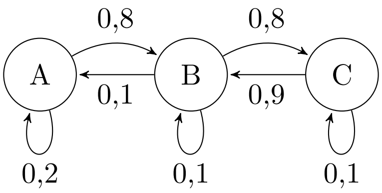
Exercícios

Carlos Marcelo Pedroso, *Universidade Federal do Paraná*

Lista de exercícios sobre Cadeias de Markov para disciplina TE816 do curso de Pós Graduação em Engenharia Elétrica da UFPR. As duas referências que estou usando sobre este assunto são de fato muito boas. A primeira [1] aborda o assunto de maneira fácil e didática, enquanto a segunda [2] se aprofunda na teoria.

1 Fundamentos

Considere o seguinte diagrama de transições de estado:



Os estados são dados respectivamente por A, B e C. Suponha a seguinte notação: $X_0, X_1, \ldots, X_n$, onde n representa o passo da cadeia.

a) Escreva o diagrama de transição de estados correspondente.

b) Determine $P(X_1 = A|X_0 = B)$.

c) Determine $P(X_1 = C|X_0 = A)$.

d) Determine $P(X_2 = A|X_0 = A)$.

e) Determine $P(X_2 = B|X_0 = A)$.

f) Se $P[X_0 = A, X_0 = B, X_0 = C] = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}05 & 0{,}05 \end{bmatrix}$, calcule $P(X_1 = C)$.

g) Calcule as probabilidades de estado estacionário. Mostre os cálculos (não vale fazer P^{100} no matlab).

2 Professor Distraído

Um professor se alterna entre seu gabinete e sua casa. Se na hora da saída estiver chovendo e existir um guarda chuvas (no gabinete ou em casa), o professor sai com o guarda chuva e deixa no destino. Caso não haja guarda chuva disponível, o professor sai na chuva e se molha. Suponha que existe uma probabilidade p de chover em Curitiba e o professor possua 3 guarda chuvas. Determine:

a) Matriz de transição de probabilidade para o sistema e diagrama de transição de estados correspondente.

b) Determine a probabilidade do professor se molhar.

c) Se em Curitiba $p = 0.6$, determine qual será o número mínimo de guarda chuvas para que a probabilidade do professor se molhar seja menor que 5%.

3 Aposentadoria do Engenheiro *parte 1*

Um Engenheiro planeja acumular R$1.600.000,00 para sua aposentadoria. Atualmente ele possui no banco R$100.000,00 e infelizmente todo seu salário é gasto em suas despesas mensais - a família aumentou e ele tem gastos que nem imaginava antes.

Ele está estudando apostar em investimentos de maior risco. Em particular, há um investimento que pode dobrar o capital em cada ano. O investimento remunera bem, mas o risco é alto: ou ele tem o lucro, ou perde tudo. Ao final do ano, a probabilidade de dobrar o capital é p e a probabilidade de perder tudo é de $1 - p$.

Se o Engenheiro investir todo o seu dinheiro, determine:

a) Probabilidade de atingir a meta;

b) Probabilidade de ficar sem nada;

c) Número médio de anos para ficar sem nada;

d) Número médio de anos para atingir a meta.

4 Aposentadoria do Engenheiro *parte 2*

Considere o problema anterior. O Engenheiro era esperto, tinha estudado processos estocásticos na universidade, fez as contas e pensou em uma nova estratégia. Desta vez, ele planeja investir somente metade de seu dinheiro a cada ano se o valor total for menor ou igual a R$100.000,00. Se ele possuir um valor maior que R$100.000,00, ele irá investir todo o lucro do ano no próximo ano. Considere que se o Engenheiro tiver menos que R$10.000,00 no banco, ele ficará desesperado e gastará o dinheiro todo com mulheres e bebidas. Felizmente, pesquisando o mercado, o Engenheiro descobriu que o valor de p é de 40%.

Determine:

a) Probabilidade de atingir a meta;

b) Probabilidade de ficar sem nada;

c) Número médio de anos para ficar sem nada;

d) Número médio de anos para atingir a meta.

Qual das duas estratégias é melhor?

5 Lançamento de moedas

Considere o lançamento de uma moeda equilibrada. O resultado pode ser cara (A) ou coroa (O), com uma probabilidade de 1/2. Utilizando cadeias de Markov, determine o número médio de lançamentos para obter a sequência AOA.

6 Empresa de transporte

Uma empresa de transporte possui 2 caminhões. Considere que o tempo gasto no atendimento das solicitações (T_a) é exponencialmente distribuído. Também são exponencialmente distribuídos o intervalo de chegada de solicitações (T_s), o tempo gasto na oficina para reparo de um defeito no caminhão (T_o) e o intervalo de tempo entre defeitos em um caminhão (T_d).

Considerando todas estas variáveis, *determine a probabilidade de não haver caminhão disponível para atender uma solicitação.* Este problema deve ser resolvido com cadeias de Markov de tempo contínuo. Use a seguinte notação:

$\mu = 1/T_a$ Taxa de atendimento das solicitações;

$\lambda = 1/T_s$ Taxa de chegada de solicitações;

$\alpha = 1/T_d$ Taxa de defeitos de um caminhão;

$\beta = 1/T_o$ Taxa de reparo de um caminhão;

Dica. Você pode usar o software Maxima para resolver expressões algébricas e economizar tempo na solução deste problema.

Referências

[1] Charles M. Grinstead and J. Laurie Snell, 1998. Introduction to Probability. American Mathematical Society, 2nd edition, 1998.

[2] H.M. Taylor and S. Karlin, 1998. An Introduction to Stochastic Modeling. Academic Press, 3rd edition, 1998.