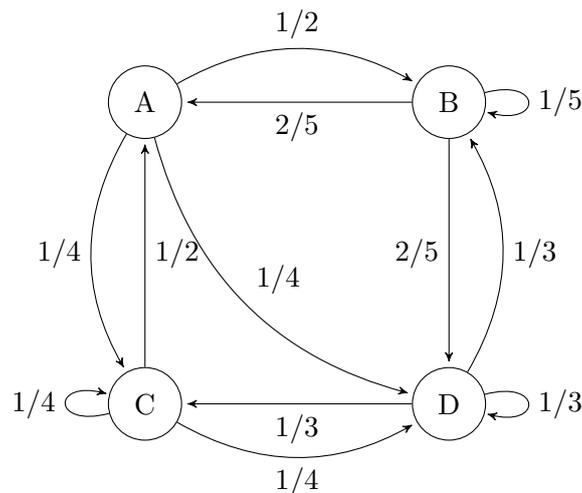

Exercícios

Carlos Marcelo Pedroso, Universidade Federal do Paraná

Lista de exercícios sobre Cadeias de Markov para disciplina EELT7055 do curso de Pós Graduação em Engenharia Elétrica da UFPR. As duas referências que estou usando sobre este assunto são de fato muito boas. A primeira [1] aborda o assunto de maneira fácil e didática, enquanto a segunda [2] se aprofunda na teoria.

1 Fundamentos

Considere o seguinte diagrama de transições de estado:



Os estados são dados respectivamente por A, B e C. Suponha a seguinte notação: X_0, X_1, \dots, X_n , onde n representa o passo da cadeia.

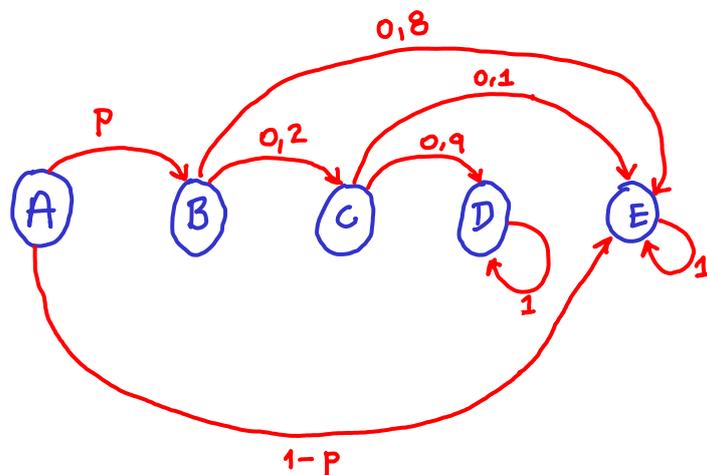
- Escreva o diagrama de transição de estados correspondente.
- Determine $P(X_1 = A | X_0 = C)$.
- Determine $P(X_1 = C | X_0 = B)$.
- Determine $P(X_2 = C | X_0 = B)$.
- Determine $P(X_3 = A | X_0 = D)$.
- Mostre que esta é uma cadeia ergódica e regular.
- Se $P[X_0 = A, X_0 = B, X_0 = C, X_0 = D] = [0,1 \ 0,3 \ 0,4 \ 0,2]$, calcule $P(X_1 = C)$.
- Calcule as probabilidades de estado estacionário. Mostre os cálculos (não vale fazer P^{100} no matlab).

2 Cadeias de Markov Absorventes

Uma empresa de tecnologia possui um processo de recrutamento em que os candidatos passam por várias fases de avaliação. O processo consiste em cinco etapas:

- A- Entrevista inicial
- B- Prova técnica
- C- Entrevista com o gestor
- D- Proposta de emprego aceita (Estado absorvente)
- E- Desclassificação do processo (Estado absorvente)

Os candidatos podem ser eliminados em qualquer uma das etapas ou avançar para a próxima fase. O sistema possui o seguinte diagrama de estados:



Determine:

- a) Qual é a probabilidade de um candidato, começando na fase A, terminar no estado absorvente D (proposta aceita) ou no estado absorvente E (desclassificação)?
- b) Considerando que existem 2 vagas para 100 candidatos. Qual deve ser o valor de p para garantir que o número médio esperado de candidatos que terminam no estado D seja 2?
- c) O índice de reprovação na prova técnica é de 80%. Considere reformular o sistema para que um candidato reprovado na prova técnica tenha uma segunda chance, fazendo outra prova. Nesta segunda prova, o índice de reprovação é ainda maior, de 90%. Determine se vale a pena fazer esta segunda prova.

3 Papai Noel

Papai Noel tem um grande problema logístico no dia de Natal. Para não atrasar as entregas, ele mantém 4 trenós a sua disposição, bem como as equipes de duentes para operar o sistema. Enquanto ele está em um trenó entregando os presentes, os outros trenós voltam para o Polo Norte para carregar com novos presentes, e imediatamente vão de encontro ao Papai Noel. Quando o trenó que Papai Noel está usando esvazia, ele pega outro trenó cheio que estiver disponível.

O problema é que se os presentes acabarem e nenhum outro trenó tiver voltado do Polo Norte, o Papai Noel vai ficar sem presentes e a entrega pode atrasar, com o risco de ficarem crianças sem presentes no caso do dia nascer.

Nossa missão aqui é ajudar o Papai Noel com a avaliação de desempenho do sistema. Utilize **Cadeias de Markov de Tempo Contínuo** para escrever um modelo que considere que a taxa de entrega de presentes de um trenó é dada por μ e a taxa de carregamento do trenó dada por λ , com $1/\mu$ e $1/\lambda$ seguindo uma distribuição exponencial.

Determine:

- Qual a probabilidade de que o Papai Noel tenha que ficar esperando sem haver nenhum trenó carregado disponível?
- É claro que o Papai Noel é muito rápido para entrega de presentes. Considere que o Papai Noel tem 24 horas para entregar todos os presentes para 2 bilhões de crianças no mundo, e que no trenó cabem 1000 presentes (daí você descobre μ). Determine qual deve ser o valor de λ , que vai ser usado como meta para o pagamento do bonus para os duendes ajudantes.

4 Papai Noel - parte 2

Joãozinho fez uma descoberta surpreendente. Ao contrário do que foi contado para ele, Papai Noel não sabe se a criança foi (ou não) bem comportada. Os presentes que ele entrega dependem grandemente do estado de espírito do Papai Noel. Quando Papai Noel está feliz, ele entrega presentes melhores. Quando ele está triste, entrega os piores presentes, como canecas, panelas e chinelos. Quando ele não está nem triste nem feliz, ele entrega o presente que está mais fácil no trenó.

Joãozinho também descobriu que deixar um bom lanche para o Papai Noel deixa ele feliz, principalmente se tiver vinho, o que é bom para ele. No entanto, Joãozinho é esperto - se Papai Noel estiver feliz, não precisa deixar vinho (pode guardar para ele mesmo).

Sabendo disso, Joãozinho estudou a rota do trenó e olhou o presente deixado nas casas, sendo capaz de classificar a sequência de presentes em duas categorias: B (Bom) e R (Ruim).

A sequência que ele observou foi a seguinte (ordem de sequência na linha da esquerda para direita, seguido pela coluna de cima para baixo):

```

B R B B B R R B R B B B B B R B R B B R B R R B R B R B R B R R R R B R R R B B
B B B B B R R R B B B R B B B B B B B B B B R B B B R R B R R R R R R B B B
B R B B B B R R B B B B B B B B R R B B B B R B R R B R R R B R R B R B R B R
R B B R R B B B B B R B R B R B R B R B B R B B B B B B B B B B B B R R B B B
B B B B B B R R R R B B B R B B B B R B R B R B R R B R R R R R R R B R R R R
B R B R B B B B R B B B R R R B B R B B B B R B B B B R B B B B R R B R R R B R B B
B B R B R B B R B B B B R B R R B B B B R B R B R R B R B B B B B B R R R B B R
R R B B R B B B R B R B B R B B B B R B B B B B B B B B B B R B B B B B R B R
R R R R R B R B R B B B R B B B B R R B R B B B B B B B B R R B R R B B B B R B
B B R R R R B B B R B B B B R R B R B R B R B R B B B R R R B R R R R B B B
R B R R R B B B R B R B R B R B B B R B B B B B B B B R B B R R B B B R
R R R R B R R B B B R R B R B B B R R B R R B B B B R B R B B B R B B R B
R R B B R B B R R R R R R B B B B B B B B B R R R R B R B R B R B B R B R B B
B B R R R B B R B R B B R B B B B B B B B R B B R R B B B R R R B B B R B R R
B R B B R B R B B B B B R B B R R R B B B B R B B B B R R B B R B B B R B R R

```

Utilize o **Modelo Oculto de Markov** para ajudar Joãozinho, respondendo as seguintes perguntas:

- Qual a cadeia de Markov no modelo oculto?
- Utilize o algoritmo de Baum-Welch para inferir as probabilidades de transição de estado e probabilidades de emissão para o modelo.

- c) Utilize o algoritmo de Viterbi para determinar se o Papai Noel estava Feliz, Neutro ou Triste durante as entregas realizadas.
- d) Finalmente, considerando que a próxima entrega é na casa do Joãozinho, determine (através do cálculo da probabilidade) se ele deve deixar o vinho para o Papai Noel.

Referências

- [1] Charles M. Grinstead and J. Laurie Snell, 1998. Introduction to Probability. American Mathematical Society, 2nd edition, 1998.
- [2] H.M. Taylor and S. Karlin, 1998. An Introduction to Stochastic Modeling. Academic Press, 3rd edition, 1998.