

Auto-Similaridade do Tráfego de Telecomunicações

EELT7055 Modelagem e Avaliação de Desempenho

Prof. Carlos Marcelo Pedroso

Pós Graduação em Engenharia Elétrica - PPGEE

2025

Estrutura da Apresentação

- ① Preâmbulo
- ② Auto-Similaridade e Long Range Dependence (LRD)
 - ✓ Estacionariedade
 - ✓ LRD e SRD (Short Range Dependence)
 - ✓ Auto-similaridade e a geometria fractal
- ③ Identificação de um Processo Auto-Similar
 - ✓ Estatística R/S
 - ✓ Método da Variância
 - ✓ Método da Transformada de Wavelet
- ④ Modelos de Tráfego Auto-Similares
 - ✓ Modelo ON-OFF
 - ✓ Modelo FARIMA
 - ✓ Movimento Browniano Fracionário (fBm)
 - ✓ Modelo SURGE

Modelos de Tráfego de Redes

- Os modelos evoluíram para caracterizar apropriadamente o tráfego observado em redes atuais.
- Sistemas modernos (ex: TCP, compactação de vídeo) apresentam desafios de modelagem.
- Modelos tradicionais eram, em sua maioria, **Markovianos**.
- Ver artigo com uma breve história em https://www.cse.wustl.edu/~jain/cse567-06/ftp/traffic_models3.pdf

Aplicações dos Modelos de Tráfego

- Projeto de capacidade de enlaces.
- Dimensionamento de buffers.
- Base para projeto de algoritmos de gerência e controle de congestionamento.
- base para projeto de algoritmos de controle congestionamento.
- base para o projeto de métodos de policiamento de tráfego.
- implementação de simulações computacionais.

Definições Básicas

- ▶ Série temporal discreta: $X_1, X_2, \dots, X_t, \dots, X_N$ a intervalos equidistantes.
- ▶ Média: $E(X) = \mu$.
- ▶ Variância: $V[X] = \sigma^2$.
- ▶ Auto-Covariância (defasagem k): $\gamma_k = E[(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu)]$.
- ▶ Auto-Correlação (defasagem k): $\rho_k = \gamma_k / \gamma_0$.

Tipos

- ▶ **Estrita:** $[X_{t_1}, \dots, X_{t_n}]$ e $[X_{t_1+k}, \dots, X_{t_n+k}]$ possuem a mesma distribuição conjunta.
- ▶ **Fraca (ou de segunda ordem):** A função de auto-covariância $\gamma(r, s) = E[(X_r - \mu)(X_s - \mu)]$ satisfaz a invariância $\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \gamma(\mathbf{r} + \mathbf{k}, \mathbf{s} + \mathbf{k})$.

Dependência de Curta e Longa Duração (SRD e LRD)

SRD (Short Range Dependence)

- Observação corrente não é correlacionada com observações muito antigas.
- A função de auto-correlação **decai rapidamente para zero**.

LRD (Long Range Dependence)

- Observações são **significativamente correlacionadas** com observações muito distantes no tempo.
- A função de auto-correlação ρ_k decai para zero **muito lentamente** em função do deslocamento k .

Dependência de Curta Duração

- ▶ Processo com memória de curta duração ou Short Range Dependence (SRD) indica o fenômeno onde a observação corrente não é correlacionada com observações muito antigas. Para um processo *SRD*, a função de auto-correlação decai rapidamente para zero.
- ▶ O valor $H = \frac{1}{2}$ é o limite entre a *LRD* e a *SRD*. Processos com $\frac{1}{2} < H < 1$ são *LRD*, enquanto processos com $0 < H < \frac{1}{2}$ são *SRD*. O efeito da *LRD* será maior quando H estiver próximo a 1.

Dependência de Longa Duração

- Ocorre quando observações de um evento são significativamente correlacionadas com observações muito distantes no tempo. Este fenômeno é de particular interesse na modelagem de tráfego, uma vez que as pesquisas comprovaram que o tráfego em redes modernas de comunicação frequentemente apresenta *LRD*.
- Em um processo *LRD* a função de auto-correlação ρ_k decai para zero muito lentamente em função do deslocamento k . Processos auto-similares apresentam *LRD*.

- Assuma uma variável aleatória com $E[X] = 0$. Pela estacionariedade, $\gamma(r, s) = \gamma(r - s, 0)$ e a auto-covariância será dada por γ_k . Para formular a invariância de escala, primeiro define-se o processo agregado $X^{(m)}$ de X em um nível de agregação m .

$$X_k^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{t=m(k-1)+1}^{mk} X_t; \quad (1)$$

- Isso significa que X_t é particionado em blocos não sobrepostos de tamanho m , seus valores são anotados e k é utilizado como índice nestes blocos. O valor de X_t representa a quantidade de informação observada.

Definição de Auto-Similaridade

- ▶ Seja $\gamma^{(m)}(k)$ a função de auto-covariância de $X^{(m)}$. Assumindo que o processo é estacionário de segunda ordem, pode-se colocar a seguinte definição de auto-similaridade.

$$\gamma_k = \frac{\sigma^2}{2} \left[(k+1)^{2H} - 2k^{2H} + (k-1)^{2H} \right], \quad \forall k \geq 1 \quad (2)$$

- ▶ implica em $\gamma_k = \gamma_k^{(m)}$, $\forall m \geq 1$. A auto-similaridade estacionária tem sido o modelo dominante para a modelagem de tráfego em redes de comunicação modernas. A função de auto-correlação de um processo auto-similar apresenta um lento decaimento em função do deslocamento k e $1/2 < H < 1$. Processos SRD apresentam $H \leq 1/2$.

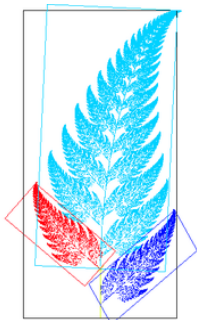
Definição de Auto-Similaridade

- Um processo será *auto-similar do ponto de vista estocástico* se o processo mantém características estocásticas sobre uma certa faixa de escalas, de modo a satisfazer a relação dada pela equação abaixo. A interpretação desta equação é a seguinte: o processo estocástico X_t deslocado em escala por um fator constante m possui aproximadamente as mesmas características de X_t em termos de sua distribuição de probabilidade. A amplitude do processo X_{mt} resultante será o de X_t multiplicado por m^H , com H representando o parâmetro de Hurst.

$$X_{mt} \cong_d m^H X_t, m > 0 \quad (3)$$

Fractais e Dimensão

- O conceito de auto-similaridade foi aprimorado por Benoit B. Mandelbrot na teoria sobre **fractais**.
- Um objeto auto-similar (ex: Conjunto de Cantor, Floco de Neve Koch) mantém semelhanças sob ampliação em escala.



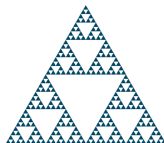
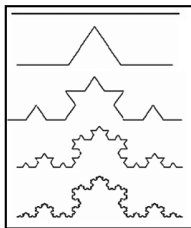
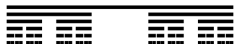
Dimensão Fractal (d). Um objeto auto-similar é caracterizado pelo número N de cópias criadas com uma alteração de escala ε :

$$d = \frac{\log N}{\log \varepsilon} \quad (4)$$

Relação com o Parâmetro de Hurst

$$d = 2 - H$$

Fractais e Dimensão: Exemplos



- ▶ Exemplo: Conjunto de Cantor
 $\implies N = 2, \varepsilon = 3 \implies d = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0.631.$
- ▶ Exemplo: Floco de Neve de Koch
 $\implies N = 4, \varepsilon = 3 \implies d = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1.262$
- ▶ Exemplo: Triângulo de Sierpinski
 $\implies N = 3, \varepsilon = 2 \implies d = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.585$

Dimensão Fractal - Método Gráfico

- 1- Coloque um *grid* sobre o objeto com quadrados de dimensão ε_0 . Conte quantos quadrados contêm pontos da figura e chame o resultado de $N(\varepsilon_0)$;
- 2- Repita o passo 1 utilizando quadrados com dimensão $\varepsilon_1 = \varepsilon_0/2, \varepsilon_2 = \varepsilon_1/2, \dots$ e anote o resultado em $N(\varepsilon_0), N(\varepsilon_1), \dots$;
- 3- A dimensão d é o número tal que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a \cdot \varepsilon^{-d}$ (derivado da equação anterior), onde a é uma constante. Na prática, d pode se estimado como

$$d = \frac{\log N(\varepsilon_{i+1}) / \log N(\varepsilon_{i+1})}{\log \varepsilon_i + 1 / \log \varepsilon_{i+1}} \quad (4)$$

- A grande dificuldade do procedimento apresentado é selecionar o valor apropriado para i . Objetos reais não possuem um nível de granularidade infinitamente grande ou infinitamente pequeno. Além disso, a auto-similaridade pode manifestar-se apenas em determinadas escalas.
- O parâmetro de Hurst está relacionado com a dimensão fractal através da relação $d = 2 - H$;

Conjunto de Mandelbrot

- É o mais famoso dos fractais, descoberto por Benoît Mandelbrot.
- Não é um fractal definido por "auto-similaridade exata" (como o Floco de Neve de Koch), mas sim por um processo de **iteração de funções complexas**.
- É o **mapa de todos os Conjuntos de Julia conexos**.
- O Conjunto de Mandelbrot ($\mathcal{M}$) é o conjunto de todos os números complexos c para os quais a sequência gerada por sua fórmula **não diverge** (não tende ao infinito).
- A iteração é definida pela seguinte função recursiva:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

- ✓ z : É uma variável complexa que começa sempre em $z_0 = 0$.
- ✓ c : É o número complexo que estamos testando (o ponto no plano complexo).

Visualização: Complexidade Infinita

Iteração (n)	Caso 1: $c = -1$		Caso 2: $c = 1$	
	z_n	$ z_n $	z_n	$ z_n $
0	0	0	0	0
1	$0^2 + (-1) = -1$	1	$0^2 + 1 = 1$	1
2	$(-1)^2 + (-1) = 0$	0	$1^2 + 1 = 2$	2
3	$0^2 + (-1) = -1$	1	$2^2 + 1 = 5$	5
4	$(-1)^2 + (-1) = 0$	0	$5^2 + 1 = 26$	26
5	$0^2 + (-1) = -1$	1	$26^2 + 1 = 677$	677

- **Resultado para $c = -1$:** O valor de $|z_n|$ **permanece limitado** (oscila entre 0 e 1). Portanto, $c = -1$ **pertence** ao Conjunto de Mandelbrot.
- **Resultado para $c = 1$:** O valor de $|z_n|$ **diverge rapidamente** (passa de 2 e tende ao infinito). Portanto, $c = 1$ **não pertence** ao Conjunto de Mandelbrot.

Visualização: Complexidade Infinita

- O conjunto é traçado no **plano complexo**, onde o eixo horizontal é a parte Real e o eixo vertical é a parte Imaginária de c .
- A fronteira é onde a transição entre convergência e divergência acontece. Esta fronteira tem **dimensão fractal 2**.
- As cores fora do conjunto representam a **velocidade de divergência** (quantas iterações foram necessárias para $|z_n| > 2$).

Ver: <https://mandelbrot.site/>

Identificação: Estatística R/S

- ▶ A auto-similaridade manifesta-se por uma **linha reta no gráfico log-log** da estatística R/S .
- ▶ O parâmetro de Hurst H é dado pela razão $\hat{R}(n)/\hat{S}(n)$ (estatística R/S).

Cálculo de $\hat{R}(n)$

$$\hat{R}(n) = \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^k (X_i - \hat{\mu}) \right\} - \min_{1 \leq k \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^k (X_i - \hat{\mu}) \right\} \quad (6)$$

Relação Assintótica

$$E[R(n)/S(n)] \rightarrow an^H \quad \text{conforme } n \rightarrow \infty$$

com $1/2 < H < 1$ para processos LRD.

Identificação: Método da Variância

- ▶ Verifica a auto-similaridade assintótica através do gráfico do estimador $\sigma^2(m)$ da variância do processo agregado.

Estimador da Variância do Processo Agregado

$$\sigma^2(m) = \frac{m}{N} \sum_{t=1}^{N/m} (X_t^{(m)} - \mu)^2 \quad (7)$$

Relação Assintótica

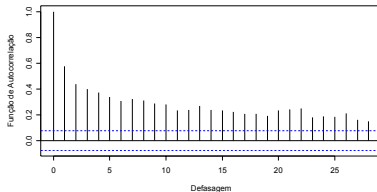
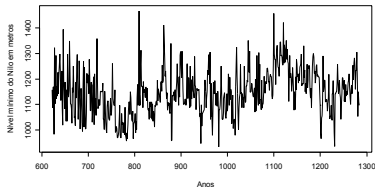
- ▶ Para grandes valores de m : $\sigma^2(m) \sim cm^{-2(1-H)}$ para uma constante c .
- ▶ Em escala logarítmica ($\log(\sigma^2(m)) \times \log(m)$), a inclinação assintótica da reta formada será:

$$\alpha = -2(1 - H)$$

Método da Transformada de Wavelet

- ▶ Wavelets são funções matemáticas que seccionam os dados em diferentes componentes de frequência e então estudam cada componente com uma resolução ajustada à sua escala. Elas possuem vantagens sobre os métodos tradicionais de Fourier para a análise de situações onde o sinal contém descontinuidades e picos. Wavelets foram desenvolvidas independentemente nos campos da matemática, física quântica, engenharia elétrica e geologia sísmica.
- ▶ O procedimento básico de análise de uma série temporal consiste em um algoritmo recursivo que constrói a função, desloca-a e troca sua escala. A função original é decomposta em um conjunto de escalas e representada como parâmetros da função padrão, o que torna a análise menos sensível ao ruído porque mede as flutuações médias do sinal em diferentes escalas.

Série Temporal Clássica: Nível do Rio Nilo



- A série temporal **Nile** é um conjunto de dados clássico no R.
- Representa a vazão anual do Rio Nilo em Aswan, Egito, de 1871 a 1970.
- Visualmente, exibe fortes **tendências de longo prazo**, indicando possível **memória longa** (autosimilaridade).

Objetivo

Vamos testar a hipótese de autosimilaridade usando o pacote **FACDIFF**, que estima o parâmetro de diferenciação fracionária (d).

- O **Parâmetro de Hurst** (H) mede a autosimilaridade.
- A relação é: $H = d + 0.5$.
- Se $d > 0$ ($H > 0.5$), a série tem **memória longa** (autosimilaridade).

Estimação do Parâmetro d (fracdiff)

Comandos R

```
library(fracdiff)

nilo<-scan("nile.dat")
par(mfrow = c(2, 2))
plot(nilo,type="l")
plot(Nile)           # a série Nile está no pacote
acf(nilo,lag.max=50)
hist(nilo)

# Estima o modelo ARFIMA(p=0, d, q=0)
modelo <- fracdiff::fracdiff(nilo, nar = 0, nma = 0)

# Exibe os resultados principais
print(modelo)

# Captura o valor de d estimado
d <- modelo$d
```

- A função `fracdiff()` estima o valor fracionário do parâmetro d (diferenciação fracionária) usando o método de Máxima Verossimilhança no Domínio da Frequência.
- Resultado da Estimativa $\hat{d} \approx 0.3639$

Cálculo do Parâmetro de Hurst

► Cálculo de H

$$H = \hat{d} + 0.5$$

$$H \approx 0.3639 + 0.5$$

$$H \approx 0.8639$$

- O valor de d estimado (0.3639) é significativamente **maior que zero**.
- O valor do Parâmetro de Hurst, **H** $\approx$ **0.8639**, está próximo de 1. item **Conclusão:** A série temporal do Rio Nilo apresenta **forte autosimilaridade** (memória longa), indicando que os valores passados têm uma influência significativa e duradoura nos valores futuros.

Verificação Complementar (tseries)

O teste **ADF** (`tseries::adf.test`) para **Raiz Unitária** pode complementar esta análise. Se o teste ADF não rejeitar (indicando não-estacionariedade), isso apoia a ideia de dependência de longo prazo.

Modelos de Tráfego: ON-OFF e Cauda Pesada

Modelo ON-OFF Tradicional

- Pacotes gerados apenas no estado **ON** (intervalos fixos).
- Sucessão ON/OFF modelada pela **distribuição exponencial**.
- Leva a séries com **Dependência de Curta Duração (SRD)**.

Modelo ON-OFF com LRD

- Ocorre quando a distribuição do **tempo ON ou do tempo OFF** é modelada por uma **distribuição de cauda pesada**.
- A LRD é causada pela natureza dos objetos transmitidos (tamanho de arquivos, ritmo de chegadas, etc.).
- Relação com Hurst: $H = (3 - \alpha)/2$ (Onde α é o parâmetro de forma).

Distribuição de Cauda Pesada

$$Pr\{X > x\} \sim x^{-\alpha}, \quad x \rightarrow \infty, \quad 0 < \alpha < 2 \quad (8)$$

- A **Distribuição de Pareto** é uma das mais utilizadas.

FARIMA (Fractional ARIMA)

- Extensão do processo ARIMA que permite valores reais para o grau de diferenciação (**parâmetro d**), com $-1/2 < d < 1/2$.
- É LRD se $0 < d < 1/2$ e SRD se $d = 0$.
- Relação com Hurst:

$$H = d + 1/2$$

Movimento Browniano Fracionário (fBm)

- Os incrementos são normalmente distribuídos, mas **não independentes**.
- Leva a um processo **auto-similar com dependência de longo prazo**.
- O incremento do processo é relacionado em todas as escalas.
- Variação: Movimento Browniano Multi-Fracionário (mBm), que utiliza a função de Hölder $H(t)$.

Modelo SURGE (Scalable URL Reference Generator)

- Modelo de geração de tráfego que utiliza o **comportamento do usuário e o conteúdo do servidor**.
- Baseado em um autômato ON-OFF que captura o comportamento do usuário.
- O tráfego agregado resultante é **auto-similar**.

Principais Variáveis e Modelagem

- **Tempo OFF** (Usuário pensando): Dist. de Pareto.
- **Tamanho dos arquivos** (Objetos transmitidos): Dist. de Pareto.
- **Número de referências** (em uma sessão): Dist. de Pareto.
- **Tempo Active-Off** (Entre arquivos): Dist. de Weibull.
- **Popularidade** (Número de acessos): Lei de Zipf ($P = kr^{-1}$).

Exemplo de Aplicação

- Considere o policiamento de tráfego:
 - ① Deseja-se determinar se um determinado fluxo está se comportando de acordo com o SLA.
 - ② Anote na aula: algoritmo do balde furado.
 - ③ Anote na aula: algoritmo do balde de fichas.
 - ④ Pergunta: qual dos dois algoritmos é melhor?

Desafio

Implementar e comparar o **Algoritmo Fractal Leaky Bucket** com o Token Bucket (Balde de Fichas).