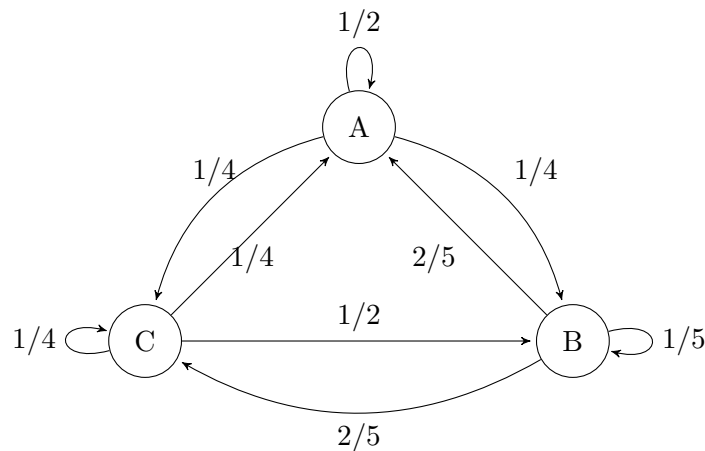

Exercícios

Carlos Marcelo Pedroso, Universidade Federal do Paraná

Lista de exercícios sobre Cadeias de Markov para disciplina TE816 do curso de Pós Graduação em Engenharia Elétrica da UFPR. As duas referências que estou usando sobre este assunto são de fato muito boas. A primeira [1] aborda o assunto de maneira fácil e didática, enquanto a segunda [2] se aprofunda na teoria.

1 Fundamentos

Considere o seguinte diagrama de transições de estado:



Os estados são dados respectivamente por A, B e C. Suponha a seguinte notação: $X_0, X_1, \dots, X_n$, onde n representa o passo da cadeia.

- Escreva o diagrama de transição de estados correspondente.
- Determine $P(X_1 = A | X_0 = B)$.
- Determine $P(X_1 = C | X_0 = A)$.
- Determine $P(X_2 = A | X_0 = A)$.
- Determine $P(X_2 = B | X_0 = A)$.
- Se $P[X_0 = A, X_0 = B, X_0 = C] = [0,1 \ 0,8 \ 0,1]$, calcule $P(X_1 = C)$.
- Calcule as probabilidades de estado estacionário. Mostre os cálculos (não vale fazer P^{100} no matlab).

2 Resposta Imunológica

Um estudo de resposta imunológica em coelhos permitiu estabelecer 4 grupos. De uma semana para outra, os coelhos podem variar a sua classificação de um grupo para outro de acordo com a seguinte matriz de transição de probabilidade:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 5/7 & 2/7 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Determine:

- Qual a proporção de coelhos no grupo 1 ainda estarão no grupo 1 depois de quatro semanas?
- Se na primeira semana há 9 coelhos no grupo 1, 4 coelhos no grupo 2 e 5 coelhos nos grupos 3 e 4, quantos coelhos são esperados em cada grupo após três semanas?
- Após muitas semanas, qual o número de coelhos esperado em cada grupo?

3 Problema Médico

Os médicos que diagnosticam cálculos biliares assintomáticos são confrontados com a decisão de remoção imediata da vesícula biliar para prevenir possível risco de vida/complicações ou adiar a cirurgia até que ocorram complicações. Na ausência de um estudo clínico, a análise da cadeia de Markov é muitas vezes a única maneira eficaz de avaliar os benefícios e riscos de vários tratamentos médicos estratégicos. Cadeias de Markov podem ser usadas para modelar o cenário acima. (*Sox, H., M. Blatt, M. Higgins, and K. Marton, Medical Decision Making, Butterworth Publishing, Boston, 1988, pp. 191-193).

Considere que são realizadas observações no paciente através de exames realizados de 4 em 4 meses. Suponha que, em uma estratégia de *adiar a cirurgia*, um paciente pode continuar a ter cálculos biliares assintomáticos com probabilidade de 0,95. O paciente com cálculos biliares assintomáticos pode apresentar uma das duas complicações maiores: (1) apresentar colesistite, necessitando de cirurgia, com probabilidade de 0,04; e (2) um paciente com cálculo biliar assintomático tem probabilidade de morte de 0,01. A cirurgia possui risco de morte, com probabilidade de 0,005. Uma vez realizada a cirurgia bem-sucedida, o paciente entra na recuperação. Noventa por cento dos pacientes em recuperação ficam bem, enquanto 9% permanecem no estado de recuperação considerando o período de exame de 4 meses e 1% morre durante a recuperação. Uma vez que um paciente é curado, considere ele não apresenta mais o problema de cálculo biliar até a morte natural.

- Modele o problema usando cadeias de Markov, e explique o seu modelo.
- Qual a probabilidade de um paciente com cálculo biliar assintomático curar-se ?
- Qual a probabilidade de uma paciente com cálculo biliar assintomático morrer em decorrência do problema?
- Quanto tempo em média um paciente com cálculo biliar assintomático leva para morrer em decorrência do problema?
- Quanto tempo em média um paciente com cálculo biliar assintomático leva para apresentar colestite?

4 Modelo de Fecundidade - parte 1

A alteração de padrões de comportamento social como o incremento na idade de casamentos, divórcios, etc. tem profundos efeitos na taxa de crescimento populacional. Particularmente, o problema é pode ser analisado através do tempo médio dos períodos mais férteis das mulheres. Em um modelo simplificado, os períodos de fertilidade feminina podem ser discretizados nos seguintes estados:

- E0: Puberdade.
- E1: Solteira.
- E2: Casada.
- E3: Divorciada.
- E4: Viuva.
- E5: Idade não fértil, morte ou emigração da população.

A matriz de transição de probabilidade pode ser obtida a partir de dados demográficos. O levantamento realizado é anual. Considere um caso específico onde:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} E0 & E1 & E2 & E3 & E4 & E5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} E0 \\ E1 \\ E2 \\ E3 \\ E4 \\ E5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0,95 & 0 & 0 & 0 & 0,05 \\ 0 & 0,75 & 0,20 & 0 & 0 & 0,05 \\ 0 & 0 & 0,60 & 0,25 & 0,05 & 0,10 \\ 0 & 0 & 0,15 & 0,8 & 0 & 0,05 \\ 0 & 0 & 0,05 & 0 & 0,90 & 0,05 \\ 0 & 0 & 0,0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Considerando que cada um dos estados apresenta uma taxa de fecundidade constante, indique como esta cadeia de markov pode ser usada para determinar a taxa de natalidade populacional. Considere que o período mais fértil é representado pelo estado E2.

5 Modelo de Fecundidade - parte 2

Considere o mesmo problema anterior.

Engenheiros sociais argumentam que é possível alterar o comportamento da população através de vinculação conteúdos na TV aberta e manipulação de resultados de pesquisas realizadas na Internet, alterando as probabilidades de transição do estado E1 para E2, da seguinte forma:

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} E0 & E1 & E2 & E3 & E4 & E5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} E0 \\ E1 \\ E2 \\ E3 \\ E4 \\ E5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0,95 & 0 & 0 & 0 & 0,05 \\ 0 & 0,95 - p & p & 0 & 0 & 0,05 \\ 0 & 0 & 0,60 & 0,25 & 0,05 & 0,10 \\ 0 & 0 & 0,15 & 0,8 & 0 & 0,05 \\ 0 & 0 & 0,05 & 0 & 0,90 & 0,05 \\ 0 & 0 & 0,0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

onde $0 < p < 0,95$.

Em contrapartida, médicos argumentam que melhorando o atendimento de saúde para a juventude é possível obter o mesmo efeito, alterando as probabilidades de transição da seguinte forma:

$$P = \begin{array}{c|cccccc} & E0 & E1 & E2 & E3 & E4 & E5 \\ \hline E0 & 0 & 1-q & 0 & 0 & 0 & q \\ E1 & 0 & 0,75 & 0,20 & 0 & 0 & 0,05 \\ E2 & 0 & 0 & 0,60 & 0,25 & 0,05 & 0,10 \\ E3 & 0 & 0 & 0,15 & 0,8 & 0 & 0,05 \\ E4 & 0 & 0 & 0,05 & 0 & 0,90 & 0,05 \\ E5 & 0 & 0 & 0,0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

onde $0 < q < 1$.

Analise as duas possibilidades.

6 Cadeias de Markov em Tempo Contínuo

Considere um barbeiro. A sala de espera tem duas cadeiras na área de espera, além de uma cadeira onde o cliente é atendido. Se um cliente chega e todas as cadeiras estão ocupadas, ele vai embora. Caso contrário ele aguarda o atendimento. Considere que a taxa de chegadas é de λ clientes por hora e que a taxa de atendimento é de μ clientes por hora. Suponha que os tempos de atendimento são exponencialmente distribuídos e que $\mu > \lambda$. Determine o número médio de clientes no estabelecimento.

7 Desafio

Proponha exemplo de aplicação de cadeias de Markov para (1) ensino ou (2) pesquisa em sua área de atuação.

Referências

- [1] Charles M. Grinstead and J. Laurie Snell, 1998. Introduction to Probability. American Mathematical Society, 2nd edition, 1998.
- [2] H.M. Taylor and S. Karlin, 1998. An Introduction to Stochastic Modeling. Academic Press, 3rd edition, 1998.