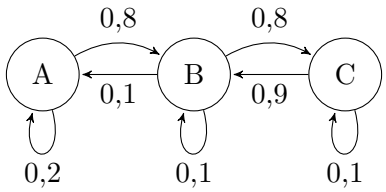
Exercícios - G

Carlos Marcelo Pedroso, *Universidade Federal do Paraná*

Gabarito da lista de exercícios sobre Cadeias de Markov para disciplina TE816-2016 do curso de Pós Graduação em Engenharia Elétrica da UFPR. Este gabarito foi elaborado para orientar estudantes sobre (1) os procedimentos usados para resolução dos exercícios (2) aplicação de softwares auxiliares, com o uso do Maxima e do Gnuplot e (3) o uso do Latex para formatação. As duas referências que estou usando sobre este assunto são de fato muito boas. A primeira [1] aborda o assunto de maneira fácil e didática, enquanto a segunda [2] se aprofunda na teoria.

1 Fundamentos

Considere o seguinte diagrama de transições de estado:



Os estados são dados respectivamente por A, B e C. Suponha a seguinte notação: $X_0, X_1, \ldots, X_n$, onde n representa o passo da cadeia.

a) Escreva o diagrama de transição de estados correspondente.

b) Determine $P(X_1 = A | X_0 = B)$.

c) Determine $P(X_1 = C | X_0 = A)$.

d) Determine $P(X_2 = A | X_0 = A)$.

e) Determine $P(X_2 = B | X_0 = A)$.

f) Se $P[X_0 = A, X_0 = B, X_0 = C] = [\,0{,}9 \;\; 0{,}05 \;\; 0{,}05\,]$, calcule $P(X_1 = C)$.

g) Calcule as probabilidades de estado estacionário. Mostre os cálculos (não vale fazer P^{100} no matlab).

1.1 Soluções

1.1.1 Item a)

```
P:matrix([0.2,0.8,0],[0.1,0.1,0.8],[0,0.9,0.1]);
tex (''%i1);
```

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.8 \\ 0 & 0.9 & 0.1 \end{pmatrix}$$

1.1.2 Item b)

$P(X_1 = A|X_0 = B) = 0.1$

1.1.3 Item c)

$P(X_1 = C|X_0 = A) = 0$

1.1.4 Item d)

```
P2 = P.P;
tex (''%o3);
```

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.12 & 0.24 & 0.64 \\ 0.03 & 0.81 & 0.16 \\ 0.09 & 0.18 & 0.73 \end{pmatrix}$$

$P(X_2 = A|X_0 = A) = 0.12$

1.1.5 Item e)

$P(X_2 = B|X_0 = A) = 0.24$

1.1.6 Item f)

```
(%i5) U:matrix([0.9,0.5,0.5]);
(%o5)                                   [ 0.9  0.05  0.05 ]
(%i6) U.P;
(%o6)                                   [ 0.185  0.77  0.045 ]
```

$P(X_1 = C) = 0.45$

1.1.7 Item g)

```
W:matrix([w1,w2,w3]);

P:matrix([0.2,0.8,0],[0.1,0.1,0.8],[0,0.9,0.1]);
W.P=W;

# [ 0.1 w2 + 0.2 w1  0.9 w3 + 0.1 w2 + 0.8 w1  0.1 w3 + 0.8 w2 ] = [ w1  w2  w3 ]
solve([0.1*w2 + 0.2*w1-w1, 0.9*w3 + 0.1*w2 + 0.8*w1-w2, w1+w2+w3-1],[w1,w2,w3]);
```

$w_1 = 9/145; w_2 = 72/145; w_3 = 64/145$

2 Professor Distraído

Um professor se alterna entre seu gabinete e sua casa. Se na hora da saída estiver chovendo e existir um guarda chuvas (no gabinete ou em casa), o professor sai com o guarda chuva e deixa no destino. Caso não haja guarda chuva disponível, o professor sai na chuva e se molha. Suponha que existe uma probabilidade p de chover em Curitiba e o professor possua 3 guarda chuvas. Determine:

a) Matriz de transição de probabilidade para o sistema e diagrama de transição de estados correspondente.

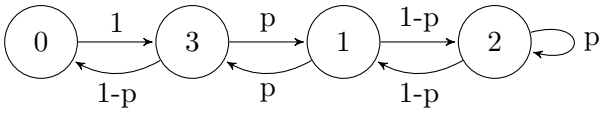
b) Determine a probabilidade do professor se molhar.

c) Se em Curitiba $p = 0.6$, determine qual será o número mínimo de guarda chuvas para que a probabilidade do professor se molhar seja menor que 5%.

2.1 Solução

2.1.1 item a)

A melhor abordagem neste caso é representar o número de guarda chuvas no local onde o professor está. A transição de estado representa um dia.



2.1.2 item b)

```
W:matrix([w1,w2,w3,w4]);
P:matrix([0,0,0,1],[0,0,1-p,p],[0,1-p,p,0],[1-p,p,0,0]);
W.P=W;
# [(1 - p) w4  p w4 + (1 - p) w3  p w3 + (1 - p) w2  p w2 + w1 ] = [ w1  w2  w3  w4 ]
```

Sistema de equações

$$(1-p)\,w_4 = w_1 \quad (1)$$
$$w_4 + 1 - p\,w_3 = w_2 \quad (2)$$
$$p\,w_3 + (1-p)\,w_2 = w_3 \quad (3)$$
$$p\,w_2 + w_1 = w_4 \quad (4)$$

Eliminando (4) e em seu lugar usando $w_1 + w2 + w_3 + w_4 = 1$ podemos resolver:

```
solve( [(1-p)*w4-w1, p*w4 + (1 - p)*w3 - w2, p*w3 + (1 - p)*w2 - w3, w1+w2+w3+w4-1  ],
       [w1,w2,w3,w4]);
#              p - 1            1            1             1
#(%o74) [[w1 = -----, w2 = - ------, w3 =- ------, w4 =- ------]]
#              p - 4          p - 4        p - 4         p - 4
```

Resposta $w_1 * p = 0.07059$

2.1.3 item b)

Resposta: $P_{\text{molhar}} = p\,w_1 = p\left[\frac{p-1}{p-4}\right]$

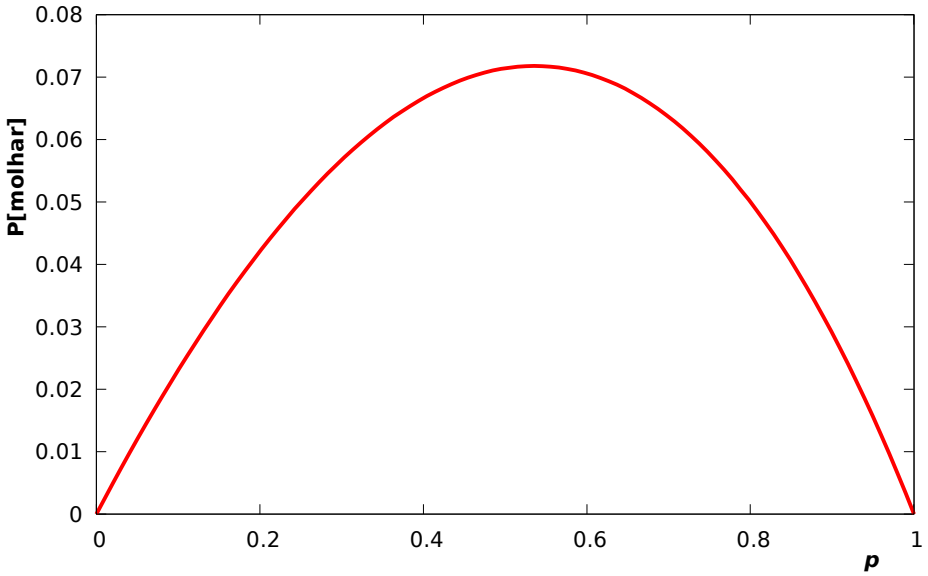
2.1.4 item c)

Resposta: Substituindo $p = 0.6$ obtemos $P_{\text{molhar}} = 0.07059$

Uma breve análise. Plotando o gráfico de P_{molhar} com os seguintes comandos do gnuplot,

```
gnuplot> f(x)=x*(1-x)/(4-x)
gnuplot> set xrange [0:1]
gnuplot> set terminal pdf
Terminal type set to 'pdfcairo'
Options are ' size 5.00in, 3.00in '
gnuplot> set output 'P-molhar.pdf'
gnuplot> plot f(x) title 'P[molhar]' with lines linestyle 1
```

obtemos



Paradoxalmente, quanto maior a probabilidade de chover, menor a probabilidade do professor se molhar. Por curiosidade, derivando a expressão $p.\frac{p-1}{p-4}$ e igualando a zero, obtemos um ponto de máximo em $x = 0.68$

3 Aposentadoria do Engenheiro *parte 1*

Um Engenheiro planeja acumular R$1.600.000,00 para sua aposentadoria. Atualmente ele possui no banco R$100.000,00 e infelizmente todo seu salário é gasto em suas despesas mensais - a família aumentou e ele tem gastos que nem imaginava antes.

Ele está estudando apostar em investimentos de maior risco. Em particular, há um investimento que pode dobrar o capital em cada ano. O investimento remunera bem, mas o risco é alto: ou ele tem o lucro, ou perde tudo. Ao final do ano, a probabilidade de dobrar o capital é p e a probabilidade de perder tudo é de $1 - p$.

Se o Engenheiro investir todo o seu dinheiro, determine:

a) Probabilidade de atingir a meta;

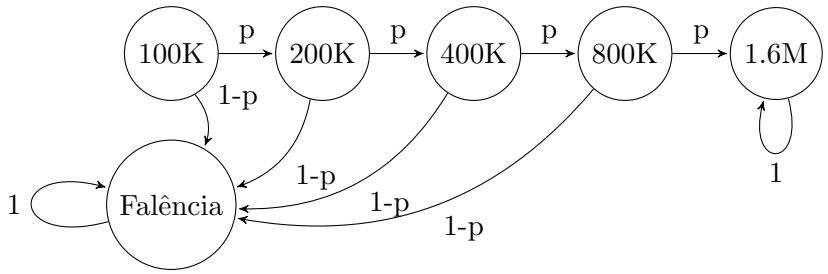
b) Probabilidade de ficar sem nada;

c) Número médio de anos para ficar sem nada;

d) Número médio de anos para atingir a meta.

3.1 Solução

Podemos escrever o seguinte diagrama de transição de estados, onde no interior do estado é colocada a quantidade de dinheiro disponível ao Engenheiro. O Estado inicial é "100K".




```
Q:matrix([0,p,0,0],[0,0,p,0],[0,0,0,p],[0,0,0,0]);
I:matrix([1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,1,0],[0,0,0,1]);
X:I-Q;
N:invert(X);
c:matrix([1],[1],[1],[1]);
t:N.c;
fullratsimp(t);
R:matrix([1-p,0],[1-p,0],[1-p,0],[1-p,p]);
B:N.R;
fullratsimp(B);
tex (''%o7);
tex (''%o10);
```

$$t = \begin{pmatrix} p^3+p^2+p+1 \\ p^2+p+1 \\ p+1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1-p^4 & p^4 \\ 1-p^3 & p^3 \\ 1-p^2 & p^2 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

3.2 item a)

Probabilidade de atingir a meta: p^4 *(vai ser difícil do engenheiro terminar rico).*

3.3 item b)

Probabilidade de ficar sem nada:$1-p^4$

3.4 item c)

Número médio de anos para ficar sem nada: $(1-p^4).(p^3+p^2+p+1)$

3.5 item d)

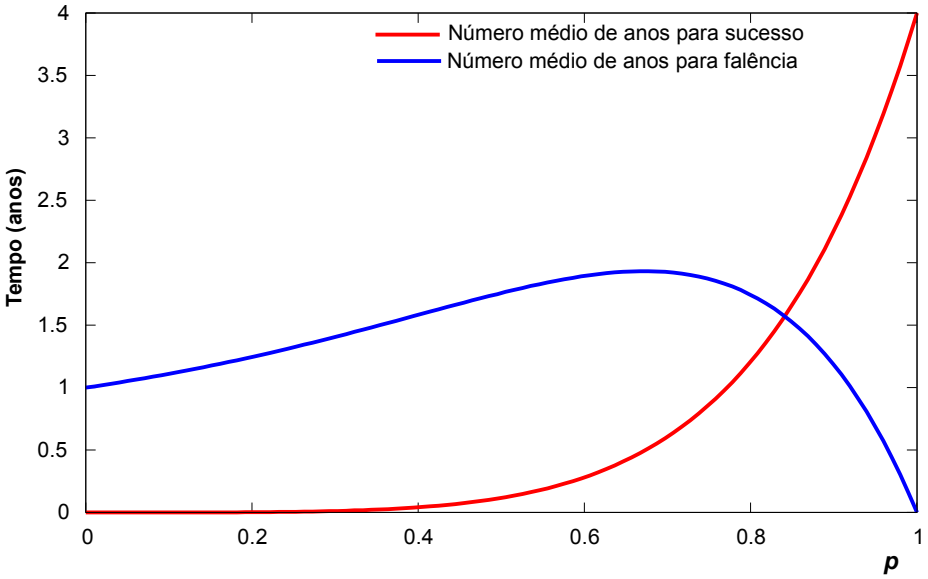
Número médio de anos para atingir a meta: $(p^4).(p^3+p^2+p+1)$

Uma análise interessante a respeito deste resultado. Usando o *gnuplot* para fazer o gráfico da função, utilizando os comandos:

```
gnuplot> f(x)=(x**4)*(x**3+x**2+x+1)
gnuplot> g(x)=(1-x**4)*(x**3+x**2+x+1)
gnuplot> plot f(x), g(x)
```

```
gnuplot> set xrange [0:1]
gnuplot> set terminal pdf
gnuplot> set output 'Falencia.pdf'
gnuplot> plot f(x), g(x)
```

obtemos:



Como p representa a probabilidade de dobrar o capital a cada ano, observa-se no gráfico que para $p = 1$ o Engenheiro nunca irá falir, e o número médio de anos para falência é zero. Se $p = 0$, o Engenheiro irá perder tudo logo no primeiro ano. Também é possível observar que se p for muito pequeno o número médio de anos para falência é muito pequeno. A estratégia parece começar a melhorar um pouco quando as curvas se cruzam.

Observe o diagrama de transição de estados. Mesmo sem usar a teoria de cadeias de Markov, a resposta pode ser encontrada facilmente.

4 Aposentadoria do Engenheiro *parte 2*

Considere o problema anterior. O Engenheiro era esperto, tinha estudado processos estocásticos na universidade, fez as contas e pensou em uma nova estratégia. Desta vez, ele planeja investir somente metade de seu dinheiro a cada ano se o valor total for menor ou igual a R$100.000,00. Se ele possuir um valor maior que R$100.000,00, ele irá investir todo o lucro do ano no próximo ano. Considere que se o Engenheiro tiver menos que R$10.000,00 no banco, ele ficará desesperado e gastará o dinheiro todo com mulheres e bebidas. Felizmente, pesquisando o mercado, o Engenheiro descobriu que o valor de p é de 40%.

Determine:

a) Probabilidade de atingir a meta;

b) Probabilidade de ficar sem nada;

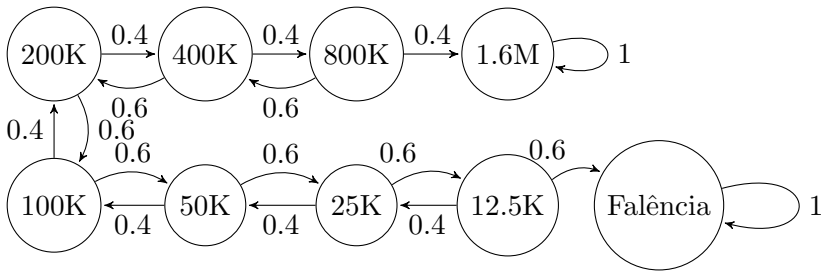
c) Número médio de anos para ficar sem nada;

d) Número médio de anos para atingir a meta.

Qual das duas estratégias é melhor?

4.1 Solução

Para resolver o problema, podemos escrever o diagrama de transição de estados a seguir:



O estado 0 é a falência. O estado 8 é o sucesso. A solução será aproximada porque tivemos que forçar uma modelagem utilizando um número finito de estados. No entanto, a resposta será próxima suficiente para permitir a análise. O estado inicial é o estado 4.

Utilizando o *Maxima*:

```
Q:matrix( [0    ,0.4  ,0   ,0    ,0   ,0    ,0],
          [0.6  ,0    ,0.4 ,0    ,0   ,0    ,0],
          [0    ,0.6  ,0   ,0.4  ,0   ,0    ,0],
          [0    ,0    ,0.6 ,0    ,0.4 ,0    ,0],
          [0    ,0    ,0   ,0.6  ,0   ,0.4  ,0],
          [0    ,0    ,0   ,0    ,0.6 ,0    ,0.4],
          [0    ,0    ,0   ,0    ,0   ,0.6  ,0]);

I:matrix([1,0,0,0,0,0,0],
         [0,1,0,0,0,0,0],
         [0,0,1,0,0,0,0],
         [0,0,0,1,0,0,0],
         [0,0,0,0,1,0,0],
         [0,0,0,0,0,1,0],
         [0,0,0,0,0,0,1]);

X:I-Q;
N:invert(X);
fullratsimp(N);
c:matrix([1],[1],[1],[1],[1],[1],[1]);
t:N.c;
tex (''%o47);
R:matrix([0.6,0],
         [0  ,0],
         [0  ,0],
         [0  ,0],
         [0  ,0],
         [0  ,0],
         [0  ,0.4]);
B:N.R;
```

$$t = \begin{pmatrix} 4.187946074544014 \\ 7.969865186360033 \\ 11.14274385408406 \\ 13.4020618556701 \\ 14.29103885804917 \\ 13.12450436161776 \\ 8.874702616970657 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0.9796986518636 & 0.0203013481364 \\ 0.949246629659 & 0.050753370340999 \\ 0.9035685963521 & 0.096431403647899 \\ 0.83505154639175 & 0.16494845360825 \\ 0.73227597145123 & 0.26772402854877 \\ 0.57811260904044 & 0.42188739095956 \\ 0.34686756542427 & 0.65313243457573 \end{pmatrix}$$

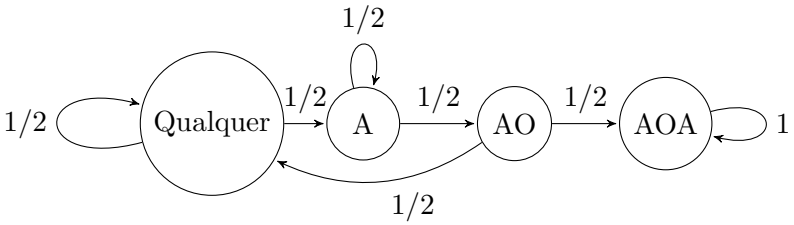
Em média em 13,4 anos a cadeia será absorvida. A probabilidade de falência é de 83,5% e de sucesso 16,5%. No caso anterior, a probabilidade de sucesso para este caso seria de 2,56%. *A segunda estratégia é melhor.* A chance dele melhorou muito, embora o final seja feliz de qualquer maneira.

5 Lançamento de moedas

Considere o lançamento de uma moeda equilibrada. O resultado pode ser cara (A) ou coroa (O), com uma probabilidade de 1/2. Utilizando cadeias de Markov, determine o número médio de lançamentos para obter a sequência AOA.

5.1 Solução

Os estados representam a sequência obtida:




```
Q:matrix([0.5,0.5,0],[0,0.5,0.5],[0.5,0,0]);
I:matrix([1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]);
X:I-Q;
N:invert(X);
c:matrix([1],[1],[1]);
t:N.c;
```

$$t = \begin{pmatrix} 10.0 \\ 8.0 \\ 6.0 \end{pmatrix}$$

Serão necessárias 10 jogadas em média.

6 Empresa de transporte

Uma empresa de transporte possui 2 caminhões. Considere que o tempo gasto no atendimento das solicitações (T_a) é exponencialmente distribuído. Também são exponencialmente distribuídos o intervalo de chegada de solicitações (T_s), o tempo gasto na oficina para reparo de um defeito no caminhão (T_o) e o intervalo de tempo entre defeitos em um caminhão (T_d).

Considerando todas estas variáveis, *determine a probabilidade de não haver caminhão disponível para atender uma solicitação.* Este problema deve ser resolvido com cadeias de Markov de tempo contínuo. Use a seguinte notação:

$\mu = 1/T_a$ Taxa de atendimento das solicitações;

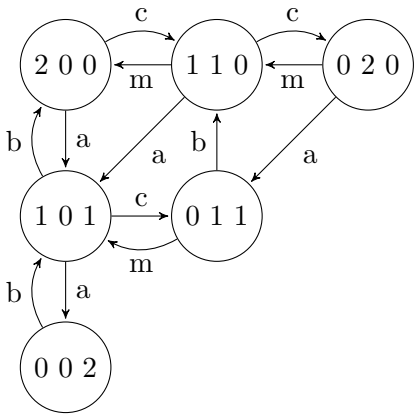
$\lambda = 1/T_s$ Taxa de chegada de solicitações;

$\alpha = 1/T_d$ Taxa de defeitos de um caminhão;

$\beta = 1/T_o$ Taxa de reparo de um caminhão;

6.1 Solução

O estado representa a respectivamente quantidade de caminhões na garagem, em atendimento e em reparo:



Utilizando o Maxima:

```
W:matrix([w1,w2,w3,w4,w5,w6]);
 P:matrix(   [(-(c+a)) ,c          ,0         ,a         ,0       ,0],
             [m        ,(-(c+a+m)) ,c         ,a         ,0       ,0],
             [0        ,m          ,(-(m+a))  ,0         ,a       ,0],
             [b        ,0          ,0         ,(-(c+a))  ,c       ,a],
             [0        ,b          ,0         ,m         ,(-(m+b)),a],
             [0        ,0          ,0         ,b         ,0       ,-b]);

W.P;
(%o10)  Col 1 = [ b w4 + m w2 + (- c - a) w1 ]
 Col 2 = [ b w5 + m w3 + (- m - c - a) w2 + c w1 ]
 Col 3 = [ (- m - a) w3 + c w2 ]
 Col 4 = [ b w6 + m w5 + (- c - a) w4 + a w2 + a w1 ]
 Col 5 = [ (- m - b) w5 + c w4 + a w3 ] Col 6 = [ - b w6 + a w5 + a w4 ]


solve( [b*w4 + m*w2 + (- c - a)* w1,
b *w5 + m* w3 + (- m - c - a) * w2 + c* w1,
(- m - a) *w3 + c* w2,
b* w6 + m* w5 + (- c - a) *w4 + a* w2 + a* w1,
(- m - b) *w5 + c* w4 + a* w3,
w1+w2+w3+w4+w5+w6-1],[w1,w2,w3,w4,w5,w6]);

#%o5 w6 = ... (equação que não dá para entender em texto)

(%i6) tex (''%o5);
```

w_6 é a probabilidade de estado estacionário que representa o estado de falha total:

$$w_6 = \frac{A}{B}$$

onde

$$A = -(a\,b - a^2)\,m^3 + ((a\,b - a^2)\,c + a\,b^2 + a^2\,b - 2\,a^3)\,m^2 + ((a\,b - a^2)\,c^2 + (a\,b^2 + a^2\,b - 2\,a^3)\,c + 2\,a^2\,b^2 - a^3\,b - a^4)\,m + (a^2\,b^2 - a^3\,b)\,c + a^3\,b^2 - a^4\,b$$

$$B = (b^2 + a^2)\,m^3 + ((2\,b^2 + a\,b + a^2)\,c + b^3 + 2\,a\,b^2 + a^2\,b + 2\,a^3)\,m^2 + ((2\,b^2 + a\,b + a^2)\,c^2 + (b^3 + 4\,a\,b^2 + 3\,a^2\,b + 2\,a^3)\,c + 2\,a\,b^3 + a^2\,b^2 + 2\,a^3\,b + a^4)\,m + (b^2 + a\,b)\,c^3 + (b^3 + 3\,a\,b^2 + 2\,a^2\,b)\,c^2 + (a\,b^3 + a^2\,b^2 + 2\,a^3\,b)\,c + a^2\,b^3 + a^4\,b$$

Referências

[1] Charles M. Grinstead and J. Laurie Snell, 1998. Introduction to Probability. American Mathematical Society, 2nd edition, 1998.

[2] H.M. Taylor and S. Karlin, 1998. An Introduction to Stochastic Modeling. Academic Press, 3rd edition, 1998.