mathbf{P}^n$$

- Exemplo: suponha que a probabilidade inicial para o clima na terra de Oz seja de $(1/3, 1/3 \text{ e } 1/3)$ e deseja-se fazer a previsão do tempo para 3 dias. Neste caso,

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{(3)} = \mathbf{u}\mathbf{P}^3 &= (1/3, \quad 1/3, \quad 1/3) \begin{pmatrix} .406 & .203 & .391 \\ .406 & .188 & .406 \\ .391 & .203 & .406 \end{pmatrix} \\ &= (.401, \quad .188, \quad .401) .\end{aligned}$$

Exercício

Considere três grandes universidades americanas, Harvard, Darmouth e Yale. Suponha que os filhos de ex-alunos Harvard tem 80% de chance de estudar na mesma escola e os demais estudam em Yale. Suponha que 40% dos filhos de ex-alunos de Yale estudam também em Yale e os demais dividem-se igualmente entre Darmouth e e Harvard. Suponha que os filhos de ex-alunos de Darmouth tem 70% de chance de estudar em Darmouth, enquanto 20% entram em Harvard e 10% em Yale.

- 1) Encontre a matriz P .
- 2) Encontre a probabilidade de que um neto de um ex-aluno de Harvard estude em Darmouth.
- 3) Encontre a probabilidade de que um bisneto de um ex-aluno de Darmouth estude em Yale.



$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{H} & \text{Y} & \text{D} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{H} \\ \text{Y} \\ \text{D} \end{matrix} & \begin{pmatrix} .8 & .2 & 0 \\ .3 & .4 & .3 \\ .2 & .1 & .7 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

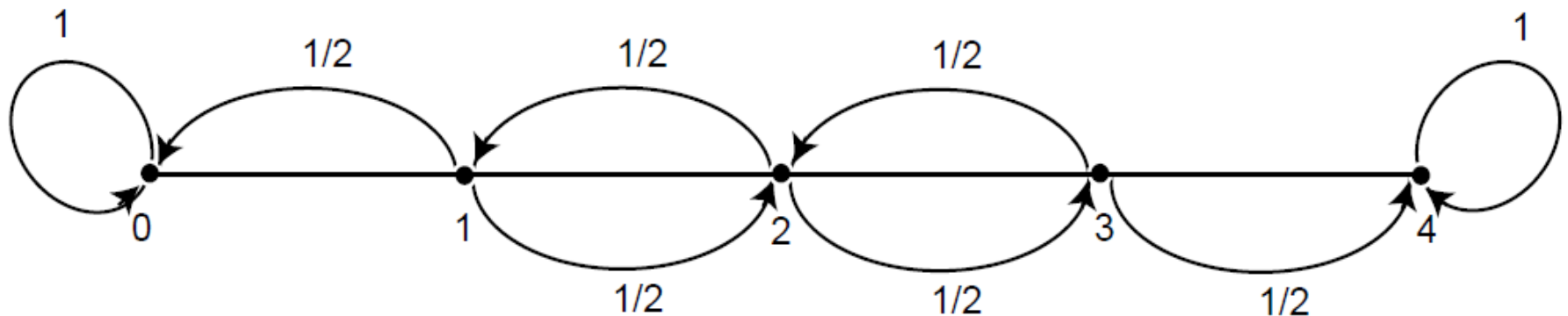
Cadeias de Markov Absorventes

Considere uma cadeia de Markov onde existem estados onde não é possível realizar a transição para nenhum outro estado.

- Este estado é denominado estado absorvente.
- Um estado absorvente apresenta $p_{ij} = 1$.
- Esta é uma variação especial das cadeias de Markov.
- Em uma cadeia de Markov absorvente, o número de passos até atingir o estado absorvente é chamado transiente.

Cadeias de Markov Absorventes

- ❑ Exemplo. Um bêbado caminha na rua. Cada número de 1 a 3 representa um quarteirão, enquanto o número 0 representa a casa dele e o número 4 representa o bar.
- ❑ Escreva a matriz P correspondente.



Cadeias de Markov Absorventes

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Cadeias de Markov Absorventes

- As questões que surgem são:
 - Qual a probabilidade de que o processo seja eventualmente absorvido?
 - Na média, quantos passos serão dados até que o processo seja absorvido?
 - Na média, quantas vezes um dado estado transiente será visitado até que o processo seja absorvido?
- As respostas a estas questões dependem do estado inicial e da matriz de transição.

Cadeias de Markov Absorventes

- Considere a matriz P com r estados absorventes (ABS) e t estados transientes (TR). A matriz P canônica é formada conforme abaixo:
- I é uma matriz identidade r por r .
 - O é uma matriz 0 r por t .
 - R é uma matriz t por r .
 - Q é uma matriz t por t .

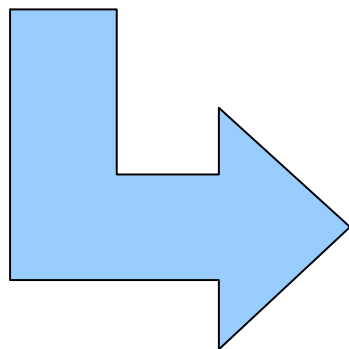
$$P = \begin{array}{cc} & \begin{array}{c} \text{TR.} \\ \text{ABS.} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{TR.} \\ \text{ABS.} \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} Q & R \\ \hline 0 & I \end{array} \right) \end{array}$$

Exemplo

□ No exemplo do bêbado,

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{TR.} & \text{ABS.} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{TR.} \\ \text{ABS.} \end{matrix} & \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{Q} & \mathbf{R} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array} \right) \end{matrix}$$



$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{matrix} & \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{matrix}$$

Cadeias de Markov Absorventes

- Para uma cadeia de Markov absorvente, a matriz $N=(I-Q)^{-1}$ é chamada matriz fundamental para P .
 - Um elemento n_{ij} de N fornece o número esperado de vezes que o processo estará no estado transiente s_j caso o estado inicial seja o estado s_i

Cadeias de Markov Absorventes

□ Exemplo:
$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{I} - \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{N} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- Iniciando-se no estado 2, o número médio de vezes em que o sistema permanece nos estados 1, 2 e 3 será, respectivamente, 1, 2 e 1.

Cadeias de Markov Absorventes

- Outro fator importante a se considerar é o número médio de passos para a absorção.
- Seja t número de passos até a absorção, dado que o estado inicial seja s_i e t ser o vetor coluna que armazena o número médio de passos para absorção a partir dos estados transientes e $\mathbf{c}$ é um vetor coluna com todos os elementos iguais a 1.
 - Então:

$$t = Nc$$

- Calcular para o exemplo anterior.

Cadeias de Markov Absorventes

- Um analista pode estar interessado também em calcular a probabilidade do sistema encerrar em um dos estados absorventes.
- Neste caso, se b_{ij} representar a probabilidade da cadeia ser absorvida por um estado s_j caso o estado inicial seja um estado transiente s_i , então a matriz B (t por r) será dada por:

$$B = NR$$

Resposta

$$\mathbf{N} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \end{matrix} .$$

$$\begin{aligned} \mathbf{t} = \mathbf{N}\mathbf{c} &= \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Cadeias de Markov Absorventes

- Um analista pode estar interessado também em calcular a probabilidade do sistema encerrar em um dos estados absorventes.
- Neste caso, se b_{ij} representar a probabilidade da cadeia ser absorvida por um estado s_j caso o estado inicial seja um estado transiente s_i , então a matriz B (t por r) será dada por:

$$B = NR$$

Exemplo

□ No exemplo do bêbado:

$$\mathbf{R} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \end{matrix} .$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{NR} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \end{matrix} .$$

Cadeias de Markov Ergódicas

- Uma cadeia de Markov é chamada de ergódica se é possível ir de um estado para qualquer outro da cadeia (não necessariamente em um único passo).
 - Seja P a matriz de transição de uma cadeia de Markov. Diz-se que P é regular se alguma potência de P contém somente entradas positivas (ou seja, alguma potência de P não contém nenhuma entrada igual a zero), diz-se que a cadeia de Markov é regular.
 - Uma cadeia de Markov absorvente não pode ser regular.

Cadeias de Markov Ergódicas

- Suponha a matriz de transição de probabilidade dada por

$$P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A cadeia é ergódica

- No entanto, não é regular (se o número de passo é ímpar não é possível atingir um dado estado)

Outro exemplo

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} .$$

- A cadeia é ergódica e regular?
- E a cadeia do exemplo do clima na terra de Oz?

Cadeias de Markov Regulares

- Seja P uma matriz de transição para uma cadeia de markov regular. Então, conforme n tende a infinito, as potências P^n se aproximam da matriz limite W em que todas as linhas são iguais (vetor w). O vetor w é um vetor de probabilidade onde todos os componentes são positivos e sua soma é igual a 1.
 - Ver exemplo da terra de Oz.

Cadeias de Markov Regulares

□ No exemplo,

$$\mathbf{P}^6 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & \text{R} & \text{N} & \text{S} \\ \text{R} & .4 & .2 & .4 \\ \text{N} & .4 & .2 & .4 \\ \text{S} & .4 & .2 & .4 \end{array} \end{array}$$

□ De modo geral,

$$\mathbf{W} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^n ,$$

Cadeias de Markov Regulares

- Utilizando o resultado, é possível determinar o valor limite fazendo:

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1$$

$$(w_1 \quad w_2 \quad w_3) \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} = (w_1 \quad w_2 \quad w_3) .$$

Cadeias de Markov Regulares

- Utilizando o resultado, é possível determinar o valor limite fazendo:

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1$$

$$(w_1 \quad w_2 \quad w_3) \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} = (w_1 \quad w_2 \quad w_3) .$$

Cadeias de Markov Regulares

□ De onde se obtem

$$\begin{aligned}w_1 + w_2 + w_3 &= 1 , \\(1/2)w_1 + (1/2)w_2 + (1/4)w_3 &= w_1 , \\(1/4)w_1 + (1/4)w_3 &= w_2 , \\(1/4)w_1 + (1/2)w_2 + (1/2)w_3 &= w_3 .\end{aligned}$$

□ Resolvendo o sistema, obtemos:

$$\mathbf{w} = (.4 \quad .2 \quad .4)$$

Cadeias de Markov Regulares

- Utilizando o resultado, é possível determinar o valor limite fazendo:

$$w_1 + w_2 + w_3 = 1$$

$$(w_1 \quad w_2 \quad w_3) \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} = (w_1 \quad w_2 \quad w_3) .$$

Cadeias de Markov

- Para uma cadeia de Markov Ergodica, existe um único vetor w tal que $wP=w$, com w positivo. Qualquer linha do vetor v tal que $vP=v$ é múltiplo de w . Qualquer coluna do vetor x tal que $Px=x$ é um vetor constante.

Cadeias de Markov Ergodica

- Para uma cadeia de Markov Ergodica,

$$P\left(|H_j^{(n)} - w_j| > \epsilon\right) \rightarrow 0$$

- O que significa que a longo prazo a permanência em cada estado é dada pelo vetor W , independentemente do estado inicial

Cadeias de Markov - Simulação

SSRNRNSSSSSSNRNSSSRNSRNSSSNSRRRNSSSNRRSSSSNRSSNSRRRRRRNSSS
SSRRRSNSNRRRRSRNRNSNSRRNRNRSSNSRNRNSSRRSRNSSSNRSRRSSNRNR
RNSSSSNSSNSRNRNSSNSSRNSSSRNRNRNRNRSSSNRNSRNSNRNRSSSRSS
NRSSSNSSSSSSNSSSNNSNSRRNRNRNRNRSSSNRRSSSSSRRRNRNRSSSSR
RNRRRSRSSRRRRSSRNRNRNRNRNSSRNRSSSNRNSNRNRNRNRNRNRNRNRNRNR
RRSSSRNRNRNRNSNSSSSSRRRRSRNRSSRRRRSSSRNRNRNRNRNRNRNRNRNR
RNSNRNSNRNRNRNRNRNRSSSNRSSSRNRSSSNNSNRNSNSSSNRRSRNRNRNRNRNR
SSNSRNSNRNRNRNRNRNRSSSRNSRNRSSNSRNRNRNRNRNRNRNRNRNRNRNR
NSRRRNSSRRRNSSSNRRSRNSSRNRNRNRNRNRNRNRNRNRNRNRNRNRNRNRNR
SNS

State	Times	Fraction
R	217	.413
N	109	.208
S	199	.379

Exercício

- Suponha que um experimento possui a matriz P como segue:

$$P = \begin{pmatrix} .5 & .5 \\ p & 1 - p \end{pmatrix}$$

- O valor de p é desconhecido. No entanto, repetindo-se muitas vezes o experimento, 20% das vezes o sistema encontram-se no estado 1 e 80% no estado 2.
- Encontre o valor p .

Número médio de passos médio para primeira passagem e recorrência

- Duas medidas quantitativas de interesse para cadeias de Markov ergódicas são:
 - Número médio de passos para retornar a um determinado estado;
 - Número médio de passos para ir de um estado para outro.

Número médio de passos para primeira passagem

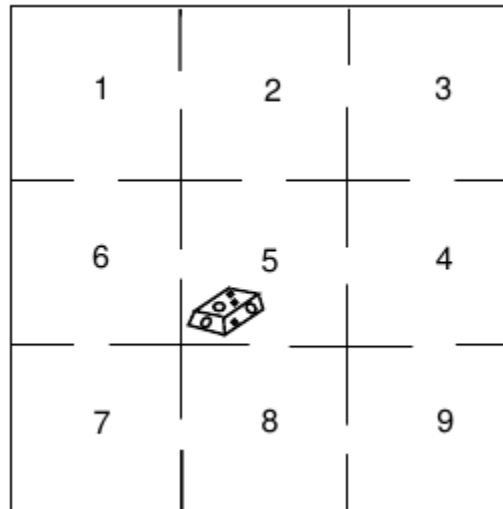
- Uma maneira de analisar o problema é o seguinte:
 - Suponha que a cadeia de Markov em estudo é ergódica (qualquer estado pode ser atingido a partir de qualquer estado inicial).
 - Para determinar o número médio de passos para atingir um determinado estado i , basta fazer este estado um estado absorvente.
 - Depois, apenas é necessário fazer o estudo com a teoria de cadeias de Markov absorventes.

Número médio de passos para primeira passagem

- Uma maneira de analisar o problema é o seguinte:
 - Suponha que a cadeia de Markov em estudo é ergódica (qualquer estado pode ser atingido a partir de qualquer estado inicial).
 - Para determinar o número médio de passos para atingir um determinado estado i , basta fazer este estado um estado absorvente.
 - Depois, apenas é necessário fazer o estudo com a teoria de cadeias de Markov absorventes.

Tempo médio para primeira passagem

□ Exemplo: Labirinto



Número médio de passos para primeira passagem

□ Exemplo: Labirinto

$$\mathbf{P} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} & \left(\begin{array}{ccccccccc} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{array} \right) \end{matrix}$$

Como podemos determinar se o rato é mais esperto ?

- Exemplo: Para calcular o tempo médio para atingir o estado 5, fazemos este estado absorvente:

[illegible]

Número médio de passos para primeira passagem

- Exemplo: Calculamos a matriz fundamental N

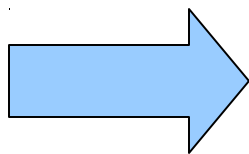
$$N = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 14 & 9 & 4 & 3 & 9 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 14 & 6 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 9 & 14 & 9 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 14 & 2 & 2 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 2 & 14 & 6 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 3 & 9 & 14 & 9 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 4 & 6 & 14 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 9 & 3 & 4 & 9 & 14 \end{pmatrix}$$

- Iniciando-se no estado 1, o número médio de vezes em que o sistema permanece nos estados 1, 2, 3 , ... etc., será, respectivamente, 14, 9, 4.

Número médio de passos para primeira passagem

- Exemplo: Labirinto

$$t = Nc$$



$$Nc = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 6 \\ 5 \\ 5 \\ 6 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- Iniciando-se no estado 1, o sistema leva em média 6 passos para atingir o estado 5 (absorvente). Iniciando-se no estado 2, o sistema leva 5 passos para atingir o estado absorvente e assim por diante.

Número médio de passos para recorrência

- Qual será o número médio de passos em que um estado será visitado novamente?
 - Dado um estado s_i , qual será o número médio de passos que o sistema irá levar para se encontrar novamente no estado s_i no futuro?
 - Dado o vetor w , com a probabilidade limite, basta calcular $1/w_i$ e teremos o número médio de passos para visitar o estado

Número médio de passos para recorrência

- No exemplo do labirinto, pode ser calculado $w.P=w$ (acrescentado somatório de $w_i=1$), obtendo-se:

$$\mathbf{w} = \left(\frac{1}{12} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{12} \right)$$

- De onde pode ser deduzido o vetor r (número médio de passos para recorrência):

$$\mathbf{r} = (12 \quad 8 \quad 12 \quad 8 \quad 6 \quad 8 \quad 12 \quad 8 \quad 12)$$

Cadeias de Markov Ergódicas em *tempo contínuo*

- *Ergodic Continuous Time Markov Chain*
- A novidade é considerar a variável *tempo*.
- Neste caso, o tempo de permanência em cada transição é considerado como exponencialmente distribuído (esta é uma *exigência*, hipótese básica para validade deste raciocínio).
- Considere que o parâmetro que determina a taxa de transição do estado i para o próximo estado j seja dado por q_{ij}

Cadeias de Markov Ergódicas em *tempo contínuo*

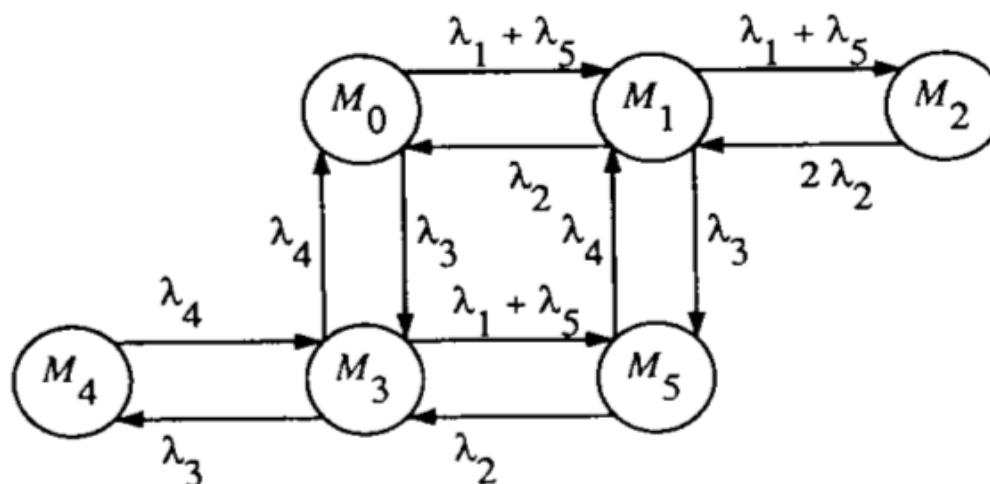
- Desta forma, podemos definir: $\Pi Q = 0, \sum_{i=1}^s \pi_i = 1$
- Onde Q é a matriz de transição de taxas
 - O vetor Π é o vetor de estado estacionário
 - Para o vetor Q , o elemento q_{ii} (diagonal principal) é obtido fazendo-se o complemento do somatório dos demais elementos da linha (ver exemplo em sala).

Cadeias de Markov Ergódicas em *tempo contínuo*

- *Exemplo: Suponha dois servidores operando em cluster. Um servidor falha com uma taxa μ , exponencialmente distribuída (ou seja, o tempo médio entre falhas é dado por $1/\mu$). A taxa de reparo é dada por λ (ou seja, o tempo médio de reparo é dado por $1/\lambda$). Suponha que as instalações de reparo podem trabalhar em dois servidores simultaneamente.*
 - *Deseja-se descobrir expressões para o estado estacionário.*
 - *Qual a probabilidade de falha total do sistema?*
 - *Ver solução apresentada em sala*

Cadeias de Markov Ergódicas em *tempo contínuo*

- *Exercício: Suponha um sistema com diagrama de transição de estados a seguir:*



- *Suponha que as transições possuem distribuição exponencial e λ_i representa as taxas correspondentes. Calcule as probabilidades de estado estacionário.*

Cadeias de Markov Ergódicas em *tempo contínuo*

- *Exemplo: Suponha dois servidores operando em cluster. Um servidor falha com uma taxa μ , exponencialmente distribuída (ou seja, o tempo médio entre falhas é dado por $1/\mu$). A taxa de reparo é dada por λ (ou seja, o tempo médio de reparo é dado por $1/\lambda$). Suponha que as instalações de reparo podem trabalhar em dois servidores simultaneamente.*
 - *Deseja-se descobrir expressões para o estado estacionário.*
 - *Qual a probabilidade de falha total do sistema?*
 - *Ver solução apresentada em sala*