

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

ROBERTO KONDO

**SÍNTESE DE FILTROS DIGITAIS UTILIZANDO ALGORITMOS DE
OTIMIZAÇÃO DE FORMA COLABORATIVA**

CURITIBA

2018

ROBERTO KONDO

**SÍNTESE DE FILTROS DIGITAIS UTILIZANDO ALGORITMOS DE
OTIMIZAÇÃO DE FORMA COLABORATIVA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Curso de Engenharia Elétrica da Universidade Fe-
deral do Paraná como requisito para a obtenção do
título de Engenheiro Eletricista

Orientador: Prof. Dr. Gideon Villar Leandro

CURITIBA
2018

TERMO DE APROVAÇÃO

ROBERTO KONDO

SÍNTESE DE FILTROS DIGITAIS UTILIZANDO ALGORITMOS DE OTIMIZAÇÃO DE FORMA COLABORATIVA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Paraná como requisito à obtenção do título de Engenheiro Eletricista, e aprovado pela seguinte banca examinadora:

Orientador: Prof. Dr. Gideon Villar Leandro
Departamento de Engenharia Elétrica, UFPR

Prof. Dr. Gustavo Henrique da Costa Oliveira
Departamento de Engenharia Elétrica, UFPR

Prof^a. Dra. Juliana Luísa Müller Iamamura
Departamento de Engenharia Elétrica, UFPR

Curitiba, 04 de dezembro de 2018

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Neuza e Roberto, por todo o esforço em tornar possível minha formação: sempre me apoiando emocionalmente, incentivando.

A Deus, por ter me guiado ao longo desses anos de vida, sempre colocando pessoas boas em meu caminho.

Agradeço também a todos os meus amigos, por me apoiarem mesmo nos momentos difíceis durante o curso, bem como durante o período de TCC. A compreensão e a prontidão foram indispensáveis para que tudo desse certo.

Agradeço ao meu orientador, o Prof. Dr. Gideon Villar Leandro, por toda a atenção dispensada, pela motivação pela execução do trabalho e pela prontidão em atender as minhas dúvidas e dificuldades.

Ao Prof. Ph.D. Eduardo Gonçalves de Lima, pelas oportunidades ofertadas durante minha graduação - monitoria e iniciação científica, as quais contribuíram muito para o meu desenvolvimento no âmbito acadêmico.

Aos meus colegas de trabalho, no LACTEC, do Laboratório de Compatibilidade Dielétrica, os quais sempre foram muito compreensivos e me proporcionaram a experiência de me desenvolver tanto pessoalmente quanto profissionalmente.

A todos os professores da minha trajetória acadêmica que, de alguma forma, contribuíram para que eu construísse o conhecimento que tenho hoje.

*“A persistência é o caminho do êxito.”
(Charles Chaplin)*

RESUMO

A área de Processamento Digital de Sinais tem crescido muito nos últimos anos, tanto a nível de software quanto de hardware. Suas aplicações são as mais diversas, como o processamento de sinais de áudio, imagem ou até mesmo biomédicos (batimentos cardíacos, por exemplo). Nesse contexto, as estruturas responsáveis por esse tratamento – os filtros – nada mais são do que funções de transferência, cujos coeficientes são ajustados conforme a necessidade do projeto. Dessa forma, este trabalho visa propor uma nova solução para o ajuste desses parâmetros, utilizando as técnicas metaheurísticas, que são algoritmos de otimização que mimetizam algum aspecto da vida real, exigindo um menor esforço computacional em comparação às técnicas tradicionais. Para isso, implementou-se uma estrutura colaborativa, consistindo na atuação simultânea de três algoritmos: Busca Gravitacional, Sistema Imune Artificial e Baleia. Assim, foi possível extrair as melhores características de cada algoritmo, a fim de chegar à melhor solução possível. Essa estrutura foi aplicada primeiramente à identificação de sistemas em tempo contínuo, a fim de estimar a função de transferência, e posteriormente ao projeto de filtros digitais do tipo IIR (Infinite Impulse Response). Com isso, além de se obter as funções de transferência e os filtros projetados, foi possível constatar que o algoritmo colaborativo chegou a soluções tão precisas e mostrou-se muito mais robusto que cada algoritmo individualmente. Comprovou-se a funcionalidade das soluções encontradas filtrando-se um sinal e extraíndo suas componentes de frequência. Por fim, concluiu-se que a nova ferramenta desenvolvida foi capaz de projetar um filtro de forma correta e também com uniformidade nas soluções propostas.

Palavras-chave: Processamento Digital de Sinais. Metaheurísticas. Algoritmo Colaborativo. Filtros IIR.

ABSTRACT

The Digital Signal Processing area has grown in recent years, in terms of hardware and software. Some applications are: audio and image signal processing or even biomedical signal processing (heartbeat, for example). In this context, since the structures responsible for this treatment - filters – which are transfer function. Their coefficients are adjusted by the specifications of the project. Thus, the purpose of this work is to propose a new solution for the adjustment of these parameters, using metaheuristics, which are optimization algorithms that mimic some aspects of real life, requiring a less computational effort compared to traditional techniques. For this, a collaborative structure was implemented, consisting in a simultaneous action of three algorithms: Gravitational Search, Artificial Immune System and Whale Algorithm. Therefore, it was possible to extract the best characteristics of each algorithm in order to reach the best possible solution. That structure was applied to the identification of continuous time systems, estimating their transfer functions, and to design IIR filters (Infinite Impulse Response). These functions were estimated and the filters were designed. By this way it was possible to verify that the collaborative algorithm has obtained solutions so precise and that they were more robust than others. The functionality of the solutions was proved by filtering a signal and extracting its frequency components. Finally, it was concluded that the new solution was able to design a filter correctly and also with uniformity in its proposed solutions.

Palavras-chave: Digital Signal Processing. Metaheuristics. Collaborative Algorithm. IIR Filters.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – Funcionamento de um Filtro Seletor de Sinais	17
FIGURA 2 – Especificações de um Filtro em escala absoluta	21
FIGURA 3 – Especificações de um Filtro em escala relativa	21
FIGURA 4 – Sistema de Massas.	25
FIGURA 5 – Fluxograma do Algoritmo da Busca Gravitacional	26
FIGURA 6 – Fluxograma do Algoritmo do Sistema Imune Artificial	28
FIGURA 7 – Fluxograma do Algoritmo da Baleia	30
FIGURA 8 – Fluxograma da Subrotina Atualização de Parâmetros no Algoritmo da Baleia	31
FIGURA 9 – Fluxograma do Algoritmo Colaborativo	33
FIGURA 10 – Identificação de Sistema através de Algoritmos de Adaptação . .	35
FIGURA 11 – Resposta ao Degrau para um Sistema de Segunda Ordem via Al- goritmo da Busca Gravitacional	37
FIGURA 12 – Diagrama de Caixa dos Resultados Obtidos para um Sistema de Segunda Ordem via Algoritmo da Busca Gravitacional	37
FIGURA 13 – Resposta ao Degrau para um Sistema de Quinta Ordem via Algo- ritmo da Busca Gravitacional	38
FIGURA 14 – Diagrama de Caixa dos Resultados Obtidos para um Sistema de Quinta Ordem via Algoritmo da Busca Gravitacional	38
FIGURA 15 – Resposta ao Degrau para um Sistema de Segunda Ordem via Al- goritmo do Sistema Imune Artificial	39
FIGURA 16 – Diagrama de Caixa dos Resultados Obtidos para um Sistema de Segunda Ordem via Algoritmo do Sistema Imune Artificial	40
FIGURA 17 – Resposta ao Degrau para um Sistema de Quinta Ordem via Algo- ritmo do Sistema Imune Artificial	40
FIGURA 18 – Diagrama de Caixa dos Resultados Obtidos para um Sistema de Quinta Ordem via Algoritmo do Sistema Imune Artificial	41
FIGURA 19 – Resposta ao Degrau para um Sistema de Segunda Ordem via Al- goritmo da Baleia	42

FIGURA 20 – Diagrama de Caixa dos Resultados Obtidos para um Sistema de Segunda Ordem via Algoritmo da Baleia	43
FIGURA 21 – Resposta ao Degrau para um Sistema de Quinta Ordem via Algoritmo da Baleia	43
FIGURA 22 – Diagrama de Caixa dos Resultados Obtidos para um Sistema de Quinta Ordem via Algoritmo da Baleia	44
FIGURA 23 – Resposta ao Degrau para um Sistema de Segunda Ordem via Algoritmo Colaborativo	45
FIGURA 24 – Diagrama de Caixa dos Resultados Obtidos para um Sistema de Segunda Ordem via Algoritmo Colaborativo	46
FIGURA 25 – Resposta ao Degrau para um Sistema de Quinta Ordem via Algoritmo Colaborativo	46
FIGURA 26 – Diagrama de Caixa dos Resultados Obtidos para um Sistema de Quinta Ordem via Algoritmo Colaborativo	47
FIGURA 27 – Resposta em Frequência do Filtro Passa Baixa	49
FIGURA 28 – Resposta em Frequência do Filtro Passa Baixa em decibels	49
FIGURA 29 – Diagrama de Caixa dos Resultados Obtidos para o Filtro Passa Baixa	50
FIGURA 30 – Localização dos polos e zeros obtidos para o filtro Passa Baixa . .	51
FIGURA 31 – Resposta em Frequência do Filtro Passa Alta	52
FIGURA 32 – Resposta em Frequência do Filtro Passa Alta em decibels	53
FIGURA 33 – Diagrama de Caixa dos Resultados Obtidos para o Filtro Passa Alta	53
FIGURA 34 – Localização dos polos e zeros obtidos para o filtro Passa Alta . .	54
FIGURA 35 – Resposta em Frequência do Filtro Passa Faixa	55
FIGURA 36 – Resposta em Frequência do Filtro Passa Faixa em decibels	56
FIGURA 37 – Diagrama de Caixa dos Resultados Obtidos para o Filtro Passa Faixa	56
FIGURA 38 – Localização dos polos e zeros obtidos para o filtro Passa Faixa . .	57
FIGURA 39 – DFT do Sinal a ser Filtrado	58
FIGURA 40 – DFT do Sinal Filtrado com Filtro Passa Baixa	59
FIGURA 41 – DFT do Sinal Filtrado com Filtro Passa Faixa	59
FIGURA 42 – DFT do Sinal Filtrado com Filtro Passa Alta	60

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 – Classificação dos Sinais Quanto às suas Características	18
QUADRO 2 – Classificação dos Algoritmos Metaheurísticos	24
QUADRO 3 – Etapas de Execução do Trabalho	34

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – Grandezas estatísticas obtidas pelo Algoritmo da Busca Gravitacional na Identificação de um Sistema de Segunda Ordem	36
TABELA 2 – Grandezas estatísticas obtidas pelo Algoritmo da Busca Gravitacional na Identificação de um Sistema de Quinta Ordem	38
TABELA 3 – Grandezas estatísticas obtidas pelo Algoritmo do Sistema Imune Artificial na Identificação de um Sistema de Segunda Ordem . . .	39
TABELA 4 – Grandezas estatísticas obtidas pelo Algoritmo do Sistema Imune Artificial na Identificação de um Sistema de Quinta Ordem	41
TABELA 5 – Grandezas estatísticas obtidas pelo Algoritmo da Baleia na Identificação de um Sistema de Segunda Ordem	42
TABELA 6 – Grandezas estatísticas obtidas pelo Algoritmo da Baleia na Identificação de um Sistema de Quinta Ordem	44
TABELA 7 – Grandezas estatísticas obtidas pelo Algoritmo Colaborativo na Identificação de um Sistema de Segunda Ordem	45
TABELA 8 – Grandezas estatísticas obtidas pelo Algoritmo Colaborativo na Identificação de um Sistema de Quinta Ordem	47
TABELA 9 – Grandezas estatísticas obtidas pelo Algoritmo Colaborativo no projeto de um filtro Passa Baixa	50
TABELA 10 – Grandezas estatísticas obtidas pelo Algoritmo Colaborativo no projeto de um filtro Passa Alta	52
TABELA 11 – Grandezas estatísticas obtidas pelo Algoritmo Colaborativo no projeto de um filtro Passa Faixa	55

LISTA DE SIGLAS

PDS	Processamento Digital de Sinais
DFT	Transformada de Fourier Discreta
FFT	Algoritmos que calculam a Transformada de Fourier Discreta rapidamente
IIR	Infinite Impulse Response
GSA	Algoritmo da Busca Gravitacional
AIS	Algoritmo do Sistema Imune
WOA	Algoritmo da Baleia

LISTA DE SÍMBOLOS

f_s	Frequência de amostragem
B_p	Frequências da banda passante
ω_p	Frequência limite da banda passante
B_s	Frequências da banda de rejeição
ω_s	Frequência limite da banda de rejeição
ω_c	Frequência de Corte
$X(\omega)$	Transformada de Fourier de Tempo Discreto de um sinal $x[n]$
$X(k)$	Transformada de Fourier Discreta de um sinal $x[n]$
δ_1	Ripple na Banda Passante (escala absoluta)
δ_2	Ripple na Banda de Rejeição (escala absoluta)
R_p	Ripple na Banda Passante em decibels
A_s	Mínima atenuação na Banda de Rejeição em decibels
β	Taxa de decaimento da constante gravitacional - GSA
G	Constante Gravitacional - GSA

SUMÁRIO

1	–	INTRODUÇÃO	14
1.1		OBJETIVO	15
1.1.1		Objetivo Geral	15
1.1.2		Objetivos Específicos	15
1.2		JUSTIFICATIVA	15
1.3		ESTRUTURA DO TRABALHO	16
2	–	FILTROS DIGITAIS	17
2.1		SINAL	17
2.2		TRANSFORMADA DE FOURIER DE TEMPO DISCRETO	18
2.3		TRANSFORMADA Z	19
2.3.1		Relação entre a DTFT e a Transformada Z	19
2.4		TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER	19
2.5		FILTROS IIR	20
2.5.1		Causalidade	20
2.5.2		Estabilidade	20
2.5.3		Especificações de Desempenho	20
3	–	METAHEURÍSTICAS	23
3.1		CONCEITOS FUNDAMENTAIS	23
3.1.1		População	23
3.1.2		Iteração	23
3.1.3		Função de Ajuste ou Função <i>Fitness</i>	24
3.1.4		Função Objetivo	24
3.2		CLASSES DE ALGORITMOS METAHEURÍSTICOS	24
3.3		ALGORITMO DA BUSCA GRAVITACIONAL	24
3.4		ALGORITMO DO SISTEMA IMUNE ARTIFICIAL	27
3.5		ALGORITMO DA BALEIA	29
3.6		ALGORITMO COLABORATIVO	32
4	–	METODOLOGIA	34
4.1		ETAPAS	34
4.2		RECURSOS UTILIZADOS	35
4.3		APLICAÇÃO	35
5	–	RESULTADOS	36
5.1		IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS DE TEMPO CONTÍNUO	36
5.1.1		Algoritmo da Busca Gravitacional	36
5.1.2		Algoritmo do Sistema Imune Artificial	39
5.1.3		Algoritmo da Baleia	42
5.1.4		Algoritmo Colaborativo	45

5.2	PROJETO DE FILTROS DIGITAIS	48
5.2.1	Filtro Passa Baixa	48
5.2.2	Filtro Passa Alta	52
5.2.3	Filtro Passa Faixa	55
5.2.4	Aplicação dos Filtros na Filtragem de um Sinal	58
6	– CONCLUSÃO	61
6.1	TRABALHOS FUTUROS	61
	REFERÊNCIAS	62

1 INTRODUÇÃO

A área de Processamento Digital de Sinais (PDS) tem crescido muito nos últimos anos, devido ao fato de que houve um avanço muito grande com relação às soluções disponíveis em *hardware* e *software*, a um baixo custo. Isso tem gerado uma demanda por profissionais que atuem nessa área.

A área de PDS não se restringe apenas à Engenharia Elétrica. São inúmeras as áreas que usufruem das soluções desenvolvidas nesse campo do conhecimento. Como exemplos de aplicação pode-se citar:

- Processamento de áudio
- Processamento de imagens
- Processamento de vídeo
- Engenharia Biomédica
- Sistemas de Controle e Identificação de Sistemas

Este trabalho insere-se nesse contexto, abordando um problema abrangente: sintetizar filtros digitais adaptativos através de técnicas de otimização. Em todas as aplicações citadas anteriormente, são utilizadas estruturas assim, daí sua importância.

Tradicionalmente, o projeto de filtros digitais do tipo IIR (*Infinite Impulse Response*), os quais são o enfoque deste trabalho, se dá por meio de protótipos analógicos (Chebyshev, Butterworth, Elíptico), nos quais se trabalha com especificações em escalas absoluta e relativa e, a partir destas, existem fórmulas para se estimar a função matemática que descreve o filtro.

Já no cenário deste trabalho, utiliza-se uma abordagem diferenciada daquela citada. Ao utilizar o recurso das técnicas de otimização, não se recorre mais aos protótipos analógicos, mas se estima os parâmetros através dos algoritmos utilizados.

Trabalhos utilizando esta abordagem com métodos de otimização foram desenvolvidos até então. Na linha de algoritmos tradicionais, Junior, Silva e Braid (2008) fazem uma abordagem prática dos filtros digitais adaptativos, utilizando técnicas baseadas no método do gradiente no tratamento de sinais de áudio. Pereira (2009) aplica os filtros adaptativos usando essa mesma linha de algoritmos aos sistemas de potência (filtros ativos para detecção de harmônicos). Pereira (2013) desenvolveu um estudo em diferentes aplicações: identificação de sistemas, equalização de canal, predição linear e cancelamento de interferências (por exemplo, em um eletrocardiograma). Entretanto, por serem baseados no cálculo do gradiente, caso a função a ser minimizada não seja convexa, há o risco de a solução encontrada ser um mínimo local, e não global (BOTTOU, 1998).

Kalinli e Karaboga (2005) aplicaram o Algoritmo do Sistema Imune Artificial

no projeto de filtros IIR. Oliveira *et al.* (2007) aplicaram a metaheurística do enxame de partículas no projeto desses sistemas. Karaboga (2009) utilizaram o algoritmo de colônia artificial de abelhas. Rashedi, Nezamabadi-pour e Saryazdi (2011) aplicaram o algoritmo da busca gravitacional ao projeto de filtros, assim como Kumar e Kar (2014) e Saha *et al.* (2015), entretanto este último com o uso de transformada Wavelet. Kumar e Rawat (2015) utilizaram o algoritmo baseado na busca de cucos. Mais recentemente, Kumar, Rawat e Aggarwal (2017) desenvolveram um trabalho nessa área com algoritmo de busca interior modificado com voos de Lèvy.

Nesse sentido, foram estudados e implementados neste trabalho os algoritmos de Busca Gravitacional (GSA, do inglês *Gravitational Search Algorithm*), o qual foi proposto por Rashedi, Nezamabadi-pour e Saryazdi (2009), algoritmo da Baleia (*Whale Algorithm*) de Mirjalili e Lewis (2016), algoritmo do Sistema Imune Artificial (utilizando o modelo proposto por Kalinli e Karaboga (2005)) e o algoritmo colaborativo, todos voltados ao contexto dos filtros digitais.

1.1 OBJETIVO

1.1.1 Objetivo Geral

Este projeto tem como objetivo a utilização de técnicas metaheurísticas na síntese de filtros digitais, isto é, a sintonia de parâmetros de um filtro será feita utilizando estas técnicas de otimização.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Estudar e implementar o algoritmo de otimização da Busca Gravitacional.
- Estudar e implementar o algoritmo de otimização da Baleia.
- Estudar e implementar o algoritmo de otimização do Sistema Imune.
- Estudar e implementar o algoritmo de otimização de Forma Colaborativa, utilizando os três algoritmos citados anteriormente.
- Aplicar a solução desenvolvida na síntese de filtros digitais.

1.2 JUSTIFICATIVA

Este projeto propõe-se a trabalhar com uma abordagem diferenciada no projeto de filtros digitais, utilizando as técnicas metaheurísticas. Alguns trabalhos, como o de Pereira (2013), utilizam algoritmos de otimização baseados no método do gradiente. Entretanto, esses algoritmos podem muitas vezes ficarem "presos" a um mínimo local, por exemplo. Já as técnicas metaheurísticas, por possuírem um caráter mais estocástico, conseguem dar "saltos" nessas situações, ou seja, possuem uma capacidade maior de exploração num mesmo espaço de busca.

No contexto dos algoritmos de otimização existe um teorema chamado Não Existe Almoço Grátis, do inglês *No Free Lunch Theorem*, proposto por Wolpert e Macready (1997), o qual afirma que não há um algoritmo que seja melhor que todos os outros em todas as aplicações possíveis.

É nesse cenário que se insere a estrutura proposta neste trabalho: um algoritmo colaborativo, que mescle as melhores características de três algoritmos de diferentes classificações, com a finalidade de se obter uma solução melhor do que a que seria obtida por cada método individualmente.

1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho consiste em seis capítulos.

O primeiro capítulo é a Introdução, na qual são apresentados: o contexto no qual se situa o trabalho (problematização), os objetivos que o norteiam e a justificativa de sua execução.

O segundo capítulo, por sua vez, consiste na fundamentação teórica acerca dos Filtros Digitais. São abordadas as definições no âmbito do Processamento Digital de Sinais, bem como os fundamentos matemáticos que permeiam esse cenário.

No terceiro capítulo são apresentadas as técnicas metaheurísticas. São apresentadas as definições essenciais, bem como os algoritmos utilizados para a realização do projeto.

Já no quarto capítulo é descrita a metodologia utilizada na execução deste projeto, englobando a organização adotada e os recursos utilizados.

O quinto capítulo consiste na apresentação e discussão dos resultados obtidos com a execução do trabalho, sendo descritos todos os procedimentos utilizados para obtenção dos mesmos.

O sexto e último capítulo contém a conclusão do trabalho, contemplando as considerações a serem feitas com o término do projeto, bem como possíveis trabalhos futuros na temática deste.

2 FILTROS DIGITAIS

Segundo Proakis e Manolakis (2007), o termo filtro é utilizado para descrever um dispositivo que, de acordo com algumas características do que é aplicado em sua entrada, seleciona o que passa por ele e é visto na saída.

No contexto da Engenharia Elétrica, um filtro pode ser analógico ou digital. O que se aplica na entrada e se observa na saída são sinais. Essa situação pode ser visualizada na figura 1.

FIGURA 1 – Funcionamento de um Filtro Seletor de Sinais



Fonte: O Autor (2018).

A abordagem analógica consiste na implementação do mesmo através de componentes eletrônicos, como capacitores, indutores e resistores.

Já no que se refere a este trabalho, foram utilizados os filtros digitais. Dessa forma, não há implementação com componentes da mesma forma que o analógico, pois são utilizados recursos computacionais para isso. Para isso, algumas ferramentas matemáticas foram necessárias no desenvolvimento deste trabalho, as quais são discutidas na sequência.

2.1 SINAL

Um sinal é uma grandeza física que varia em função de uma ou mais variáveis independentes. Os sinais podem ser classificados conforme o quadro 1.

QUADRO 1 – Classificação dos Sinais Quanto às suas Características

Característica	Classificação	Descrição
Dimensões	Multicanais	É um sinal que contém outros sinais nele. Usualmente é representado por um vetor de sinais.
	Multidimensionais	É um sinal dependente de mais de uma variável. No caso em que depende apenas de uma variável independente, é chamado de unidimensional.
Tempo	Contínuo	São sinais definidos para valores reais de tempo.
	Discreto	São sinais definidos para valores específicos de tempo.
Amplitude	Contínua	Sinais cujos valores possíveis de amplitudes estão dentro de uma faixa finita ou infinita de valores.
	Discreta	Se o sinal assume apenas valores finitos em um conjunto de valores possíveis, igualmente espaçados e sendo possível representá-los por um múltiplo da distância entre dois valores.
Natureza Estatística	Estocástico	Quando os sinais não seguem um padrão que se possa prever. Sinais aleatórios.
	Determinístico	Quando o sinal é descrito por uma expressão matemática, um conjunto de dados ou uma regra bem definida.

Fonte: O Autor (2018) com base em Proakis e Manolakis (2007).

2.2 TRANSFORMADA DE FOURIER DE TEMPO DISCRETO

Seja $x[n]$ um sinal aperiódico de tempo discreto. A transformada de Fourier desse sinal é definida por:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\omega n} \quad (1)$$

De acordo com Proakis e Manolakis (2007) $X(\omega)$ pode ser interpretada como a decomposição em frequência do sinal $x[n]$.

É válido ressaltar que, diferentemente dos sistemas de tempo contínuo, o conteúdo em frequências discretas se encontra no intervalo $(-\pi, \pi)$, ou, equivalentemente, $(0, 2\pi)$. Isso ocorre porque $X(\omega)$ é periódica com período 2π .

2.3 TRANSFORMADA Z

A transformada Z de um sinal de tempo discreto $x[n]$ é definida pela seguinte série de potências:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n].z^{-n} \quad (2)$$

onde z é uma variável complexa.

Se (2) é uma série infinita de potências, existem apenas alguns valores de z para os quais esse somatório converge. A esse conjunto de valores é dado o nome de Região de Convergência, ou, alternativamente, ROC (do inglês *Region Of Convergence*).

2.3.1 Relação entre a DTFT e a Transformada Z

A variável z pode ser expressa por:

$$z = r.e^{j\omega} \quad (3)$$

onde $r = |z|$ e $\omega = \angle z$. Sendo a transformada Z do sinal $x[n]$ definida por (2), é possível reescrevê-la por:

$$X(z)|_{z=re^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x[n].r^{-n}]e^{-j\omega n} \quad (4)$$

Da definição de transformada de Fourier de Tempo Discreto (DTFT), nota-se que a equação (4) pode ser interpretada como a transformada do sinal $x[n].r^{-n}$. Caso $|z| = r = 1$, a DTFT é igual à transformada Z. Dessa forma, se $X(z)$ converge para $|z| = 1$, então $X(\omega)$ existe; Caso contrário, não.

2.4 TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

A Transformada Discreta de Fourier (DFT) de um sinal é definida por (5):

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N} \quad (5)$$

onde $k = 0, 1, \dots, N - 1$.

Essa transformada consiste na amostragem em N pontos em um período da DTFT. Dessa forma, segundo Proakis e Manolakis (2007), é possível reconstruir $X(\omega)$ através de $X(k)$.

Computacionalmente, são utilizados algoritmos matemáticos para o cálculo desta transformada. Aos algoritmos eficientes para o cálculo da mesma é dado o nome de FFT.

2.5 FILTROS IIR

Os filtros IIR (*Infinite Impulse Response*) são caracterizados pela duração infinita de sua resposta ao impulso e podem ser descritos pela equação (6):

$$y(n) = - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (6)$$

na qual y representa a saída do sistema e x a entrada.

Alternativamente, essa equação de diferenças pode ser escrita no domínio z , conforme mostrado na equação (7).

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \quad (7)$$

A equação (7) é também chamada de **função de transferência** do sistema.

2.5.1 Causalidade

Um sistema linear e invariante no tempo é causal se $h(n) = 0$, para $n < 0$. Dessa forma, o sistema somente será causal se e somente se a ROC da função de transferência do sistema, no domínio z , for o exterior de um círculo de raio $r < \infty$, incluindo o ponto $z = \infty$.

2.5.2 Estabilidade

O critério utilizado para avaliação de estabilidade neste trabalho é o BIBO (do inglês *Bounded Input Bounded Output*, entrada limitada, saída limitada). De acordo com o livro de Proakis e Manolakis (2007), uma condição necessária e suficiente para classificar um sistema como BIBO é:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty \quad (8)$$

Essa condição implica que o círculo unitário esteja contido na ROC do sistema.

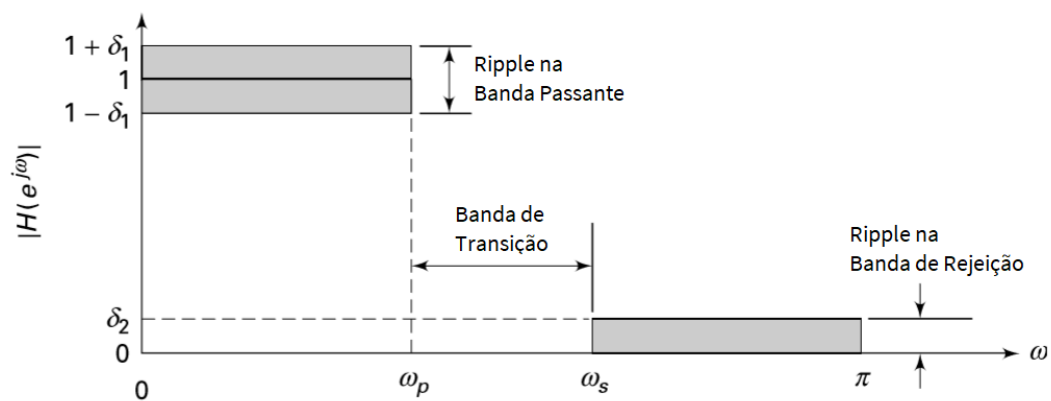
Se um sistema é causal e estável, então é necessário que a condição $|z| > r < 1$ seja satisfeita, logo, todos os seus polos estão alocados dentro do círculo unitário.

2.5.3 Especificações de Desempenho

No projeto de filtros, sejam eles digitais ou analógicos, são necessárias algumas especificações de desempenho.

A figura 2 ilustra a resposta em frequência de um filtro genérico passa baixas, indicando essas características.

FIGURA 2 – Especificações de um Filtro em escala absoluta



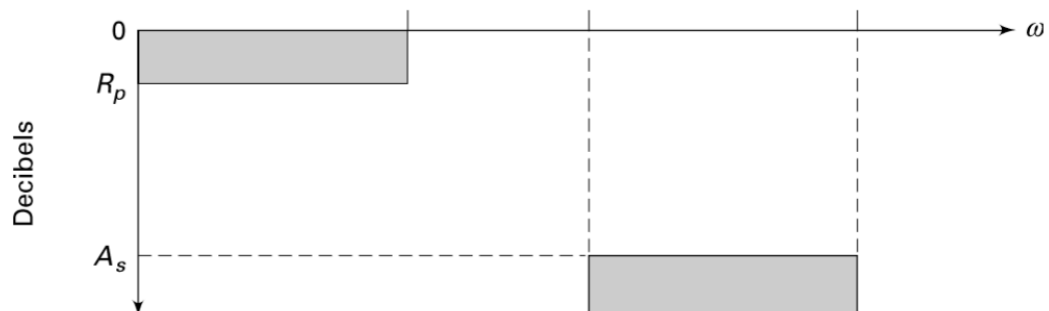
Fonte: Ingle e Proakis (2012)

Nessa imagem, são apresentadas as seguintes especificações:

- **Banda Passante**, é a faixa de frequências para a qual o filtro permite a passagem do sinal cujo conteúdo espectral seja contemplado por estas frequências.
- **Banda de Rejeição**, é o conjunto de frequências para o qual o filtro atenua o sinal de forma a não deixá-lo passar.
- **Banda de Transição**, corresponde ao conjunto de frequências que vão de ω_p a ω_s , no qual ocorre a mudança de banda passante para banda de rejeição.
- **Ripple na Banda Passante**, consiste no valor δ_1 , é a variação máxima encontrada na banda passante (idealmente o módulo seria igual a 1).
- **Ripple na Banda de Rejeição**, consiste no valor δ_2 , é a variação máxima encontrada na banda de rejeição (idealmente o módulo seria 0).

Na figura 3, são apresentadas mais duas especificações, em escala relativa (Decibels).

FIGURA 3 – Especificações de um Filtro em escala relativa



Fonte: Ingle e Proakis (2012)

R_p é o ripple na banda passante e A_s a mínima atenuação na banda de rejeição.

A resposta em frequência em escala relativa é obtida através da resposta em escala absoluta através da seguinte relação:

$$|H(\omega)_{dB}| = 20 \log_{10} \frac{|H(\omega)|}{\max(|H(\omega)|)} \quad (9)$$

3 METAHEURÍSTICAS

No desenvolvimento deste trabalho, foram utilizados os algoritmos metaheurísticos na síntese dos filtros digitais. Este capítulo é dedicado à apresentação dos fundamentos teóricos acerca desses algoritmos.

As técnicas metaheurísticas consistem em métodos que visam buscar uma solução que, embora possa não ser a ótima do ponto de vista global, é factível e aceitável.

Elas são inspiradas em elementos da vida real, como por exemplo as leis físicas, ou também aspectos biológicos, como o comportamento de animais no ambiente ou mecanismos de defesa do corpo humano. Existem vários algoritmos propostos, sendo que três foram objeto de estudo deste trabalho: Algoritmo da Busca Gravitacional (do inglês *Gravitational Search Algorithm (GSA)*), Algoritmo do Sistema Imunológico Artificial (*Artificial Immune Algorithm*) e Algoritmo da Baleia (*The Whale Optimization Algorithm*).

3.1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Nos algoritmos heurísticos, alguns conceitos são fundamentais para a compreensão do funcionamento dos mesmos.

3.1.1 População

A população de um algoritmo heurístico consiste em um conjunto de possíveis soluções para o problema. Em geral, é especificada uma faixa de valores admissíveis para a solução (limites inferior e superior) e, de forma aleatória, são geradas soluções candidatas, dentro desses limites estabelecidos. Esses valores serão avaliados e atualizados a cada iteração (definido na subseção 3.1.2).

3.1.2 Iteração

Os algoritmos heurísticos executam um mesmo conjunto de instruções por várias vezes. A cada repetição é dado o nome iteração. Normalmente, a cada iteração é feita uma avaliação do quão satisfatória é cada solução candidata (cada elemento da população) através de uma função *fitness*, e, na sequência, é feita uma atualização de cada membro da população, de acordo com os valores obtidos. Cada algoritmo possui uma particularidade nessa parte.

3.1.3 Função de Ajuste ou Função *Fitness*

A função *fitness* consiste num método de cálculo que quantifica quão adequada é uma solução no contexto de um problema. De acordo com o método utilizado, um valor maior retornado por essa função pode significar uma solução boa ou ruim.

3.1.4 Função Objetivo

A função objetivo em um problema de otimização é o elemento no qual se trabalha para maximizar ou minimizar o valor retornado. No contexto deste trabalho, a função objetivo utilizada foi o erro médio quadrático, definido pela equação (10).

$$E = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (d(k) - y(k))^2 \quad (10)$$

nessa equação, E é o erro médio quadrático, N é o número de amostras, $d(k)$ é a resposta obtida pelo sistema e $y(k)$ a resposta esperada.

3.2 CLASSES DE ALGORITMOS METAHEURÍSTICOS

Os algoritmos metaheurísticos podem ser classificados em quatro categorias principais, de acordo com o que lhes serviu de inspiração: Evolucionários, Físicos, Enxames e Humanos. O quadro 2 apresenta alguns exemplos de cada classe.

QUADRO 2 – Classificação dos Algoritmos Metaheurísticos

Classificação	Descrição
Evolucionários	Algoritmos baseados em aspectos da evolução natural. Como exemplos pode-se citar o algoritmo Genético (GA), Algoritmo Biogeográfico (BBO) e Programação Genética (GP).
Físicos	Algoritmos baseados nas leis da física. Como exemplos pode-se citar o Algoritmo da Busca Gravitacional (GSA), Algoritmo do Recozimento Simulado (SA) e o Algoritmo do Buraco Negro (BH).
Enxames	Algoritmos que mimetizam o comportamento social dos grupos de animais (por exemplo, um enxame de abelhas). Nessa linha de algoritmos pode-se citar o Algoritmo da Baleia (WOA), Busca de Cucos (CS), Monkey Search (MS) e Otimização por enxame de partículas (PSO).
Humanos	Algoritmos baseados em comportamentos humanos, como por exemplo o Algoritmo do Sistema Imune Artificial (AIS), Busca Tabu (TS) e a Busca Harmônica (HS).

Fonte: O Autor (2018).

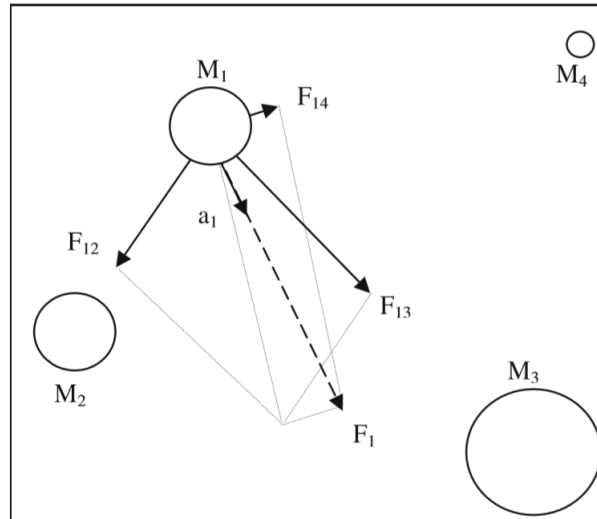
3.3 ALGORITMO DA BUSCA GRAVITACIONAL

O algoritmo da Busca Gravitacional foi proposto por Rashedi, Nezamabadi-pour e Saryazdi (2009). Este algoritmo consiste numa técnica heurística de otimização,

a qual é baseada nas leis gravitacionais. Similarmente às leis físicas, cada partícula atrai a outra com uma força que é proporcional à sua massa.

Em linhas gerais, esse algoritmo baseia-se na seguinte suposição: sejam um sistema de massas, conforme ilustrado na FIGURA 4.

FIGURA 4 – Sistema de Massas.



Fonte: Rashedi, Nezamabadi-pour e Saryazdi (2009).

A força F exercida pela massa i na massa j pode ser calculada pela equação (11).

$$F_{ij} = G \frac{M_i M_j}{R_{ij}^2} \quad (11)$$

Nessa equação G é a constante gravitacional, M_i e M_j são as massas de i e j , respectivamente, R_{ij} a distância euclidiana entre i e j .

Esse algoritmo consiste numa sequência de passos, os quais constam no fluxograma apresentado na FIGURA 5 e são discutidos na sequência.

Inicialmente, gera-se uma população inicial, dentro do espaço de busca previamente especificado.

Em seguida, é feito o cálculo da função *fitness*, avaliando-se o quão adequada é cada elemento da população como solução do problema.

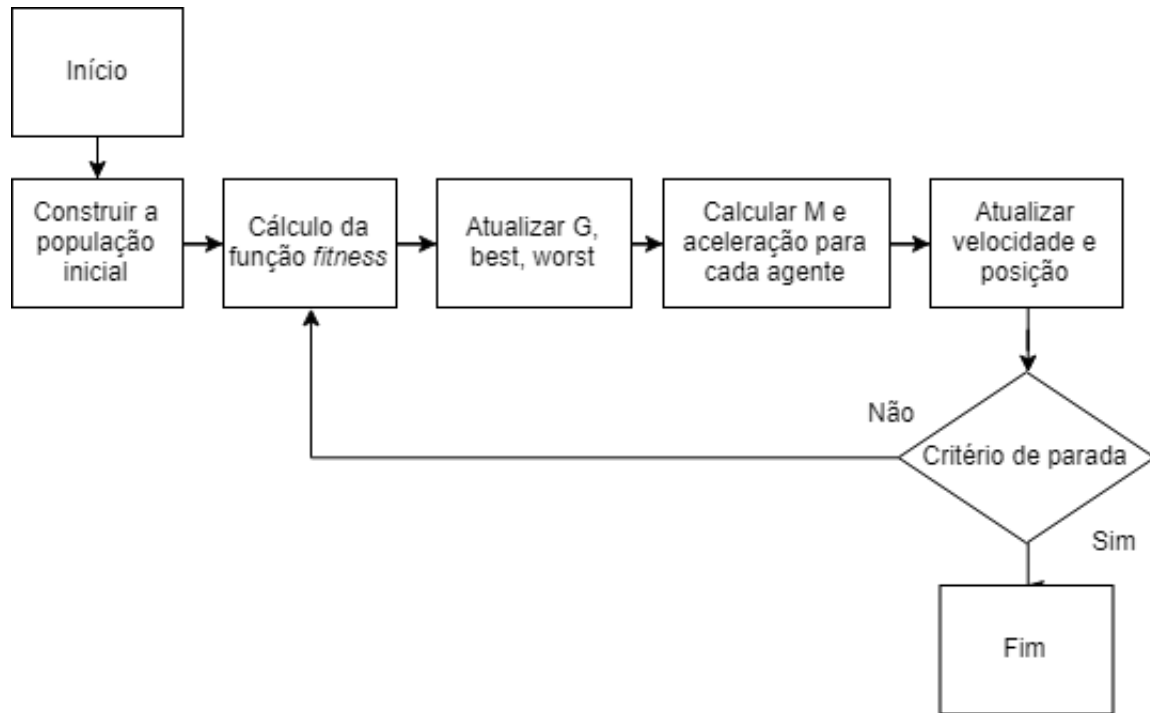
Posteriormente, atualiza-se os parâmetros G , *best* e *worst*, de acordo com as equações 12, 13 e 14.

$$G(t) = G(t_0) \left(\frac{t_0}{t} \right)^\beta, \beta < 1. \quad (12)$$

$$best(t) = MIN fit_j(t) \quad (13)$$

$$worst(t) = MAX fit_j(t) \quad (14)$$

FIGURA 5 – Fluxograma do Algoritmo da Busca Gravitacional



Fonte: O Autor (2018).

É válido ressaltar que as equações 13 e 14 são válidas se o problema a ser resolvido for de minimização da função objetivo. Caso contrário, a eq. 13 passa a ser *worst* e a eq. 14 passa a ser *best*.

Após isso, calcula-se a massa de cada agente, através das equações 15 e 16 e a força, através da equação (17).

$$m_i(t) = \frac{fit_i(t) - worst(t)}{best(t) - worst(t)} \quad (15)$$

$$M_i(t) = \frac{m_i(t)}{\sum_{j=1}^N m_j(t)} a \quad (16)$$

$$F_{ij}^d = G \frac{M_i M_j}{R_{ij} + \epsilon} (x_j^d - x_i^d) \quad (17)$$

Na equação (17), x_j^d e x_i^d são as coordenadas de i e j na dimensão d . Ela se difere da eq. 11 nos seguintes pontos:

- Calcula-se a força F para cada direção d . Em outras palavras, no caso de um filtro, cada dimensão é um coeficiente.
- A distância R_{ij} não é elevada ao quadrado, por questões de melhoria de convergência (RASHEDI; NEZAMABADI-POUR; SARYAZDI, 2009),
- Multiplica-se o produto das massas M_i e M_j pela diferença entre x_j^d e x_i^d .

Após o cômputo de todas as forças em todas as direções, calcula-se a força resultante em cada agente, F_i^d , conforme a equação (18).

$$F_i^d(t) = \sum_{j=1, j \neq i}^N rand_j F_{ij}^d(t) \quad (18)$$

na qual $rand_j$ é um número gerado aleatoriamente no intervalo $[0,1]$, conferindo uma característica estocástica ao algoritmo.

Na sequência, calcula-se a aceleração em cada elemento i , através de (19).

$$a_i^d(t) = \frac{F_i^d(t)}{M_i(t)} \quad (19)$$

Por fim, atualiza-se os valores de velocidade e posição conforme as equações 20 e 21:

$$v_i^d(t+1) = rand_i v_i^d(t) + a_i^d(t) \quad (20)$$

$$x_i^d(t+1) = x_i^d(t) + v_i^d(t+1) \quad (21)$$

É válido ressaltar que a posição atualizada em (21) equivale aos elementos da população gerada inicialmente. Isto é, cada posição é interpretada como um elemento da população.

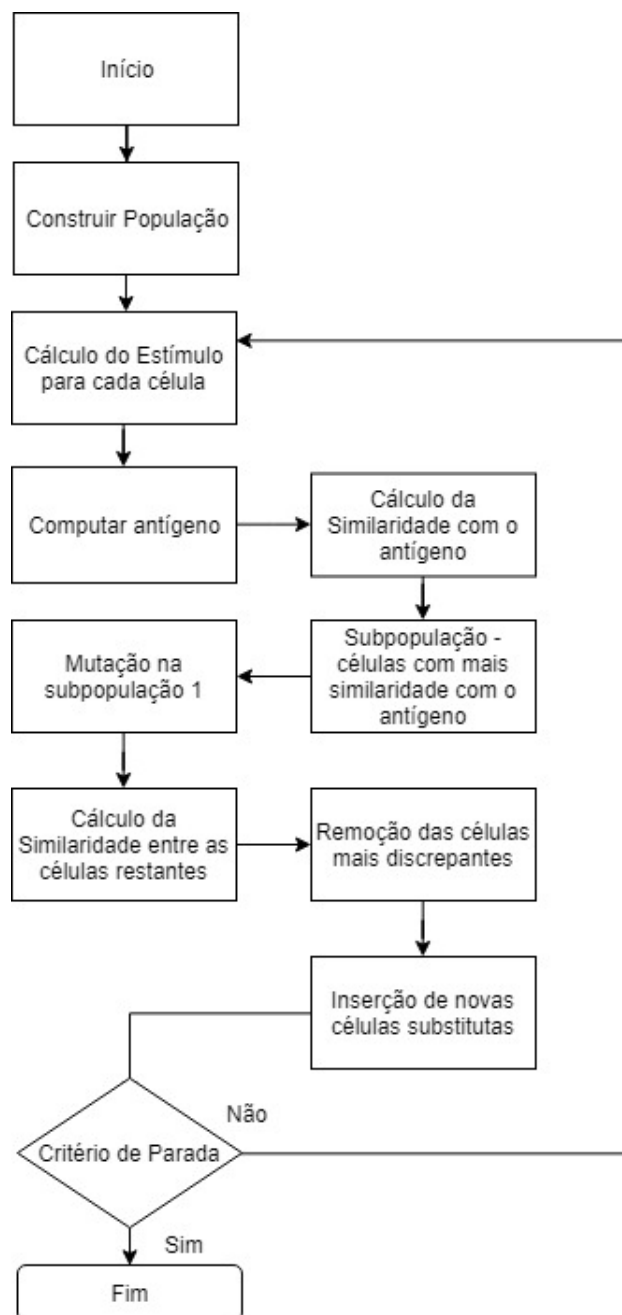
3.4 ALGORITMO DO SISTEMA IMUNE ARTIFICIAL

O algoritmo do Sistema Imune Artificial baseia-se no funcionamento do Sistema Imunológico Natural. Em linhas gerais, o Sistema Imunológico Natural classifica as células em próprias e não próprias. Estas últimas estimulam um mecanismo de defesa para posterior eliminação das mesmas. Para que esse processo de defesa ocorra, há a produção de células chamadas linfócitos. Nesse cenário em especial, será abordada a atuação dos linfócitos B, os quais secretam anticorpos que podem se ligar a antígenos (corpos estranhos) específicos.

Dessa forma, quando uma célula tipo B encontra um antígeno, caso eles combinem, ocorre a neutralização do mesmo. Caso essa combinação seja suficientemente forte, estimula-se a produção de clones dessa célula. Caso os níveis de estímulo abai-xem, cessa-se a produção dos clones e estas células morrem. É válido salientar que a sobrevivência das células B está atrelada à compatibilidade e similaridade com as outras células e antígenos.

É nesse cenário que foi criado o Algoritmo do Sistema Imune Artificial. As etapas de cálculo do algoritmo se inspiram nessas interações entre as células. Essa sequência de passos pode ser vista na figura 6.

FIGURA 6 – Fluxograma do Algoritmo do Sistema Imune Artificial



Fonte: O Autor (2018).

Nesse algoritmo, cada célula representa uma solução candidata (elemento da população).

De forma similar ao algoritmo apresentado na seção 3.3, primeiramente constrói-se a população inicial, depois calcula-se o valor da função *fitness* (aqui chamado de estímulo de cada célula) e computa-se o elemento que retornou o melhor valor, chamado de antígeno.

Computado o antígeno, é feito na sequência um cálculo de similaridade de cada membro da população com o antígeno. Este cálculo é feito da seguinte forma:

seja a o antígeno e b um membro qualquer da população, tal que $a \neq b$, a_2 e b_2 as representações em base binária de a e b , respectivamente. Compara-se bit a bit a_2 e b_2 , sendo que, para cada bit igual, soma-se a potência de 2 correspondente à similaridade. Por exemplo, se $a = 15$ e $b = 12$, $a_2 = 1111$ e $b_2 = 1100$. Dessa forma, $\text{similaridade} = 2^3 + 2^2 + 0 + 0 = 12$, pois apenas os dois primeiros bits são iguais.

Na sequência, é formada uma subpopulação com as células que apresentaram maiores valores de similaridade com o antígeno. Estas células sofrem mutação somática, isto é, altera-se aleatoriamente os bits desses elementos. Após isso, é feito um cálculo de similaridade novamente, verificando se as soluções mutantes tiveram um desempenho melhor ou pior nesse quesito. Caso haja piora, a mutação é desfeita e, caso contrário, mantida.

Com as células restantes é feito um cálculo de similaridade entre elas, e não mais apenas com o antígeno. As que apresentam piores resultados (mais discrepantes) são removidas e novas células, geradas aleatoriamente dentro do espaço de busca, são inseridas na população.

Verifica-se então se o critério de parada foi atingido. Caso tenha sido atingido, finaliza-se o algoritmo, caso contrário, volta-se à etapa de cálculo de estímulo de cada célula e computação do antígeno.

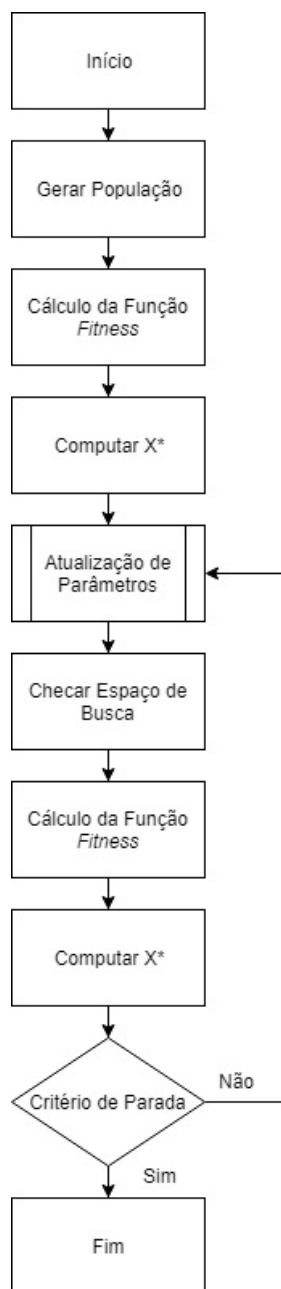
3.5 ALGORITMO DA BALEIA

O algoritmo da Baleia foi originalmente proposto por Mirjalili e Lewis em 2016. Trata-se de uma técnica inspirada na natureza, mais especificamente no comportamento de caça das baleias cantoras. Em linhas gerais, essa espécie de baleia tem uma peculiaridade na sua estratégia de caça: elas mergulham a uma profundidade maior da qual está a presa e, na sequência, em um movimento espiral, vão subindo e soltando bolhas.

Essa técnica lança mão das seguintes analogias: cada solução candidata (elementos da população) pode ser vista como uma baleia e a presa é o objetivo (minimização ou maximização da função custo). Além disso, cada movimento da baleia no seu método de obter alimento é tido como uma estratégia de atualização de parâmetros a cada iteração, isto é, o movimento espiral e o movimento de subida correspondem cada um a um procedimento de melhoria das soluções candidatas.

Assim como os demais algoritmos já discutidos, a estrutura básica deste método é similar às já apresentadas: geração de uma população aleatória, avaliação das soluções candidatas e atualização de parâmetros. Os fluxogramas das figuras 7 e 8 ilustram as etapas de cálculo do Algoritmo da Baleia.

FIGURA 7 – Fluxograma do Algoritmo da Baleia



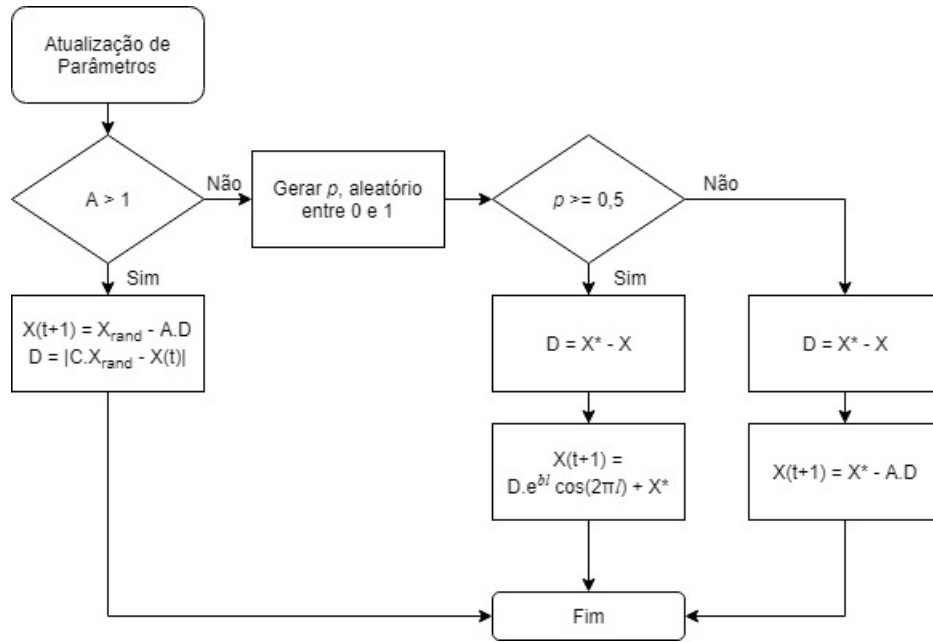
Fonte: O Autor (2018).

A etapa “Gerar População” consiste na geração de valores reais aleatórios dentro de uma faixa previamente especificada, ou seja, são criadas soluções candidatas à solução do problema.

Na sequência, tem-se o passo “Cálculo da função *fitness*”, na qual se mensura quão adequada é cada solução proposta na etapa anterior, guardando-se a opção que retornou o valor mais adequado nesse cálculo (denotada por X^*).

De posse desses dados, o algoritmo na etapa seguinte realiza a atualização dos parâmetros da população. Para realizar essa atualização, são definidos dois parâmetros, logo na inicialização do algoritmo: A e C, os quais são definidos pelas equa-

FIGURA 8 – Fluxograma da Subrotina Atualização de Parâmetros no Algoritmo da Baleia



Fonte: O Autor (2018).

ções 22 e 23.

$$A = 2.a.r - a; \quad (22)$$

$$C = 2.r; \quad (23)$$

onde a varia de 2 a 0 linearmente com o passar das iterações e r é um valor randômico no intervalo $[0,1]$. Dessa forma, quando o módulo de A for maior que 1, os valores da população $X(t)$ serão atualizados conforme a equação (24):

$$X(t+1) = X_{rand} - A.D \quad (24)$$

para cada elemento da população, D é calculado por:

$$D = |C.X_{rand} - X| \quad (25)$$

onde X_{rand} é um elemento aleatório da população, selecionado a cada iteração.

Caso o módulo de A seja menor do que 1, a atualização se dá de acordo com o valor de um número p , o qual é gerado aleatoriamente no intervalo $[0,1]$ a cada iteração. Caso p seja maior ou igual a 0,5, segue-se a equação (26):

$$X(t+1) = D.e^{bl} \cos(2.\pi.l) + X^*(t) \quad (26)$$

onde t indica a iteração atual, X^* é a melhor solução até então, D é a distância do i -ésimo elemento à melhor solução ($D = X^*(t) - X(t)$), b é uma constante e l é

um número aleatório no intervalo $[-1,1]$. Já para o caso em que $p < 0,5$, atualiza-se pela equação (27):

$$X(t+1) = X^*(t) - A.D \quad (27)$$

Após a atualização dos elementos da população, faz-se uma verificação destes no espaço de busca, isto é, caso algum elemento tenha ultrapassado o espaço delimitado na inicialização, esta etapa reinicializa estes valores para que satisfaçam a essa condição.

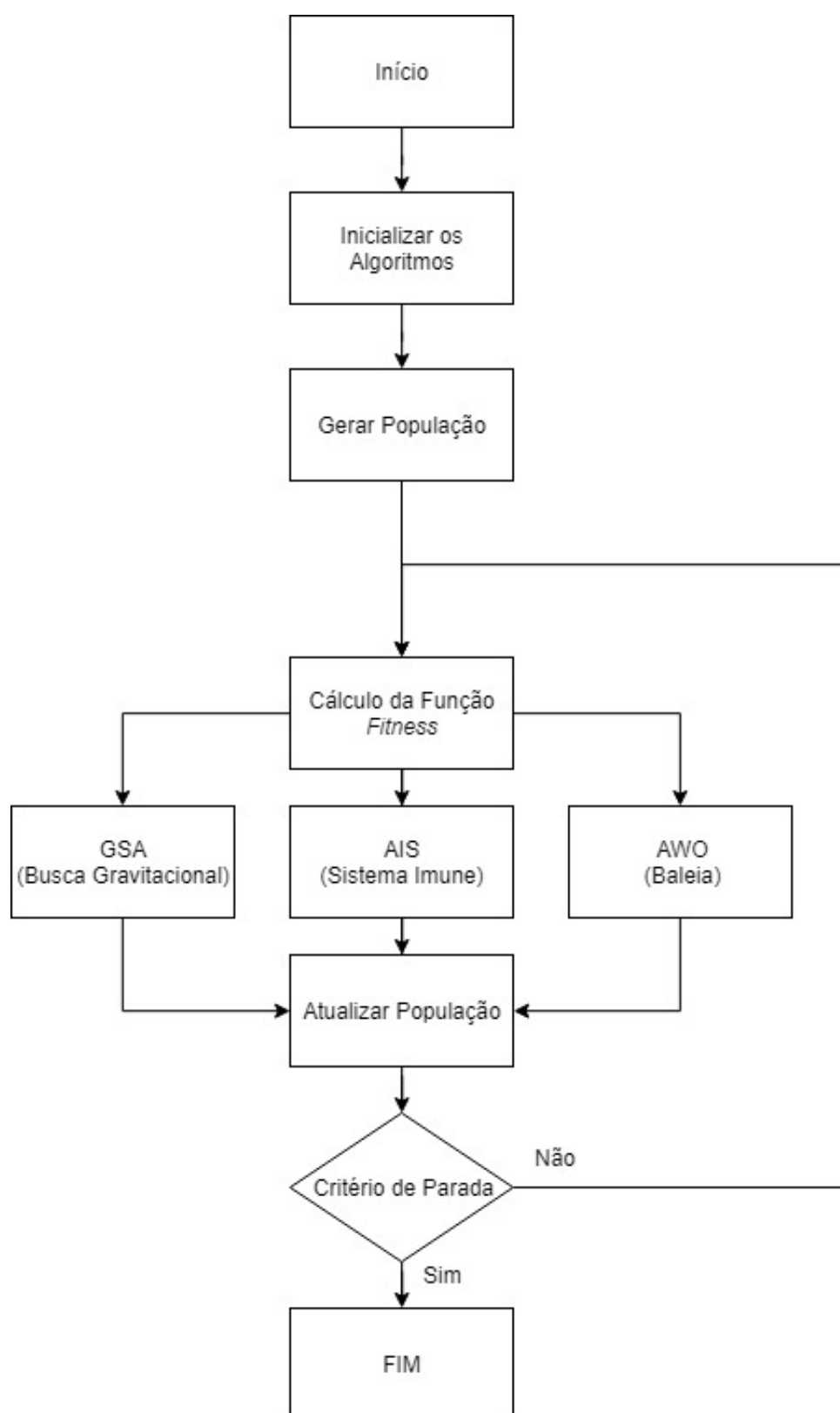
Na sequência, é feito novamente o cálculo da função de ajuste, agora para os valores atualizados, e computado o melhor valor. Com isso, se o critério de parada foi atingido, o algoritmo para, caso contrário, volta à atualização de parâmetros e isso se repete até que esse critério seja atingido.

3.6 ALGORITMO COLABORATIVO

A estrutura colaborativa proposta neste trabalho é ilustrada na figura 9. Em linhas gerais, combina-se a atuação dos três algoritmos apresentados nas seções 3.3, 3.4 e 3.5, com a finalidade de se extrair as melhores características de cada algoritmo.

Inicialmente, inicializa-se os algoritmos (definição das constantes e parâmetros de configuração de cada um). Em seguida, gera-se a população e o cálculo da função *fitness* para cada elemento. Os resultados obtidos seguem então para as subrotinas de atualização de cada algoritmo sendo que, ao final, a população de cada um será atualizada conforme cada método. Para uma população de N indivíduos, seleciona-se $N/3$ elementos provenientes de cada algoritmo. Após, verifica-se se o critério de parada foi atingido, fazendo o cálculo da função *fitness* novamente, mas para essa nova população atualizada. Em caso afirmativo, o algoritmo é finalizado, caso contrário, não.

FIGURA 9 – Fluxograma do Algoritmo Colaborativo



Fonte: O Autor (2018).

4 METODOLOGIA

Na execução do projeto, cujos objetivos foram elencados na seção 1.1, foi utilizada uma metodologia de abordagem, a qual é descrita neste capítulo.

4.1 ETAPAS

O projeto foi dividido em seis etapas, as quais são apresentadas no quadro 3. Cada etapa tinha uma meta a ser alcançada, após a execução das atividades necessárias.

QUADRO 3 – Etapas de Execução do Trabalho

Etapa	Descrição	Atividades Executadas
1	Revisão Bibliográfica	Foram revisados os aspectos principais dos Filtros Digitais, bem como a documentação dos pontos essenciais para realização do trabalho. Nessa parte incluem-se também ferramentas matemáticas que foram consideradas essenciais nas etapas futuras (apresentadas no capítulo 2). A meta desta etapa foi a revisão bibliográfica do tema.
2	Algoritmo da Busca Gravitacional	Houve o primeiro contato com os algoritmos metaheurísticos, mais especificamente com o algoritmo de Busca Gravitacional. Parte do tempo foi dedicado ao estudo e compreensão do mesmo, e, após, à sua implementação computacional. Ao final desta etapa, obteve-se o código deste algoritmo em MATLAB.
3	Algoritmo do Sistema Imune Artificial	Estudo e implementação do algoritmo de otimização de Sistema Imune, procedendo da mesma forma que na etapa anterior. Gerou-se o código em linguagem MATLAB ao final.
4	Algoritmo da Baleia	De forma análoga às duas etapas anteriores, foi feito um estudo e, ao final, a implementação do algoritmo. Também obteve-se o script deste algoritmo no MATLAB.
5	Algoritmo Colaborativo	Estudo e implementação do algoritmo colaborativo, construindo uma estrutura em que o método de cálculo contemple as melhores características de cada algoritmo das etapas anteriores, assim como ilustrado na figura 9.
6	Projeto de Filtros Digitais	Aplicação da solução desenvolvida na etapa anterior no projeto de Filtros Digitais.

Fonte: O Autor (2018).

4.2 RECURSOS UTILIZADOS

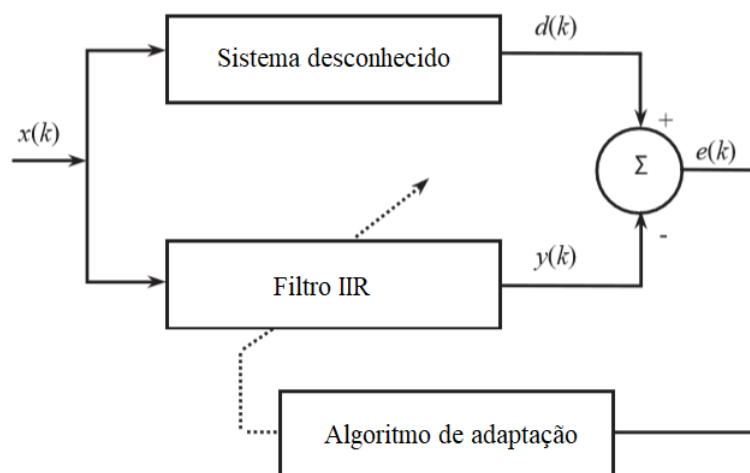
Para a realização do trabalho foram utilizados os seguintes recursos:

- Software de cálculo numérico, MATLAB, para implementação dos algoritmos.
- Distribuição $\text{\LaTeX}$ para elaboração da documentação referente ao projeto.

4.3 APLICAÇÃO

A aplicação das soluções desenvolvidas nas etapas 2, 3, 4 e 5 se deu da seguinte forma: sendo conhecida a resposta $d(k)$ de um sistema a priori, desejou-se estimar qual seria a função de transferência deste sistema (sendo ela desconhecida). Essa situação é ilustrada na figura 10.

FIGURA 10 – Identificação de Sistema através de Algoritmos de Adaptação



Fonte: Adaptado de Kalinli e Karaboga (2005).

Primeiramente, os algoritmos implementados foram aplicados para o reconhecimento de sistemas de tempo contínuo. A comparação entre o sinal desejado e o sinal obtido foi feita no domínio do tempo, com a resposta ao degrau dos sistemas.

Por fim, após a conclusão dessas etapas, foi aplicada a solução desenvolvida no projeto de filtros digitais, sendo a resposta desejada a resposta em frequência do filtro com as especificações estabelecidas. A comparação, para esse caso, foi feita no domínio da frequência.

5 RESULTADOS

Para a implementação dos algoritmos, foi utilizado o software MATLAB. Em todas as execuções dos programas, executou-se 50 vezes os algoritmos e extraiu-se os seguintes valores estatísticos: média, variância e desvio padrão da amostra.

5.1 IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS DE TEMPO CONTÍNUO

Na primeira parte do projeto, avaliou-se o desempenho dos algoritmos implementados através da identificação de sistemas de tempo contínuo. Foram utilizados dois sistemas para identificação, representados pelas funções de transferência apresentadas em (28) e (29).

$$H(s) = \frac{3s + 9}{s^2 + 3s + 9} \quad (28)$$

$$G(s) = \frac{s^5 + 25s^4 + 20s^3 + 15s^2 + 7s + 9}{s^5 + 1,5967s^4 + 125,7747s^3 + 75,7359s^2 + 27,7914s + 5} \quad (29)$$

O processo de estimação se deu por meio da aplicação descrita na seção 4.3. A função de ajuste (*fitness*) utilizada foi o erro médio quadrático, sendo o sinal $y[n]$ a resposta ao degrau dessas plantas.

5.1.1 Algoritmo da Busca Gravitacional

Para o algoritmo da Busca Gravitacional, em 50 repetições, a melhor solução obtida para o sistema de segunda ordem descrito em (28) foi a apresentada na figura 11 e as medidas estatísticas obtidas apresentadas na tabela 1. O algoritmo foi inicializado com os seguintes parâmetros: $N = 50$ indivíduos, espaço de busca de 0 a 15, $G = 400$, $\beta = 3$ e 200 iterações.

TABELA 1 – Grandezas estatísticas obtidas pelo Algoritmo da Busca Gravitacional na Identificação de um Sistema de Segunda Ordem

Medida	Valor
Média	0,0016
Variância	$1,3371 \cdot 10^{-5}$
Desvio Padrão	0,0037
Melhor Valor	$2,1109 \cdot 10^{-6}$

Já para o segundo sistema, descrito em (29), a melhor solução encontrada, em 50 repetições, é apresentada na figura 13 e as medidas estatísticas obtidas mostradas na tabela 2. O algoritmo foi inicializado com os seguintes parâmetros: $N = 50$ indivíduos, espaço de busca de 0 a 150, $G = 150.000$, $\beta = 20$ e 200 iterações.

FIGURA 11 – Resposta ao Degrau para um Sistema de Segunda Ordem via Algoritmo da Busca Gravitacional

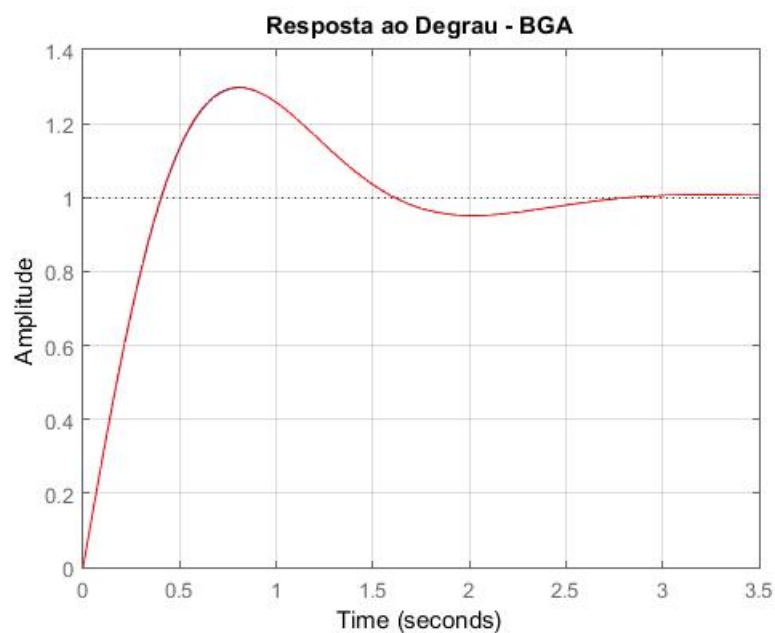


FIGURA 12 – Diagrama de Caixa dos Resultados Obtidos para um Sistema de Segunda Ordem via Algoritmo da Busca Gravitacional

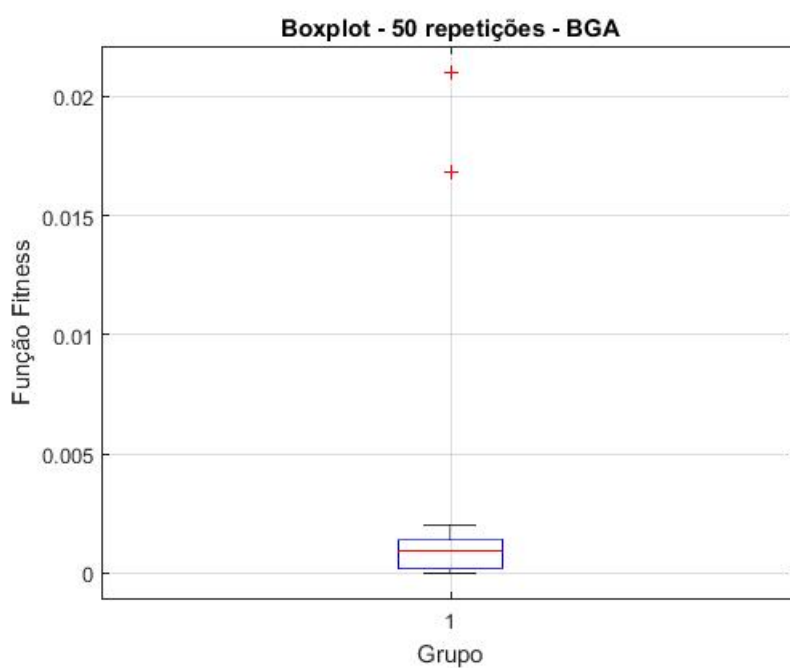


FIGURA 13 – Resposta ao Degrau para um Sistema de Quinta Ordem via Algoritmo da Busca Gravitacional

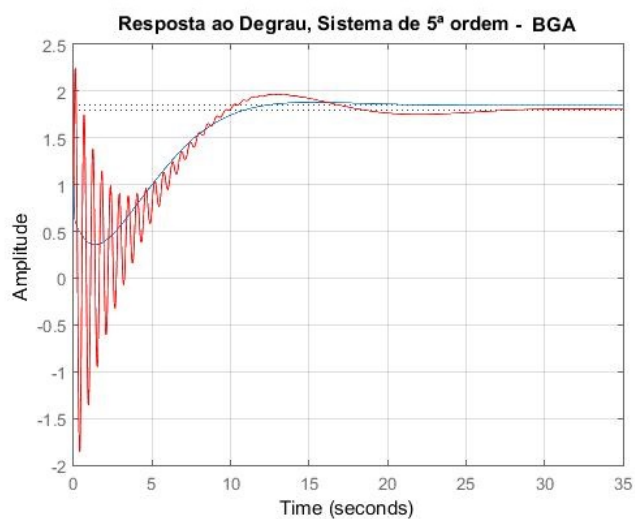


FIGURA 14 – Diagrama de Caixa dos Resultados Obtidos para um Sistema de Quinta Ordem via Algoritmo da Busca Gravitacional

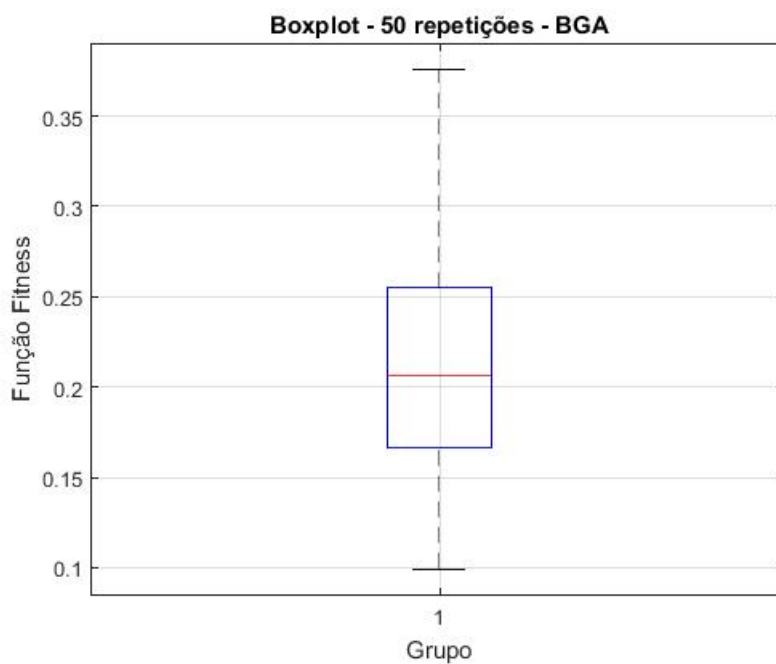


TABELA 2 – Grandezas estatísticas obtidas pelo Algoritmo da Busca Gravitacional na Identificação de um Sistema de Quinta Ordem

Medida	Valor
Média	0,2121
Variância	0,0037
Desvio Padrão	0,0611
Melhor Valor	0,0992

5.1.2 Algoritmo do Sistema Imune Artificial

Para o algoritmo do Sistema Imune Artificial, em 50 repetições, a melhor solução obtida para o sistema de segunda ordem descrito em (28) foi a apresentada na figura 11 e as medidas estatísticas obtidas apresentadas na tabela 1. O algoritmo foi inicializado com os seguintes parâmetros: $N = 50$ indivíduos, espaço de busca de 0 a 15, $G = 400$, $\beta = 3$ e 200 iterações.

FIGURA 15 – Resposta ao Degrau para um Sistema de Segunda Ordem via Algoritmo do Sistema Imune Artificial

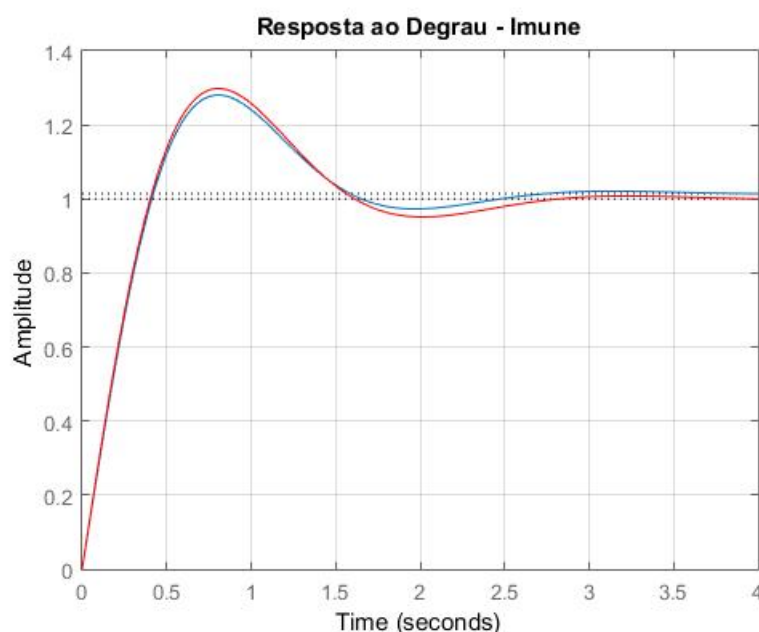


TABELA 3 – Grandezas estatísticas obtidas pelo Algoritmo do Sistema Imune Artificial na Identificação de um Sistema de Segunda Ordem

Medida	Valor
Média	0,0016
Variância	$1,6283 \cdot 10^{-6}$
Desvio Padrão	0,0013
Melhor Valor	$2,6171 \cdot 10^{-4}$

Já para o segundo sistema, descrito em (29), a melhor solução encontrada, em 50 repetições, é apresentada na figura 13 e as medidas estatísticas obtidas mostradas na tabela 2. O algoritmo foi inicializado com os seguintes parâmetros: $N = 50$ indivíduos, espaço de busca de 0 a 150, $G = 150.000$, $\beta = 20$ e 200 iterações.

FIGURA 16 – Diagrama de Caixa dos Resultados Obtidos para um Sistema de Segunda Ordem via Algoritmo do Sistema Imune Artificial

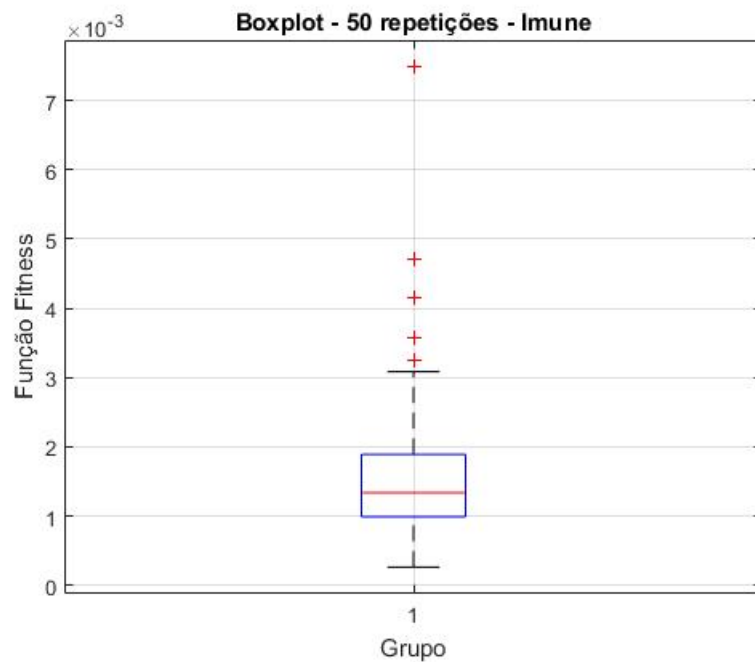


FIGURA 17 – Resposta ao Degrau para um Sistema de Quinta Ordem via Algoritmo do Sistema Imune Artificial

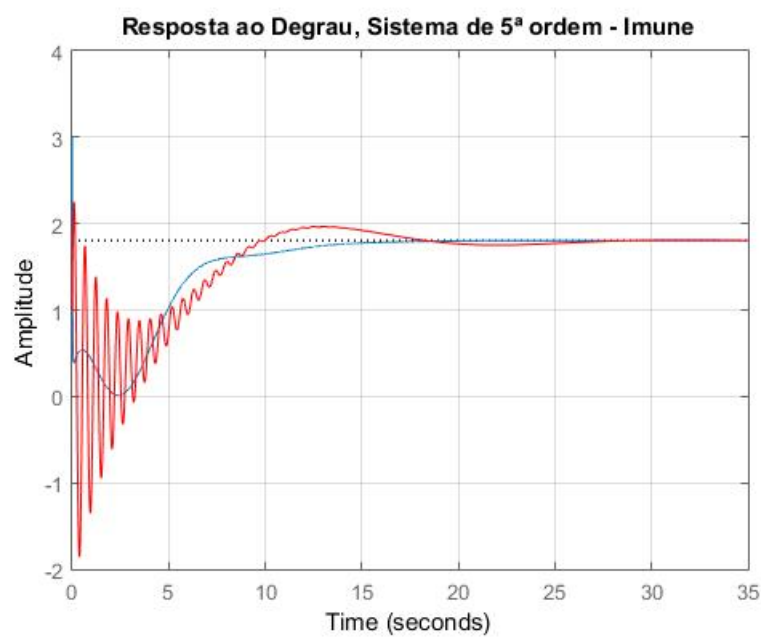
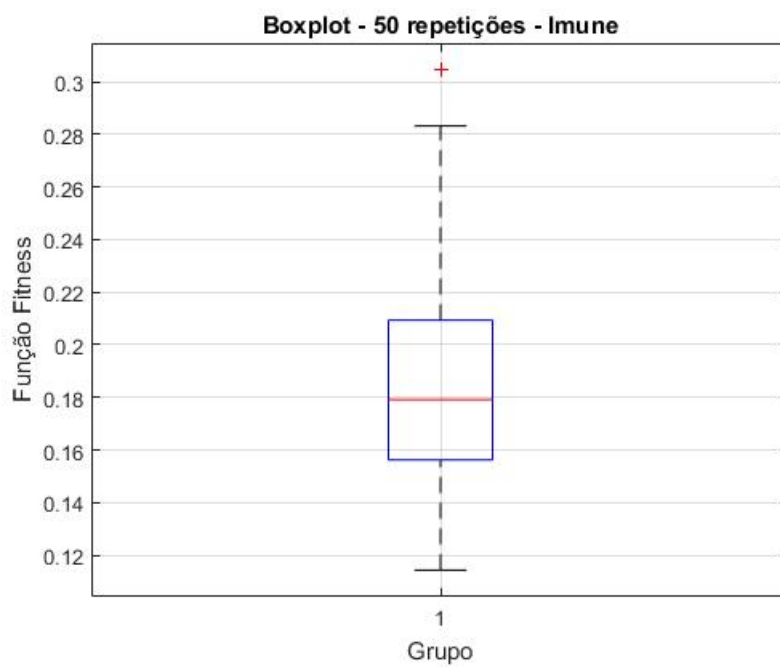


TABELA 4 – Grandezas estatísticas obtidas pelo Algoritmo do Sistema Imune Artificial na Identificação de um Sistema de Quinta Ordem

Medida	Valor
Média	0,1869
Variância	0,0016
Desvio Padrão	0,04
Melhor Valor	0,1143

FIGURA 18 – Diagrama de Caixa dos Resultados Obtidos para um Sistema de Quinta Ordem via Algoritmo do Sistema Imune Artificial



5.1.3 Algoritmo da Baleia

Para o algoritmo da Baleia, em 50 repetições, a melhor solução obtida para o sistema de segunda ordem descrito em (28) foi a apresentada na figura 19 e as medidas estatísticas obtidas apresentadas na tabela 5. O algoritmo foi inicializado com os seguintes parâmetros: $N = 50$ indivíduos, espaço de busca de 0 a 15, $a = 2$, $b = 500$ e 200 iterações.

FIGURA 19 – Resposta ao Degrau para um Sistema de Segunda Ordem via Algoritmo da Baleia

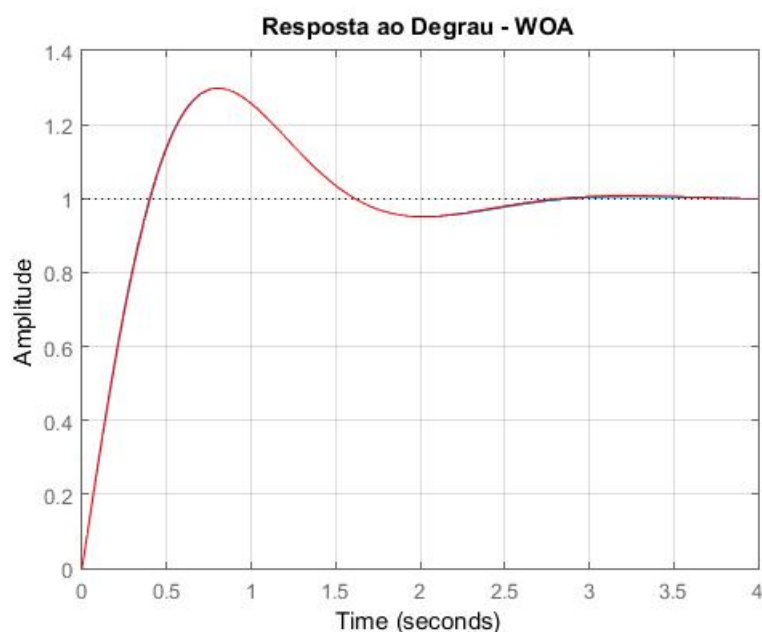
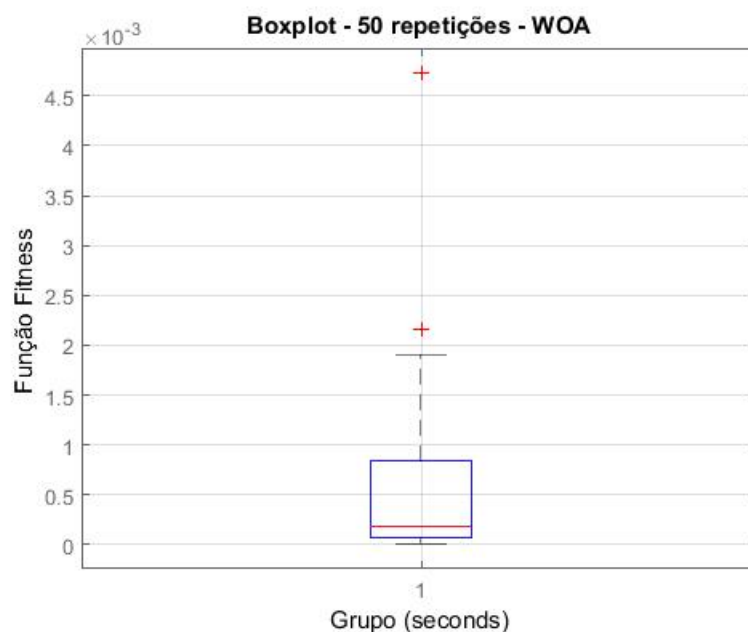


TABELA 5 – Grandezas estatísticas obtidas pelo Algoritmo da Baleia na Identificação de um Sistema de Segunda Ordem

Medida	Valor
Média	$5,8560.10^{-4}$
Variância	$6,8556.10^{-7}$
Desvio Padrão	$8,2799.10^{-4}$
Melhor Valor	$1,1606.10^{-5}$

FIGURA 20 – Diagrama de Caixa dos Resultados Obtidos para um Sistema de Segunda Ordem via Algoritmo da Baleia



Já para o segundo sistema, descrito em (29), a melhor solução encontrada, em 50 repetições, é apresentada na figura 21 e as medidas estatísticas obtidas mostradas na tabela 6. O algoritmo foi inicializado com os seguintes parâmetros: $N = 50$ indivíduos, espaço de busca de 0 a 150, $a = 2$, $b = 500$ e 200 iterações.

FIGURA 21 – Resposta ao Degrau para um Sistema de Quinta Ordem via Algoritmo da Baleia

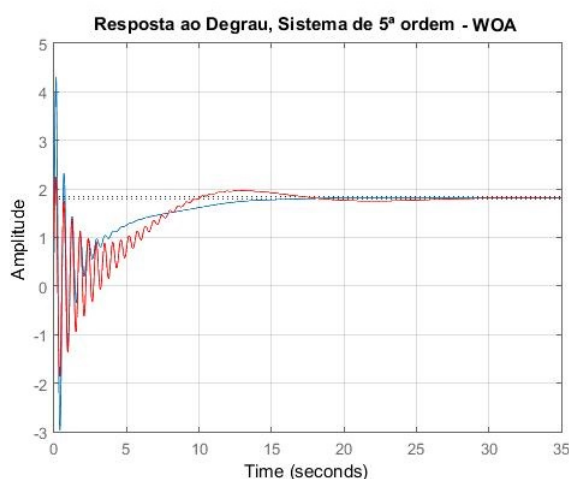
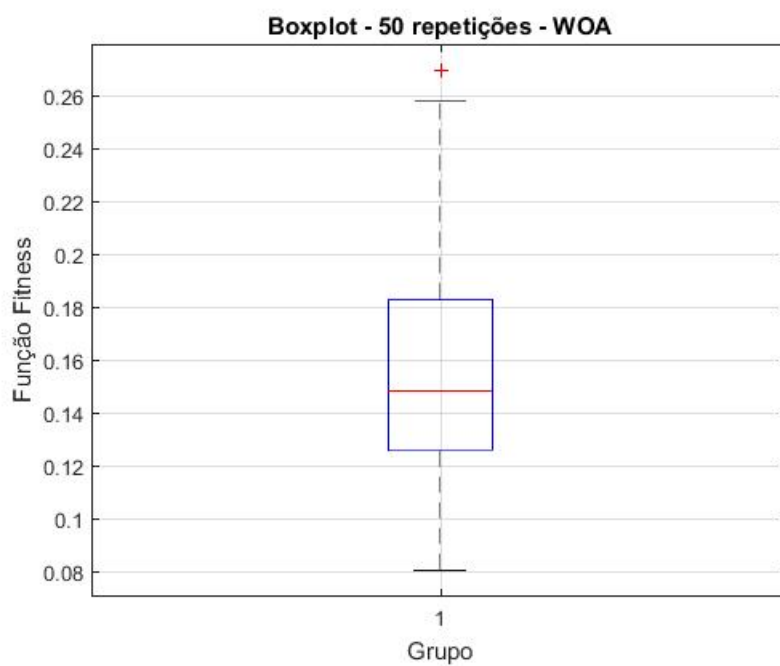


TABELA 6 – Grandezas estatísticas obtidas pelo Algoritmo da Baleia na Identificação de um Sistema de Quinta Ordem

Medida	Valor
Média	0,1553
Variância	0,0019
Desvio Padrão	0,0437
Melhor Valor	0,0804

FIGURA 22 – Diagrama de Caixa dos Resultados Obtidos para um Sistema de Quinta Ordem via Algoritmo da Baleia



5.1.4 Algoritmo Colaborativo

Para o algoritmo Colaborativo, em 50 repetições, a melhor solução obtida para o sistema de segunda ordem descrito em (28) foi a apresentada na figura 11 e as medidas estatísticas obtidas apresentadas na tabela 1. O algoritmo foi inicializado com os seguintes parâmetros: $N = 50$ indivíduos, espaço de busca de 0 a 15, $G = 400$, $\beta = 3$ e 200 iterações.

FIGURA 23 – Resposta ao Degrau para um Sistema de Segunda Ordem via Algoritmo Colaborativo

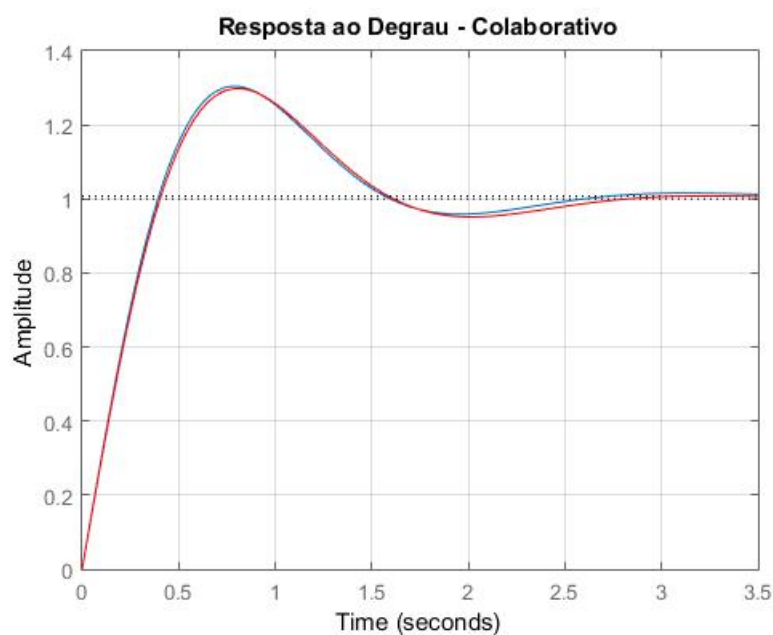
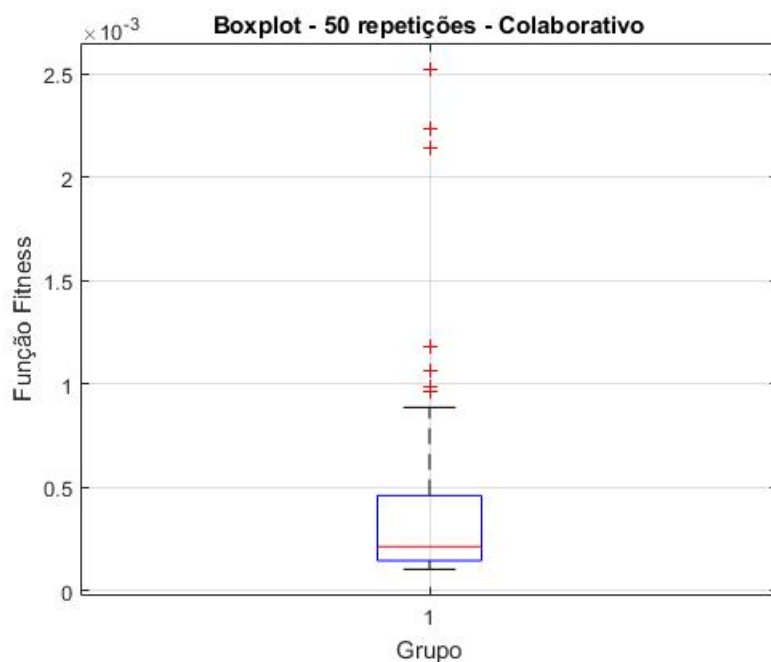


TABELA 7 – Grandezas estatísticas obtidas pelo Algoritmo Colaborativo na Identificação de um Sistema de Segunda Ordem

Medida	Valor
Média	$1,9894.10^{-4}$
Variância	$7,6516.10^{-8}$
Desvio Padrão	$2.7661.10^{-4}$
Melhor Valor	$1,0013.10^{-4}$

FIGURA 24 – Diagrama de Caixa dos Resultados Obtidos para um Sistema de Segunda Ordem via Algoritmo Colaborativo



Já para o segundo sistema, descrito em (29), a melhor solução encontrada, em 50 repetições, é apresentada na figura 25 e as medidas estatísticas obtidas mostradas na tabela 8. O algoritmo foi inicializado com os seguintes parâmetros: $N = 50$ indivíduos, espaço de busca de 0 a 150, $G = 150.000$, $\beta = 20$ e 200 iterações.

FIGURA 25 – Resposta ao Degrau para um Sistema de Quinta Ordem via Algoritmo Colaborativo

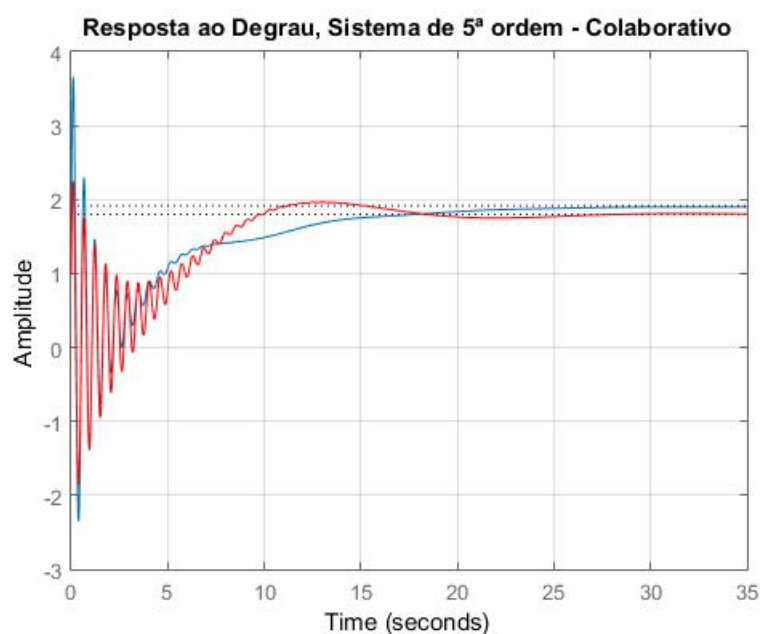
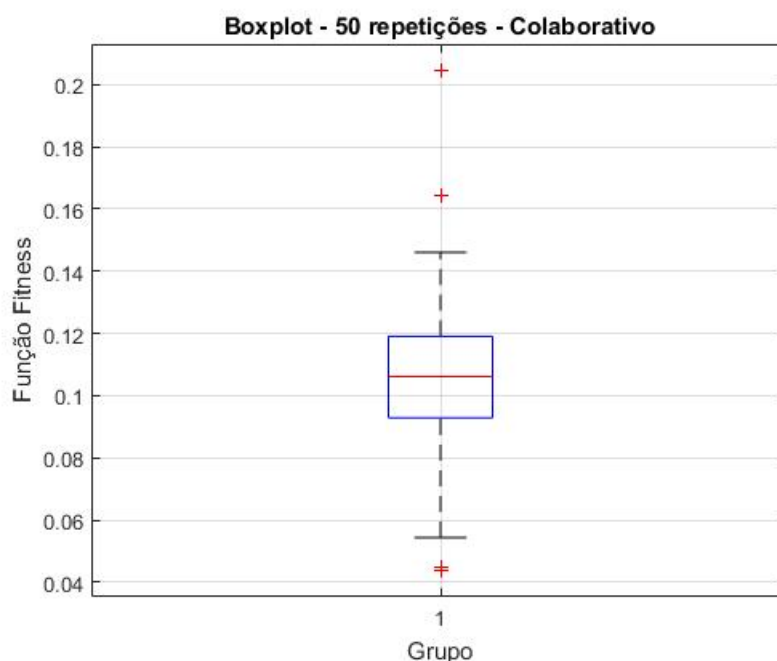


TABELA 8 – Grandezas estatísticas obtidas pelo Algoritmo Colaborativo na Identificação de um Sistema de Quinta Ordem

Medida	Valor
Média	0,1058
Variância	$7,5724 \cdot 10^{-4}$
Desvio Padrão	0,0275
Melhor Valor	0,0439

FIGURA 26 – Diagrama de Caixa dos Resultados Obtidos para um Sistema de Quinta Ordem via Algoritmo Colaborativo



Pode-se fazer um comparativo entre os resultados obtidos pelos quatro métodos apresentados. No que se refere ao sistema de segunda ordem, embora o método colaborativo não tenha apresentado a melhor resposta, ele se mostrou, dentre os quatro algoritmos, o que apresentou menor valor médio e o mais robusto, pois apresentou menores valores de variância e desvio padrão. Isso pode ser confirmado ao se observar os diagramas de caixa nas figuras 12, 16, 20 e 24, tanto no que se diz respeito à localização do terceiro quartil quanto à presença de outliers. Dessa forma, pode-se afirmar que as soluções propostas pelo algoritmo colaborativo, para essa aplicação variam menos do que as propostas por cada algoritmo sozinho.

Já sobre o sistema de quinta ordem, pela análise das tabelas 2, 4, 6 e 8, percebe-se o seguinte:

- Com relação ao valor médio encontrado, ao se executar 50 vezes cada algoritmo, o método Colaborativo foi o que apresentou o menor valor para esse quesito. Analisando o *boxplot* da figura 26, nota-se que 75% das soluções encontradas (terceiro quartil) estão com valores de função *fitness* inferiores a 0,12, enquanto

que, nos outros algoritmos (cujos diagramas de caixa estão representados nas figuras 14, 18 e 22), sequer o primeiro quartil (25% das soluções encontradas) chega a esse valor, comprovando que as soluções encontradas foram as menores.

- Com respeito às medidas de dispersão variância e o desvio padrão, dentre os quatro o Colaborativo foi o algoritmo que apresentou os menores valores, sendo, assim, possível afirmar que ele é mais robusto nessa aplicação que os demais.
- O melhor valor de função *fitness* encontrado foi proposto pelo algoritmo Colaborativo.

Dessa forma, com essas observações, nota-se que o algoritmo Colaborativo apresentou um melhor desempenho quando comparados aos outros três algoritmos para essa aplicação em sistemas de tempo contínuo.

5.2 PROJETO DE FILTROS DIGITAIS

Após os testes apresentados na seção 5.1 com sistemas de tempo contínuo, aplicou-se, então, a solução no projeto de filtros digitais do tipo IIR. Para isso, a métrica utilizada $J(\omega)$ foi a proposta no artigo de Rashedi, Nezamabadi-pour e Saryazdi (2011), apresentada na equação (30).

$$J(\omega) = \sum_{\omega \in B_p} \text{abs}[\text{abs}(|H_d(\omega)| - 1) - \delta_p] + \sum_{\omega \in B_s} [\text{abs}(|H_d(\omega)| - \delta_s)] \quad (30)$$

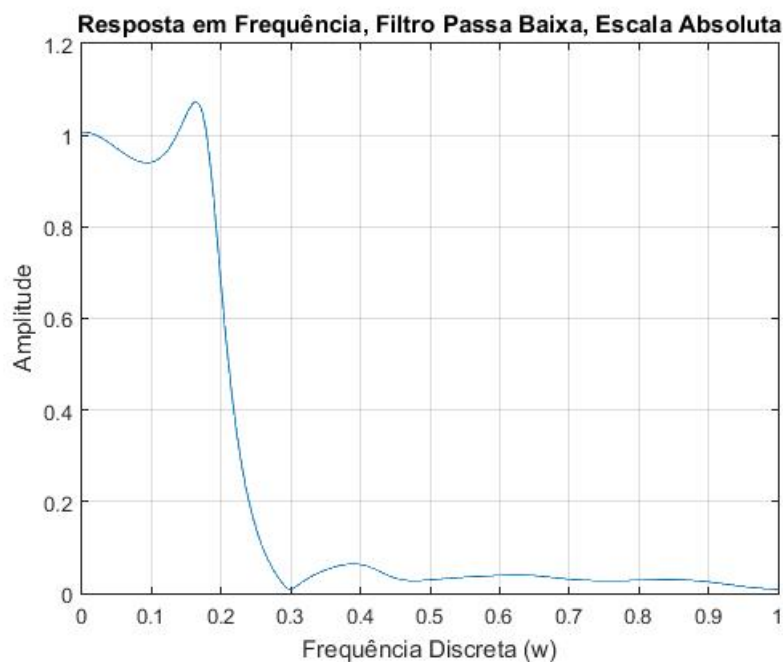
A função de ajuste (*fitness*) apresentada em (30) consiste em duas parcelas: um somatório contemplando as frequências da banda passante (B_p), subtraindo-se um δ_p do módulo do valor absoluto da diferença entre a resposta do filtro e a resposta ideal, e outra parcela que representa a faixa de rejeição (B_s), na qual se subtrai δ_s da resposta do filtro para essas frequências.

Com o intuito de resolver problemas de se obter soluções instáveis, segundo o critério BIBO, adicionou-se mais uma parcela a (30), consistindo em $1000n$, onde n é o número de polos fora do círculo unitário.

5.2.1 Filtro Passa Baixa

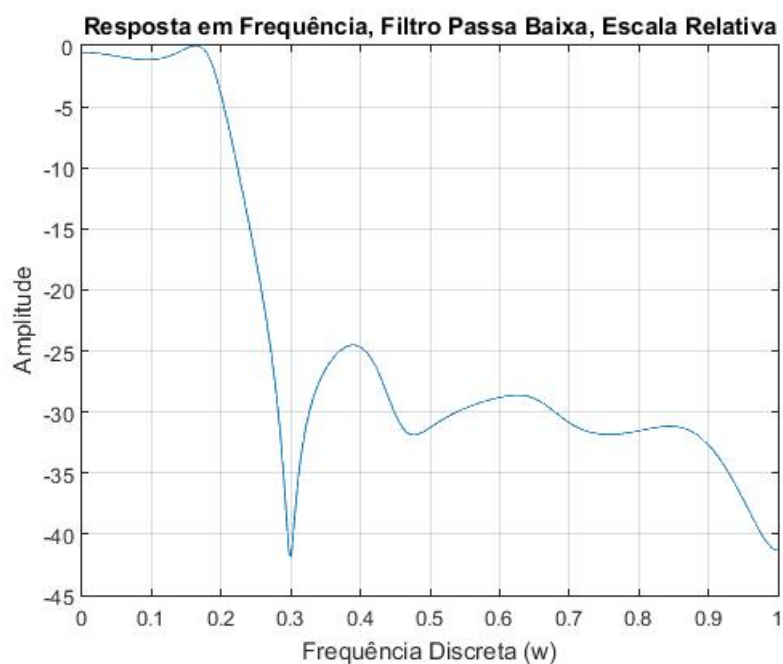
No projeto de um filtro passa baixa de ordem 9, foi obtida a resposta em frequência (figuras 27 e 28), bem como os valores estatísticos mostrados na tabela 9 e no diagrama de caixa da figura 29. Foram utilizados os seguintes valores de parâmetros: $N = 40$, 300 iterações, espaço de busca de -5 a 5, 1000 pontos na frequência discreta, $\delta_p = 0.01$, $\delta_s = 0.001$, $G = 1000$, $\beta = 20$, taxa de mutação de 50%, $a = 2$ e $b = 2$. O algoritmo foi executado 50 vezes.

FIGURA 27 – Resposta em Frequência do Filtro Passa Baixa



Fonte: O Autor (2018)

FIGURA 28 – Resposta em Frequência do Filtro Passa Baixa em decibels

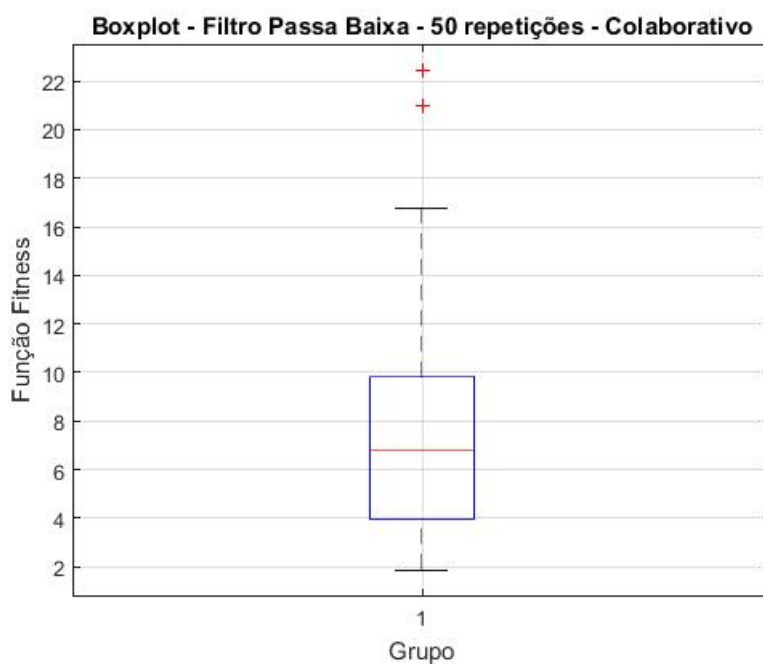


Fonte: O Autor (2018)

Analizou-se a satisfação da melhor solução então obtida ao critério da seção 2.5.2, utilizando o mapa de polos e zeros representado na figura 30.

Como todos os polos (representados por X) estão dentro do círculo unitário, então o critério BIBO é satisfeito e o sistema é estável.

FIGURA 29 – Diagrama de Caixa dos Resultados Obtidos para o Filtro Passa Baixa

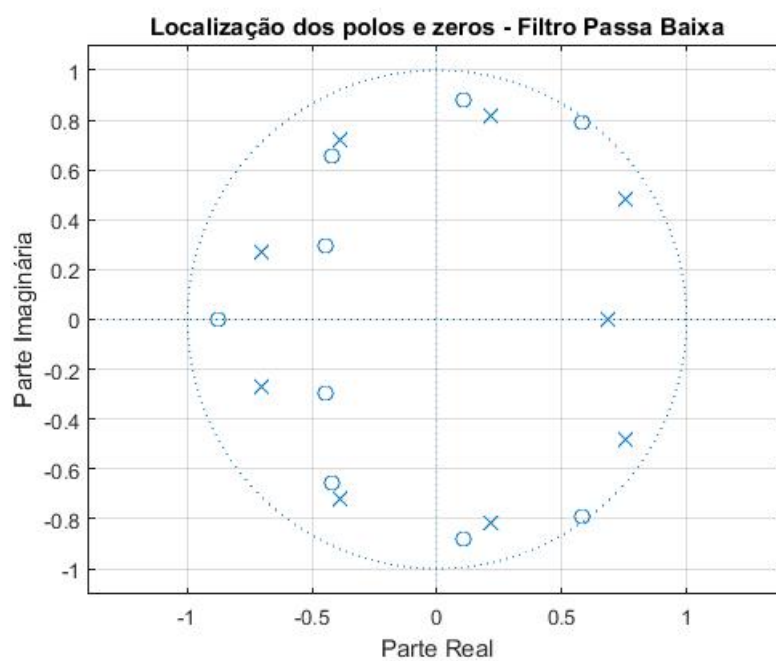


Fonte: O Autor (2018)

TABELA 9 – Grandezas estatísticas obtidas pelo Algoritmo Colaborativo no projeto de um filtro Passa Baixa

Medida	Valor
Média	31,6063
Variância	805,4463
Desvio Padrão	28,3804
Melhor Valor	2,7868

FIGURA 30 – Localização dos polos e zeros obtidos para o filtro Passa Baixa

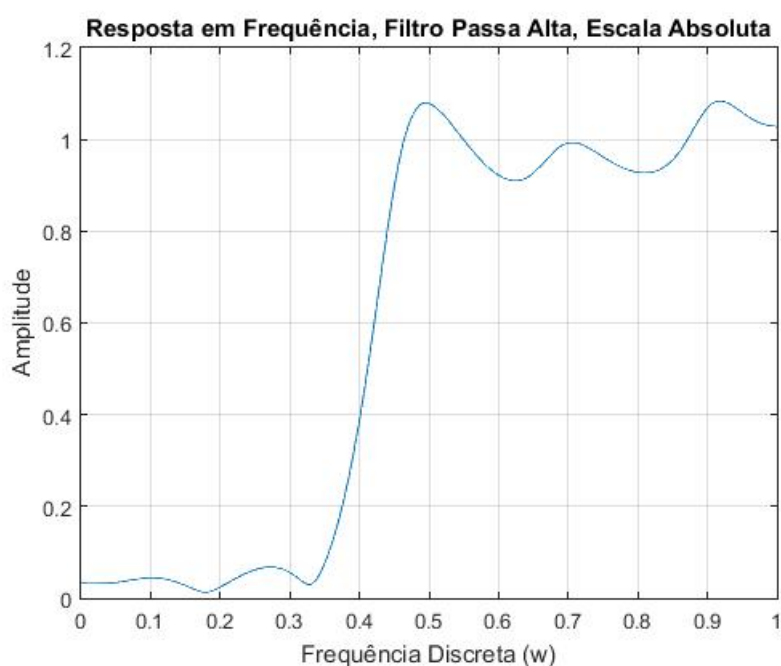


Fonte: O Autor (2018)

5.2.2 Filtro Passa Alta

Já para o projeto de um filtro passa baixa, de forma semelhante foi obtida a resposta em frequência mostrada nas figuras 31 e 32, assim como as grandezas estatísticas mostradas na tabela 10 e no diagrama de caixa da figura 33. Foram utilizados os seguintes valores de parâmetros: $N = 40$, ordem do filtro 10, 300 iterações, espaço de busca de -5 a 5, 1000 pontos na frequência discreta, $\delta_p = 0.01$, $\delta_s = 0.001$, $G = 1000$, $\beta = 20$, taxa de mutação de 50%, $a = 2$ e $b = 2$. Assim como no caso do passa baixa, este algoritmo foi executado por 50 vezes.

FIGURA 31 – Resposta em Frequência do Filtro Passa Alta



Fonte: O Autor (2018)

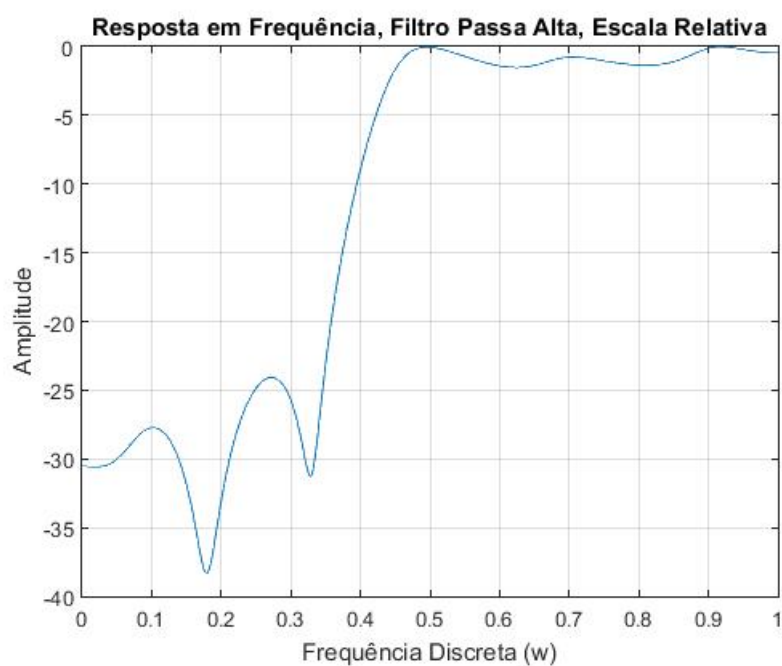
TABELA 10 – Grandezas estatísticas obtidas pelo Algoritmo Colaborativo no projeto de um filtro Passa Alta

Medida	Valor
Média	25,8169
Variância	395,2947
Desvio Padrão	19,8820
Melhor Valor	4,0667

Com a melhor solução obtida nessas 50 repetições, foi analisada sua satisfação ao critério da seção 2.5.2, utilizando o mapa de polos e zeros representado na figura 34.

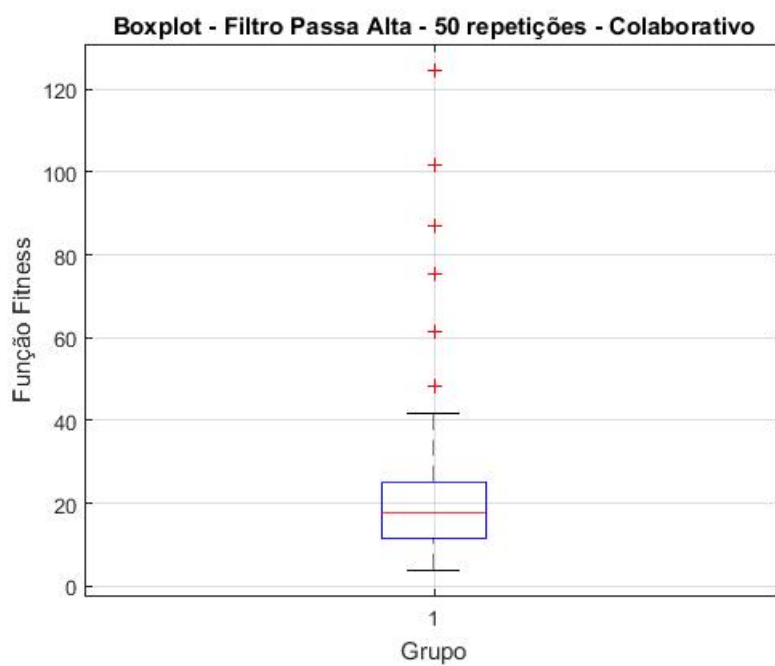
Da mesma forma como no caso do filtro passa baixa, todos os polos estão dentro do círculo unitário, então o critério BIBO de estabilidade é atendido.

FIGURA 32 – Resposta em Frequência do Filtro Passa Alta em decibels



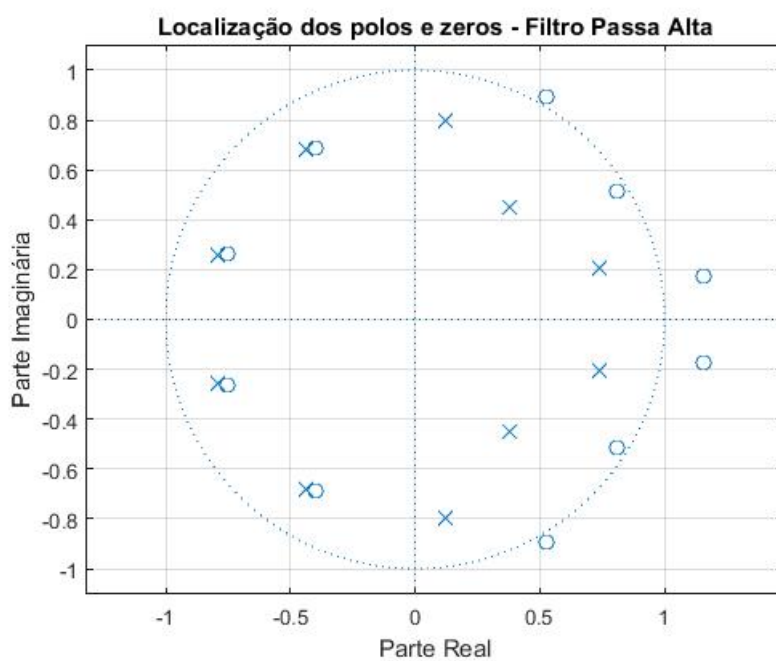
Fonte: O Autor (2018)

FIGURA 33 – Diagrama de Caixa dos Resultados Obtidos para o Filtro Passa Alta



Fonte: O Autor (2018)

FIGURA 34 – Localização dos polos e zeros obtidos para o filtro Passa Alta

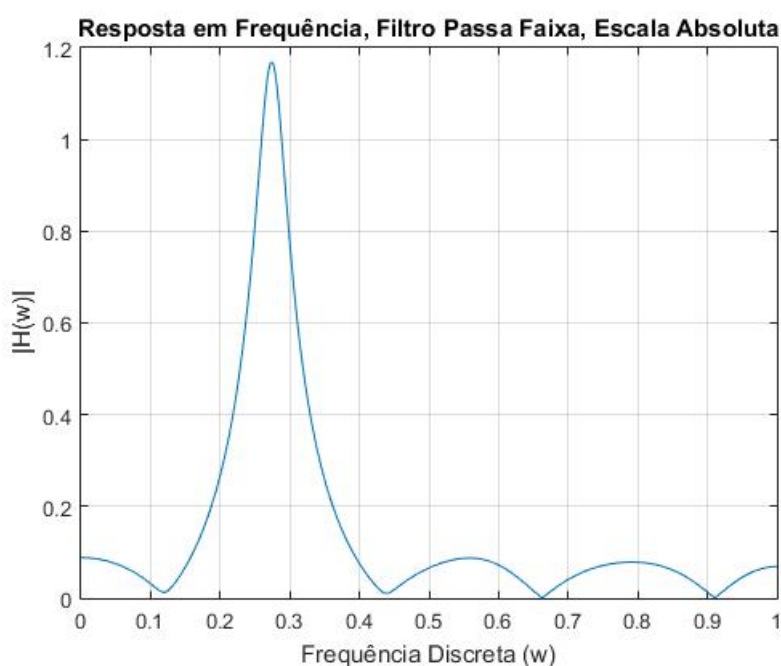


Fonte: O Autor (2018)

5.2.3 Filtro Passa Faixa

Após a síntese dos filtros passa baixa e passa alta, foi projetado um filtro passa faixa. O filtro resultante apresentou resposta em frequência conforme as figuras 35 e 36. Como o algoritmo foi também executado 50 vezes, extraiu-se os valores estatísticos constantes na tabela 11 e no *boxplot* da figura 37. Foram utilizados os seguintes valores de parâmetros: $N = 40$, 300 iterações, espaço de busca de -5 a 5, 1000 pontos na frequência discreta, $\delta_p = 0.01$, $\delta_s = 0.001$, $G = 1000$, $\beta = 20$, taxa de mutação de 50%, $a = 2$ e $b = 2$. A ordem do filtro simulado foi 8.

FIGURA 35 – Resposta em Frequência do Filtro Passa Faixa



Fonte: O Autor (2018)

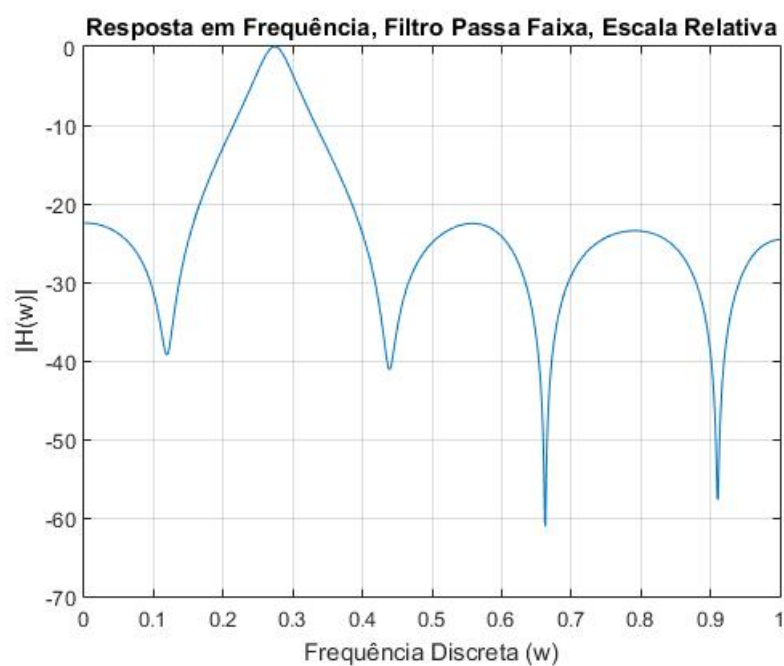
TABELA 11 – Grandezas estatísticas obtidas pelo Algoritmo Colaborativo no projeto de um filtro Passa Faixa

Medida	Valor
Média	25,8674
Variância	34,8135
Desvio Padrão	5,9003
Melhor Valor	19,8721

Da mesma forma como foi feito para os outros filtros, foi analisada sua satisfação ao critério da seção 2.5.2, utilizando o mapa de polos e zeros representado na figura 38.

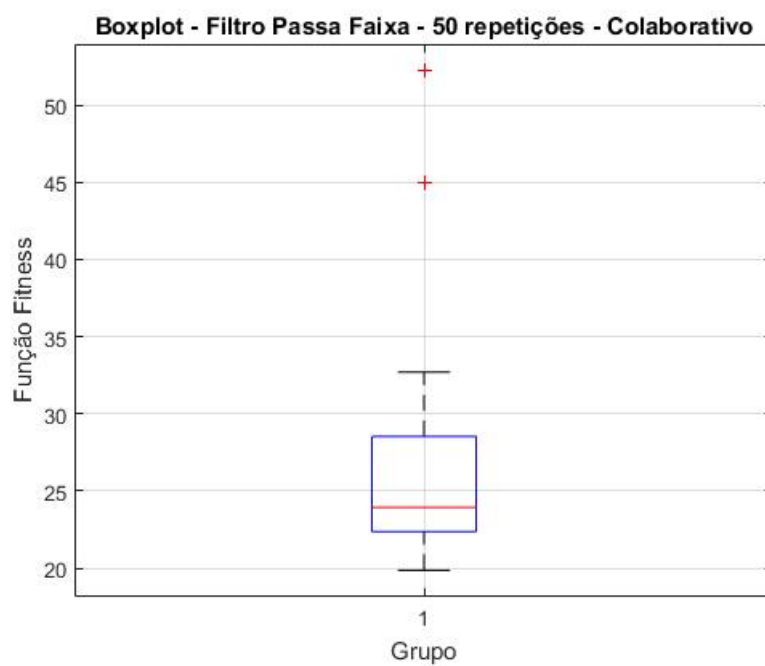
Da mesma forma como no caso do filtro passa baixa, todos os polos estão dentro do círculo unitário, então o critério BIBO de estabilidade é atendido.

FIGURA 36 – Resposta em Frequência do Filtro Passa Faixa em decibels



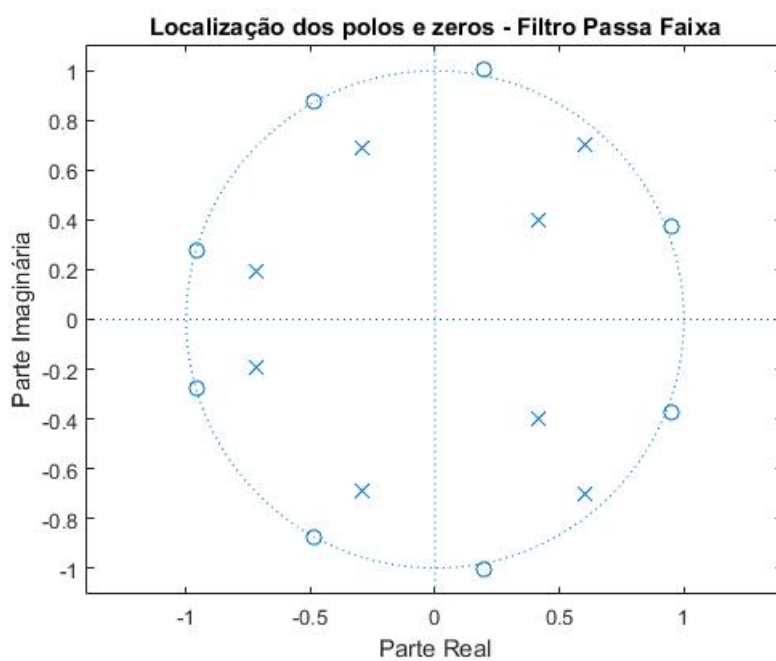
Fonte: O Autor (2018)

FIGURA 37 – Diagrama de Caixa dos Resultados Obtidos para o Filtro Passa Faixa



Fonte: O Autor (2018)

FIGURA 38 – Localização dos polos e zeros obtidos para o filtro Passa Faixa



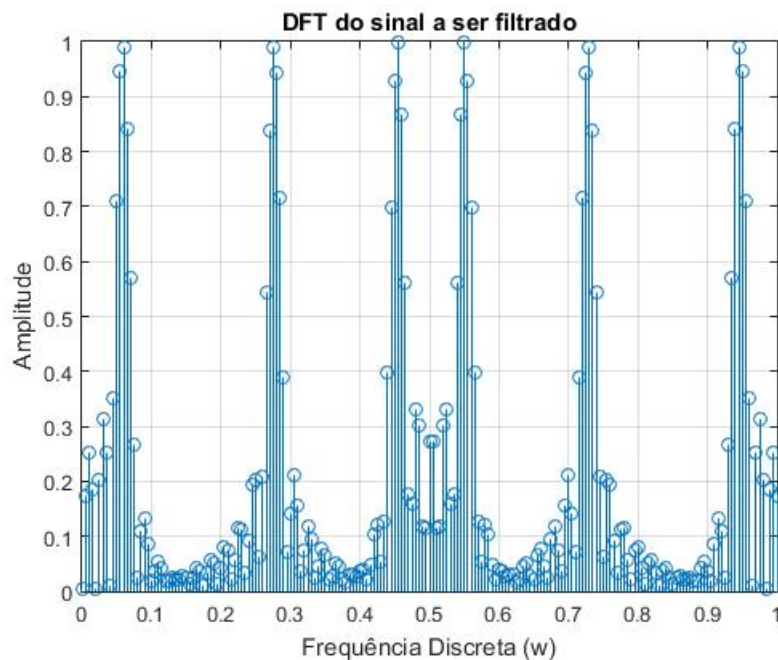
Fonte: O Autor (2018)

5.2.4 Aplicação dos Filtros na Filtragem de um Sinal

Sintetizados os filtros da seção anterior, utilizou-se o sinal da equação (31), cuja DFT é mostrada na figura 39 para teste da capacidade de filtragem das estruturas encontradas.

$$X(t) = \sin(2\pi 60t) + \sin(2\pi 275t) + \sin(2\pi 475t) \quad (31)$$

FIGURA 39 – DFT do Sinal a ser Filtrado



Nota-se que o sinal possui componentes nas seguintes faixas de frequências: 60 Hz, 275 Hz e 475 Hz. Dessa forma, com cada filtro foi possível extrair o conteúdo de cada uma delas. É importante destacar que os dados foram tratados para uma frequência de amostragem igual a 1000 Hz.

Primeiramente, utilizou-se o filtro passa baixas, cujo resultado da filtragem é mostrado na figura 40.

Em seguida, utilizou-se o filtro passa faixa, para extrair o conteúdo da frequência 200 Hz, contido na figura 41.

Por fim, utilizou-se o passa alta para obter a componente de frequência mais alta, sendo possível observar na figura 42.

Dessa forma, é possível visualizar pelas figuras 40, 41 e 42 que o sinal conseguiu ser filtrado por cada uma das estruturas propostas com a execução do algoritmo.

FIGURA 40 – DFT do Sinal Filtrado com Filtro Passa Baixa

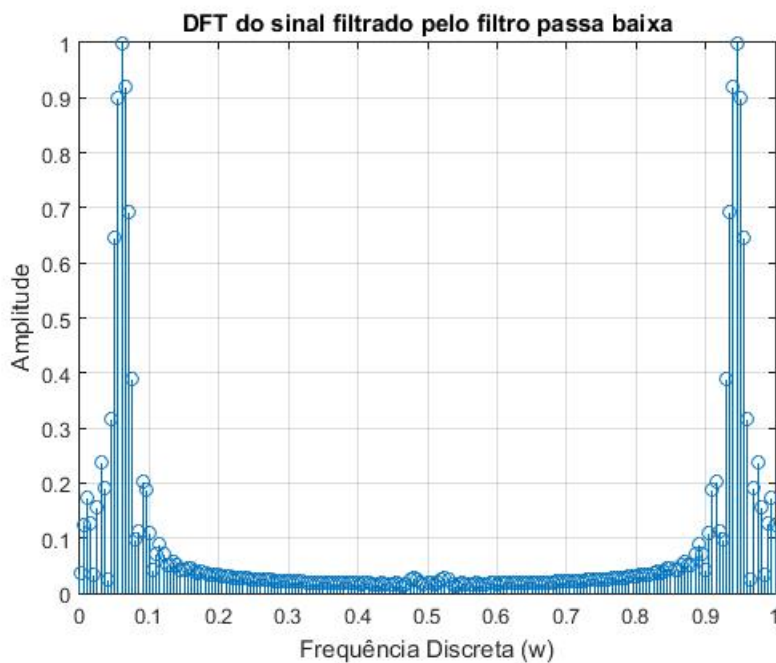


FIGURA 41 – DFT do Sinal Filtrado com Filtro Passa Faixa

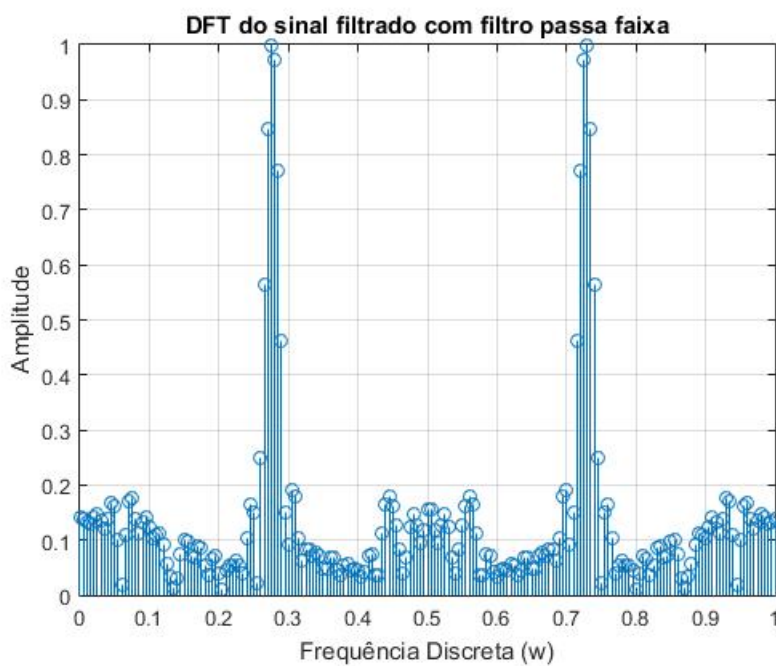
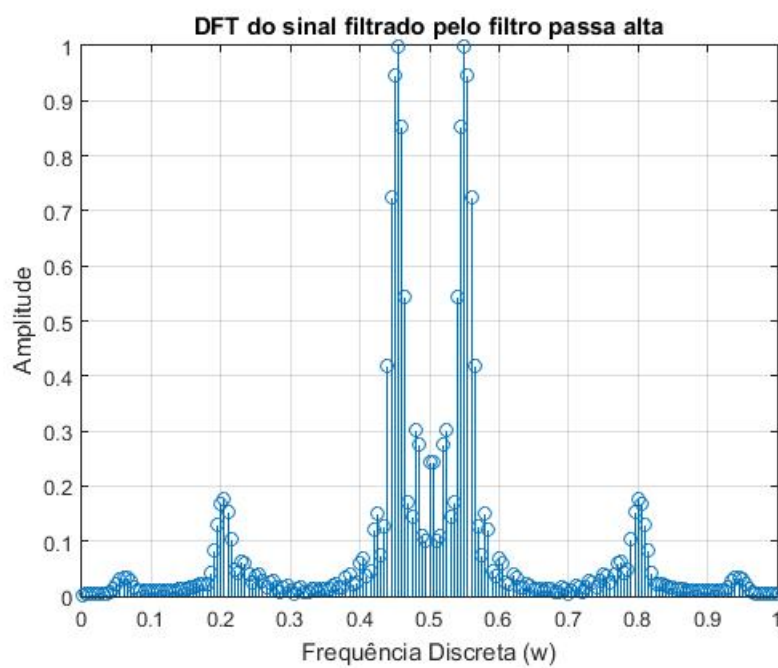


FIGURA 42 – DFT do Sinal Filtrado com Filtro Passa Alta



6 CONCLUSÃO

Com base no trabalho realizado, foi possível compreender o funcionamento das técnicas metaheurísticas no contexto dos problemas de otimização, utilizando uma abordagem no contexto do Processamento Digital de Sinais, mais especificamente no projeto de filtros IIR.

O trabalho tinha como objetivos específicos o estudo e a implementação dos algoritmos da Busca Gravitacional, do Sistema Imune e da Baleia, assim como descrito na seção 1.1.2. Estes algoritmos foram implementados e seu funcionamento apresentado no capítulo 5. O diferencial deste trabalho, a aplicação de um método colaborativo, englobando os três métodos, também foi mostrada nesse capítulo. O objetivo geral, de utilizar técnicas metaheurísticas para sintonia dos parâmetros de um filtro digital, também foi atingido, sendo mostrado também no mesmo capítulo, e sua aplicação na seção 5.2.4.

Dos resultados obtidos, foi nítida a melhoria de desempenho com os três algoritmos atuando junto, comparados com seus desempenhos individuais. O algoritmo colaborativo possibilitou a descoberta de soluções tão aceitáveis quanto as encontradas por cada algoritmo individualmente, bem como a melhoria de robustez, no que se diz respeito às medidas de dispersão mostradas com as simulações.

6.1 TRABALHOS FUTUROS

Alguns pontos deste projeto abrem espaço para continuidade do mesmo, sendo possível elencar alguns principais:

- Estudo de estratégias de melhoria de desempenho do algoritmo, em termos de esforço computacional. Otimização de algumas partes do código, reduzindo a quantidade de cálculos a serem feitos.
- Aplicação de outras métricas no projeto de filtros digitais, a fim de obter soluções melhores.
- Extensão do estudo realizado ao projeto de filtros FIR, os quais apresentam uma quantidade muito maior de coeficientes a serem estimados.
- Estudo e aplicação de técnicas de otimização multiobjetivo, visando não apenas a minimização da função *fitness*, mas também estimar parâmetros como a menor ordem possível, dentre outros.

REFERÊNCIAS

- BOTTOU, L. Online algorithms and stochastic approximations. In: SAAD, D. (Ed.). **Online Learning and Neural Networks**. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1998. Revised, oct 2012. Disponível em: <<http://leon.bottou.org/papers/bottou-98x>>. Citado na página 14.
- INGLE, V. K.; PROAKIS, J. G. **Digital Signal Processing using MATLAB**. [S.l.]: Cengage Learning, 2012. ISBN 978111142737-5. Citado na página 21.
- JUNIOR, J. A. A.; SILVA, D. G. da; BRAID, A. C. M. Sobre a utilização de filtragem adaptativa na melhoria de sinal de voz mediante a eliminação de trechos gravados a partir de áudio conhecido. **II Congresso Militar de Criminalística**, 2008. Citado na página 14.
- KALINLI, A.; KARABOGA, N. Artificial immune algorithm for IIR filter design. **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, v. 18, n. 8, p. 919–929, 2005. ISSN 09521976. Citado 3 vezes nas páginas 14, 15 e 35.
- KARABOGA, N. A new design method based on artificial bee colony algorithm for digital IIR filters. v. 346, p. 328–348, 2009. Citado na página 15.
- KUMAR, M.; RAWAT, T. K. Optimal fractional delay-IIR filter design using cuckoo search algorithm. **ISA Transactions**, Elsevier, v. 59, p. 39–54, 2015. ISSN 0019-0578. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.isatra.2015.08.007>>. Citado na página 15.
- KUMAR, M.; RAWAT, T. K.; AGGARWAL, A. Adaptive infinite impulse response system identification using modified-interior search algorithm with Lévy flight. **ISA Transactions**, v. 67, p. 266–279, 2017. ISSN 00190578. Citado na página 15.
- KUMAR, S.; KAR, R. Gravitation search algorithm : Application to the optimal IIR filter design. **Journal of King Saud University - Engineering Sciences**, King Saud University, v. 26, n. 1, p. 69–81, 2014. ISSN 1018-3639. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.jksues.2012.12.003>>. Citado na página 15.
- MIRJALILI, S.; LEWIS, A. The Whale Optimization Algorithm. **Advances in Engineering Software**, Elsevier Ltd, v. 95, p. 51–67, 2016. ISSN 18735339. Citado na página 15.
- OLIVEIRA, L. D.; SUZUKI, I.; ABR, T.; JESZENSKY, P. J. E. Filtragem Adaptativa IIR Através do Algoritmo de Otimização Swarm de Aprendizado Compreensivo. v. 2, n. 3, 2007. Citado na página 15.
- PEREIRA, L. d. S. **Estudo e aplicações de filtragem digital adaptativa usando o algoritmo LMS**. 90 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Pampa, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 15.
- PEREIRA, R. R. **Aplicação de filtros adaptativos em filtros ativos de potência**. 188 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Itajubá, 2009. Citado na página 14.

PROAKIS, J. G.; MANOLAKIS, D. G. **Digital Signal Processing**. 4. ed. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2007. ISBN 9780131873742. Citado 4 vezes nas páginas 17, 18, 19 e 20.

RASHEDI, E.; NEZAMABADI-POUR, H.; SARYAZDI, S. GSA: A Gravitational Search Algorithm. **Information Sciences**, Elsevier Inc., v. 179, n. 13, p. 2232–2248, 2009. ISSN 00200255. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.ins.2009.03.004>>. Citado 4 vezes nas páginas 15, 24, 25 e 26.

RASHEDI, E.; NEZAMABADI-POUR, H.; SARYAZDI, S. Engineering Applications of Artificial Intelligence Filter modeling using gravitational search algorithm. **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, Elsevier, v. 24, n. 1, p. 117–122, 2011. ISSN 0952-1976. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.engappai.2010.05.007>>. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 48.

SAHA, S. K.; KAR, R.; MANDAL, D.; GHOSHAL, S. P. Optimal IIR filter design using Gravitational Search Algorithm with Wavelet Mutation. **Journal of King Saud University - Computer and Information Sciences**, King Saud University, v. 27, n. 1, p. 25–39, 2015. ISSN 22131248. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.jksuci.2014.03.002>>. Citado na página 15.

WOLPERT, D. H.; MACREADY, W. G. No Free Lunch Theorems for Optimization. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, v. 1, n. 1, p. 67–82, 1997. Citado na página 16.