

Capítulo III

Circuitos Resistivos

3.1 Introdução

Neste capítulo serão estudadas as leis de Kirchhoff, utilizando-se de circuitos resistivos que são mais facilmente analisados. O estudo dessas leis é aplicado em seguida nas deduções de associação de resistores e fontes. Além disso, as leis de Kirchhoff serão essenciais para capítulos procedentes a este, pois abrangem o princípio para análise de circuitos.

3.2 Leis de Kirchhoff

Para se definir as leis de Kirchhoff serão feitas algumas considerações e serão definidos alguns termos como se segue nos itens de 'a' a 'e'.

- Nó*: É um ponto do circuito comum a dois ou mais elementos. Se três ou mais elementos estão conectados a um nó, tal nó é chamado nó principal ou junção.
- Ramo*: É um "caminho" entre dois nós.
- Laço*: É o caminho fechado em um circuito passando apenas uma vez em cada nó e terminando no nó de partida.
- Malha*: É o laço que não contém nenhum outro laço.
- Será considerado que os circuitos são ideais, ou seja, os elementos que os constituem são ideais e mantém suas características indefinidamente. Segue-se abaixo uma relação dos componentes e suas características ideais.
 - Resistor ideal: Não varia o valor de sua resistência com a temperatura. Suporta qualquer corrente e tensão.
 - Fonte de tensão ideal: Mantém a tensão nos terminais e é capaz de fornecer qualquer corrente.
 - Fonte de corrente ideal: Mantém a corrente constante e alimenta qualquer circuito com tal corrente.
- Será considerado que os circuitos estão em regime permanente, ou seja, estão ligados a algum tempo, de modo que todas as correntes e tensões já estão estáveis.

Exemplo 3.1: Identifique os nós, os ramos, os laços e as malhas do circuito abaixo:

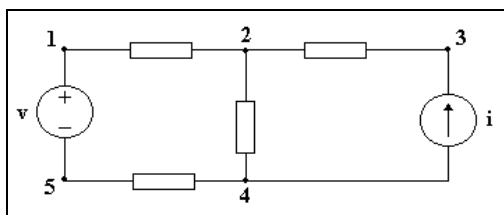


Figura 3.1: Exemplo 3.1.

3.2.1 1ª Lei de Kirchhoff

A primeira lei de Kirchhoff é conhecida como Lei das Correntes de Kirchhoff (LCK) ou Lei dos nós e ela é baseada na conservação de carga. O enunciado é o seguinte:

“A soma algébrica das correntes que entram em um nó (ou em uma região fechada) é igual a soma algébrica das correntes que saem desse nó”.

Matematicamente:

$$\sum i_{in} = \sum i_{out} \quad (3.1)$$

Para ilustrar essa lei considere o nó ‘O’ da Figura 3.2:

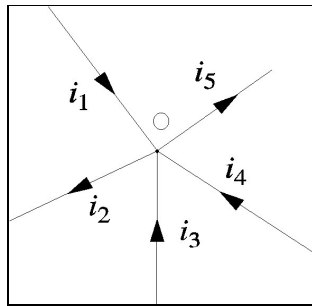


Figura 3.2: Esquema de correntes que entram e saem de um nó O.

Pela LCK:

$$i_1 + i_3 + i_4 = i_2 + i_5 \quad (3.2)$$

Exemplo 3.2: Determine o valor de I_x no circuito da figura 3.3.

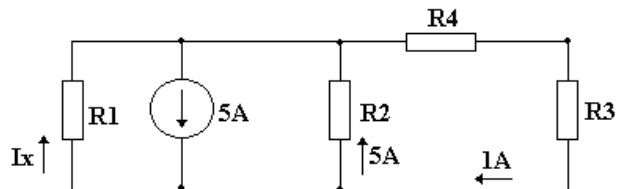


Figura 3.3: Circuito para exemplo 3.2

Exemplo 3.3: Determine o valor de I_x e I_y no circuito da figura 3.4.

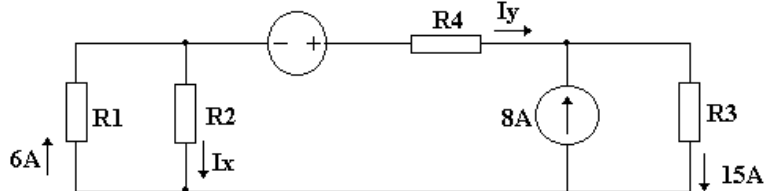


Figura 3.4: Circuito para exemplo 3.3

3.2.2 2ª Lei de Kirchhoff

A 2ª Lei de Kirchhoff é conhecida como Lei das Tensões de Kirchhoff (LTK) ou Lei das Malhas. O seu enunciado é o seguinte:

“A soma das elevações de tensão é igual a soma das quedas de tensão em uma malha.”

A aplicação da Lei das tensões de Kirchhoff pode se tornar complexa e confusa quando aplicada diretamente a partir do enunciado, pois é necessário saber se um elemento está elevando tensão ou subtraindo tensão do circuito, dado o sentido em que se percorre a malha.

Para evitar esse tipo de complicação, adota-se uma convenção de sinais para as tensões da malha. Tal convenção deve ser seguida à medida que o observador percorre a malha. Desta maneira, considere o circuito da Figura 3.5:

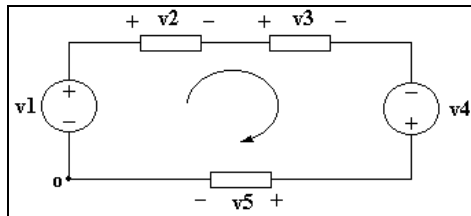


Figura 3.5: Circuito para ilustração da LTK.

Começa-se a percorrer a malha no ponto ‘o’ e então, somam-se todas as tensões da malha até chegar novamente ao ponto ‘o’. A soma dessas tensões, pela LTK, será zero. Ou seja:

$$-v_1 + v_2 + v_3 - v_4 + v_5 = 0 \quad (3.3)$$

Observe que o sinal da tensão na soma das tensões da malha é o primeiro sinal que “aparece” quando se percorre a malha em sentido horário.

É importante ressaltar que esta não é a única maneira de se fazer a soma das tensões da malha. Outra maneira de se resolver o circuito é convencionar um sinal positivo para as diminuições de nível de tensão (elementos passivos) e um sinal negativo para os aumentos no nível de tensão (elementos ativos).

Exemplo 3.4: Determine o valor da tensão fornecida pela fonte do circuito da figura 3.6 sabendo que a corrente $I = 5A$.

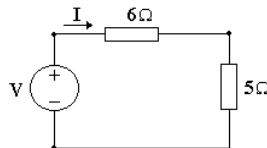


Figura 3.6: Circuito do exemplo 3.4.

Exemplo 3.5: Determine a potência na fonte controlada da figura 3.7.

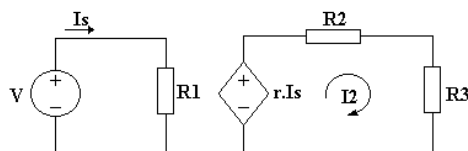


Figura 3.7: Circuito do exemplo 3.5.

3.3 Associação de resistores

a) Resistores em série

Considerando a associação de resistores em série mostrada na figura 3.8:

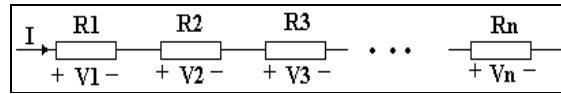


Figura 3.8: Resistores em série.

Calcula-se a resistência equivalente baseado no princípio de que a corrente é a mesma em todos os resistores associados. Assim a resistência equivalente R_{eq} de uma associação série é:

$$R_{eq} = \frac{U_{total}}{I} = \frac{U_1 + U_2 + \dots + U_n}{I} = \frac{R_1 I + R_2 I + \dots + R_n I}{I} \quad (3.4)$$

Logo:

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \sum_{i=1}^n R_i \quad (3.5)$$

b) Resistores em Paralelo

O cálculo da resistência equivalente de uma associação de resistores em paralelo mostrada na Figura 3.9:

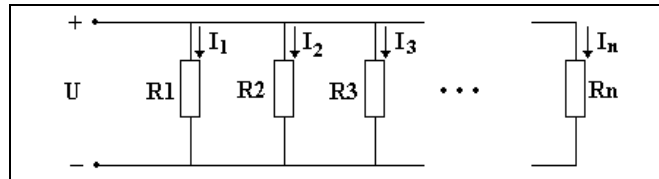


Figura 3.9: Resistores em paralelo

Baseia-se no princípio de que a tensão é a mesma em todos os resistores. Assim, a resistência equivalente de uma associação em paralelo é:

$$R_{eq} = \frac{U}{I_{total}} = \frac{U}{\frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} + \dots + \frac{U}{R_n}} \quad (3.6)$$

Logo:

$$R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n}} \quad (3.7)$$

Ou:

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad (3.8)$$

Em casos particulares, como mostra a Figura 3.10, pode-se efetuar a regra do produto pela soma, tornando o cálculo mais prático:

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (3.9)$$

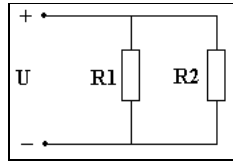


Figura 3.10: Caso particular da associação em paralelo.

c) Transformação triângulo-estrela (Δ -Y)

Às vezes, faz-se necessário efetuar a transformação ilustrada na figura 3.11.

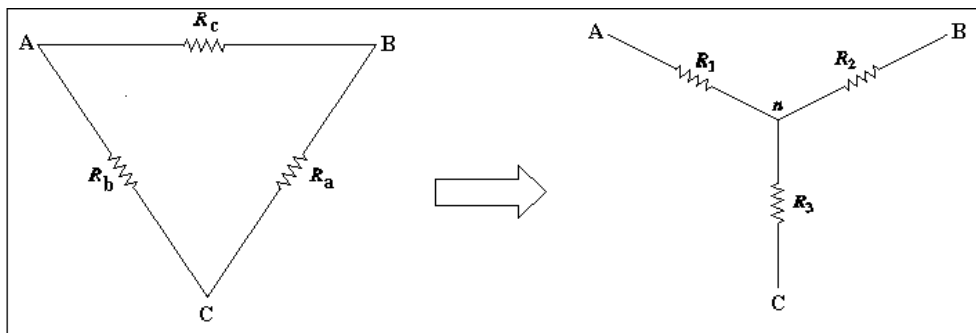


Figura 3.11: Transformação Δ -Y.

Para se estabelecer a relação entre os resistores, pode-se partir do equacionamento das seguintes resistências equivalentes:

$$R_{AB} = \frac{(R_a + R_b)R_c}{R_a + R_b + R_c} = R_1 + R_2 \quad (3.10)$$

$$R_{BC} = \frac{(R_b + R_c)R_a}{R_a + R_b + R_c} = R_2 + R_3 \quad (3.11)$$

$$R_{AC} = \frac{(R_a + R_c)R_b}{R_a + R_b + R_c} = R_1 + R_3 \quad (3.12)$$

Resolvendo o sistema de equações que vão de 3.10 a 3.12, obtém-se:

$$R_1 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c} \quad (3.13)$$

$$R_2 = \frac{R_a R_c}{R_a + R_b + R_c} \quad (3.14)$$

$$R_3 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c} \quad (3.15)$$

d) Transformação estrela-triângulo (Y-Δ)

Vimos como efetuar a transformação Δ-Y, agora é conveniente que saibamos efetuar a transformação inversa, ou seja, aquela mostra na figura 3.12.

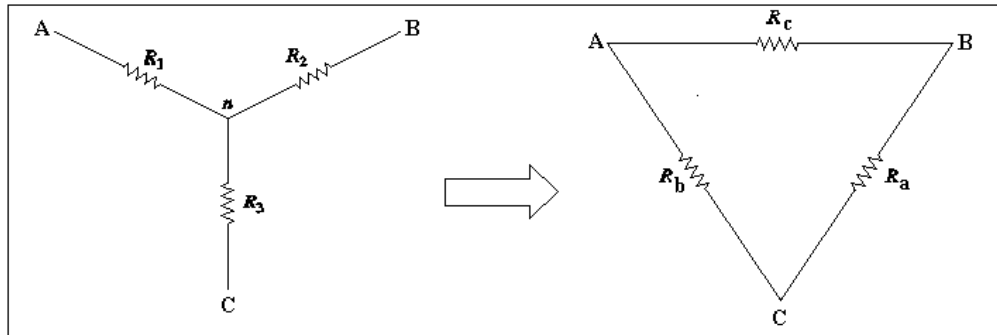


Figura 3.12: Transformação Y-Δ

Para equacionar a função parte-se do mesmo raciocínio utilizado para transformação Δ-Y, tendo como resultado as seguintes equações:

$$R_a = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_1} \quad (3.16)$$

$$R_b = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_2} \quad (3.17)$$

$$R_c = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_3} \quad (3.18)$$

e) Rede em escada

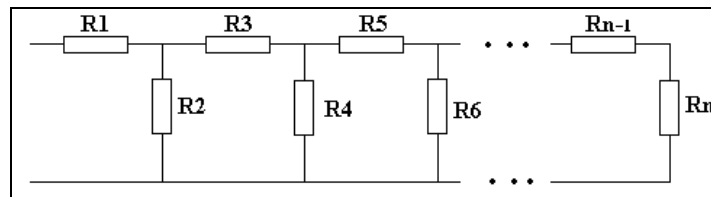


Figura 3.13: Associação de resistores em escada.

Para o cálculo da resistência equivalente de uma associação escada (mostrada na figura 3.13) usa-se a seguinte equação:

$$R_{eq} = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3 + \frac{1}{\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5 + \frac{1}{R_6 + \dots}}}}} \quad (3.19)$$

3.4 Divisor de Tensão

Quando resistores em série são submetidos a uma diferença de potencial, eles funcionam como divisores de tensão, pois a tensão aplicada se distribui entre eles. Desta maneira, considere uma associação de n resistores conforme mostra a Figura 3.14.

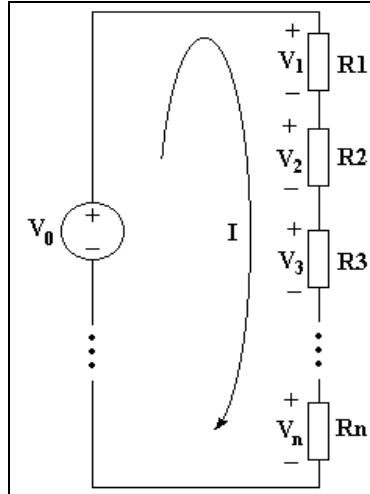


Figura 3.14: Divisor de tensão.

Pela LTK:

$$V_0 = V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n \quad (3.20)$$

Ou:

$$V_0 = R_1 I + R_2 I + R_3 I + \dots + R_n I \quad (3.21)$$

Sendo assim:

$$I = \frac{V_0}{R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n} \quad (3.22)$$

Portanto, a tensão do n -ésimo resistor será:

$$V_n = R_n I = \frac{V_0 R_n}{R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n} \quad (3.23)$$

Exemplo 3.6: Determine o valor de V_1 e V_2 no circuito da Figura 3.15, sabendo que R_1 e R_2 têm o mesmo valor de resistência.

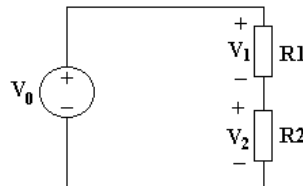


Figura 3.15: Circuito do exemplo 3.6

Exemplo 3.7: Considere o circuito da Figura 3.15. Sabendo que $R_1 = 9 \Omega$ e que V_2 foi medido tendo valor de $0,25V_0$, calcule o valor da resistência R_2 . Verifique que o valor de R_2 não depende de V_0 .

3.5 Divisor de corrente

Quando uma corrente elétrica é fornecida para uma associação de resistores em paralelo esta associação funciona como um divisor de corrente. Assim, considere uma associação de n resistores como mostra a Figura 3.16.

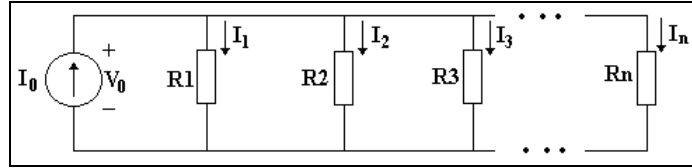


Figura 3.16: Divisor de corrente.

Pela LCK:

$$I_0 = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n \quad (3.24)$$

Ou:

$$I_0 = \frac{V_0}{R_1} + \frac{V_0}{R_2} + \frac{V_0}{R_3} + \dots + \frac{V_0}{R_n} \quad (3.25)$$

Sendo assim:

$$V_0 = \frac{I_0}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n}} = \frac{I_0}{G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_n} \quad (3.26)$$

Onde $G = 1/R$ é chamada condutância e é medida em siemens (s). Portanto, a corrente no n -ésimo resistor será:

$$I_n = \frac{I_0 \left(\frac{1}{R_n} \right)}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n}} = \frac{I_0 G_n}{G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_n} \quad (3.27)$$

Exemplo 3.8: Ache as expressões para I_1 e I_2 em função de I_0 , R_1 e R_2 considerando o circuito da Figura 3.17.

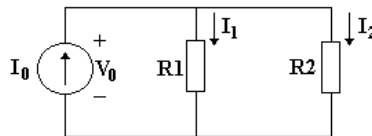


Figura 3.17: Circuito do exemplo 3.8.

Exemplo 3.9: Calcular a tensão V_0 e a corrente em cada um dos resistores do circuito da Figura 3.18, sabendo que $R_1=0,5 \Omega$; $R_2=0,25 \Omega$ e $R_3=0,125 \Omega$. O valor de I_0 é de 28 A.

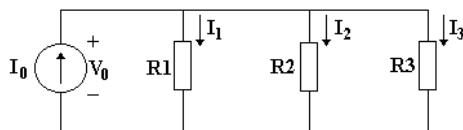


Figura 3.18: Circuito do exemplo 3.9.

Exemplo 3.10: Encontrar as correntes em cada um dos resistores do circuito da figura 3.19.

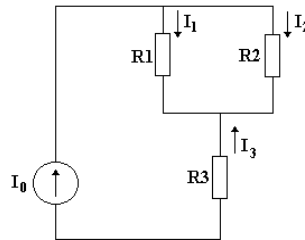


Figura 3.19: Circuito do exemplo 3.10.

3.6 Associação de Fontes ideais

a) Fontes de tensão em série.

A associação de fontes de tensão em série (figura 3.20) permite que se obtenha uma fonte de tensão equivalente de valor maior ou menor. Assim, por exemplo, quando se precisa de uma fonte de tensão de 3 V e só se encontra no mercado fontes de tensão de 1,5 V (pilhas), pode-se associar duas dessas fontes e obter a tensão desejada.

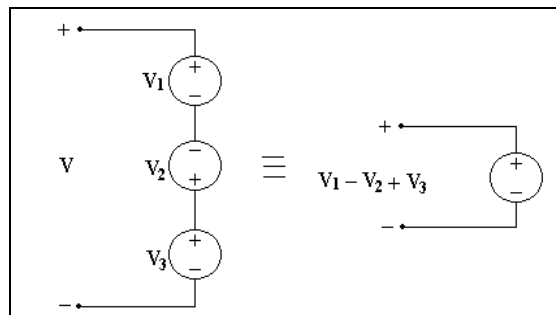


Figura 3.20: Associação de fontes de tensão em série

b) Fonte de tensão em paralelo.

A associação de fontes de tensão em paralelo (figura 3.21) só é permitida quando as duas fontes de tensão são idênticas (figura 3.21a), caso contrário (figura 3.21b), tem-se uma situação *imprevisível* e, portanto, *não usual*.

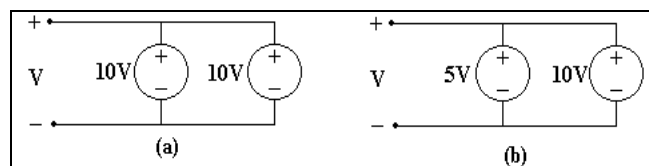


Figura 3.21: Associação de fontes de tensão em paralelo. a) fontes com tensões iguais. b) fontes com tensões diferentes.

c) Fonte de corrente em série.

A associação de fontes de corrente em série (figura 3.22) só é permitida quando as duas fontes de corrente são idênticas (Figura 3.22a), caso contrário (Figura 3.22b), tem-se uma situação *imprevisível* e, portanto, *não usual*.

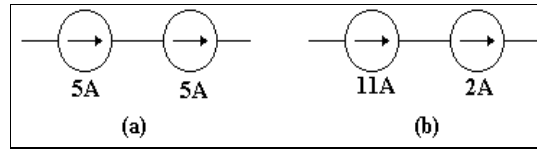


Figura 3.22: Associação de fontes de corrente em série. a) fontes de corrente idênticas. b) fontes de corrente idênticas.

d) Fonte de corrente em paralelo.

A associação de fontes de corrente em paralelo (figura 3.23) permite que se obtenham valores de correntes maiores ou menores do que o valor de cada uma das fontes.

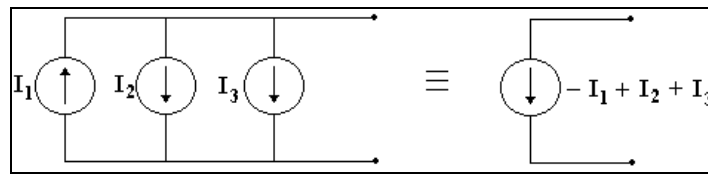


Figura 3.23: Associação de fontes de corrente em paralelo.

3.7 Fontes reais: Resistência interna das fontes

A seguir, nos itens 'a' e 'b', segue-se uma análise de fontes reais.

a) As fontes reais de tensão (figura 3.24) apresentam uma resistência interna não nula.

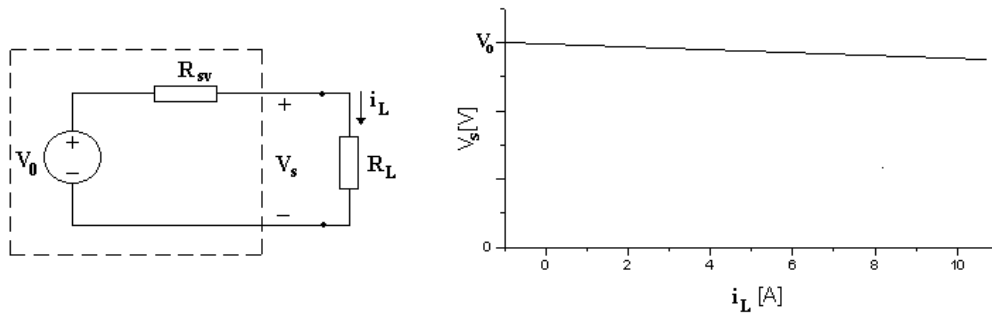


Figura 3.24: Fonte real de tensão

b) As fontes reais de corrente (figura 3.25) apresentam uma resistência de saída que não é infinita.

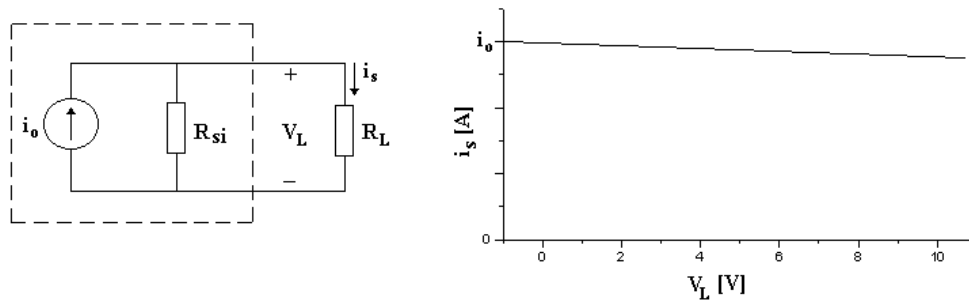


Figura 3.25: fonte real de corrente.

Exemplo 3.11: a) Encontre a expressão para o valor de tensão V_s do circuito da figura 3.24 em função de V_o . b) Encontre a expressão que relaciona i_s e i_o da figura 3.25.

Exemplo 3.12: Dado uma fonte real como a mostrada na figura 3.24 e considerando $R_{sv} = 0,01\Omega$ e $V_o = 12V$, calcule:

- a) A tensão V_s quando a fonte não está sujeita a carga;
- b) A corrente no circuito para $R_L = 0,39\Omega$;
- c) A tensão V_s para $R_L = 0,39\Omega$;
- d) A queda interna de tensão para $R_L = 0,39\Omega$;
- e) A potência fornecida pela fonte ideal ($R_{sv} = 0\Omega$);
- f) A potência fornecida à carga de $0,39\Omega$;
- g) A potência consumida pela resistência interna R_{sv} .

3.8 Transformação de fontes

Existem circuitos que, embora utilizem fontes diferentes, são equivalentes como mostra a Figura 3.26. Então, como saber se são equivalentes? Como obtê-los?

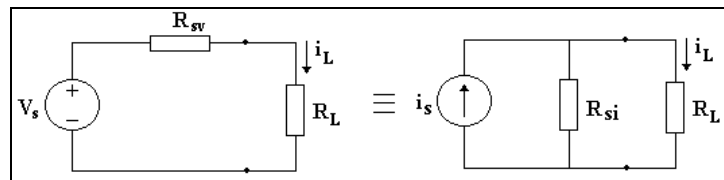


Figura 3.26: Circuitos equivalentes

Para obter um circuito equivalente que utiliza uma fonte de corrente a partir de um circuito que utiliza fonte de tensão, considera-se $R_L = 0$ como mostram as figuras 3.27a e b.

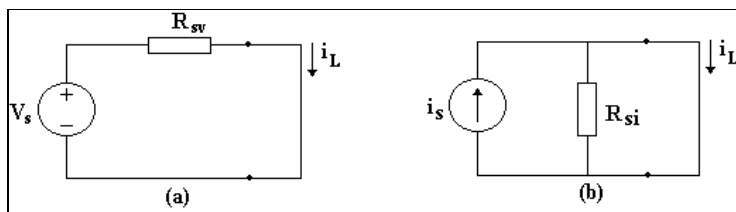


Figura 3.27: Circuitos com $R_L = 0$.

Assim:

$$i_L = \frac{V_s}{R_{sv}} \quad \text{e} \quad i_s = i_L \quad (3.28)$$

Ou:

$$i_s = \frac{V_s}{R_{sv}} \quad (3.29)$$

Para obter um circuito equivalente que utiliza uma fonte de tensão a partir de um circuito que utiliza fonte de corrente, considera-se $R_L = \infty$, como mostram as figuras 3.28a e b.

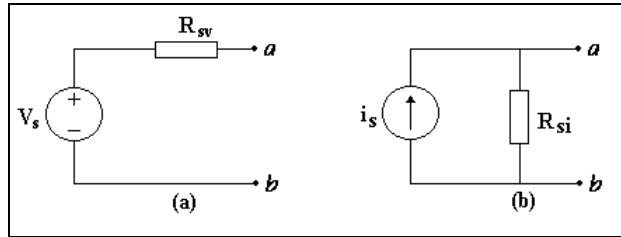


Figura 3.28: Circuitos com $R_L = \infty$.

Assim:

$$v_s = v_{ab} \quad \text{e} \quad v_{ab} = i_s R_{si} \quad (3.30)$$

$$v_s = i_s R_{si} \quad (3.31)$$

Exemplo 3.13: Obter a potência dissipada no resistor de 10Ω do circuito da figura 3.29 aplicando substituição de fontes.

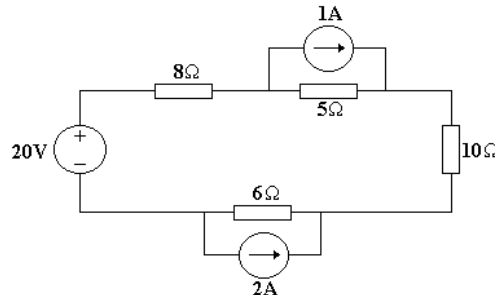


Figura 3.29: Circuito do Exemplo 3.11.

3.9 Associação de fontes reais

a) Fontes reais de tensão em série

A figura 3.30 ilustra o processo de associação de fontes de tensão reais em série, que segue os seguintes passos:

- Somam-se as resistências;
- Somam-se as tensões de cada uma das fontes.

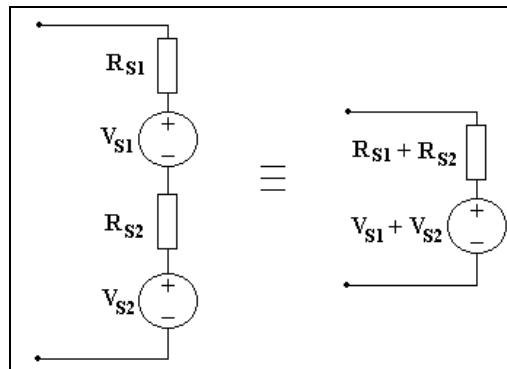


Figura 3.30: Fontes reais de tensão em série

b) Fontes reais de corrente em série

A figura 3.31 ilustra o processo de associação de fontes de corrente reais em série, que segue os seguintes passos:

- Transformam-se as fontes de corrente em fontes de tensão;
- Somam-se as tensões e resistências;
- Transforma-se a fonte de tensão em fonte de corrente.

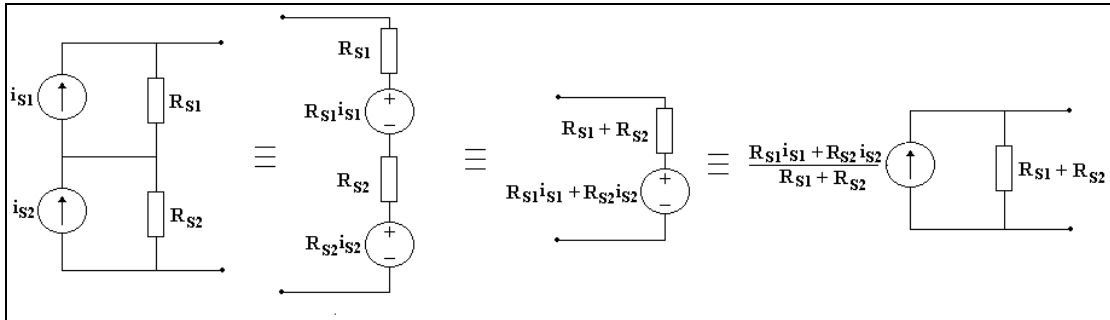


Figura 3.31: Fontes de corrente em série.

c) Fontes reais de corrente em paralelo

A figura 3.32 ilustra o processo de associação de fontes de corrente reais em paralelo, que segue os seguintes passos:

- Somam-se as correntes de cada fonte;
- Calcula-se a resistência equivalente (paralelo das resistências).

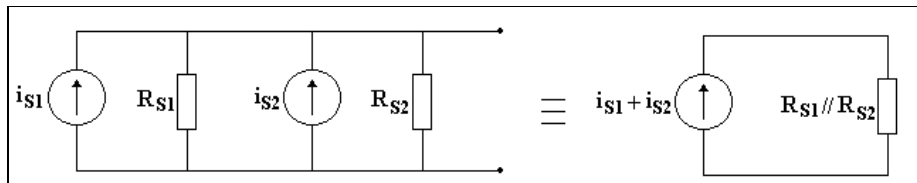


Figura 3.32: Fontes de corrente em paralelo.

d) Fontes reais de tensão em paralelo

A figura 3.32 ilustra o processo de associação de fontes de tensão reais em paralelo, que segue os seguintes passos:

- Transformam-se as fontes de tensão em fontes de corrente;
- Somam-se as correntes de cada fonte;
- Calcula-se a resistência equivalente;
- Transforma-se a fonte de corrente em fonte de tensão.

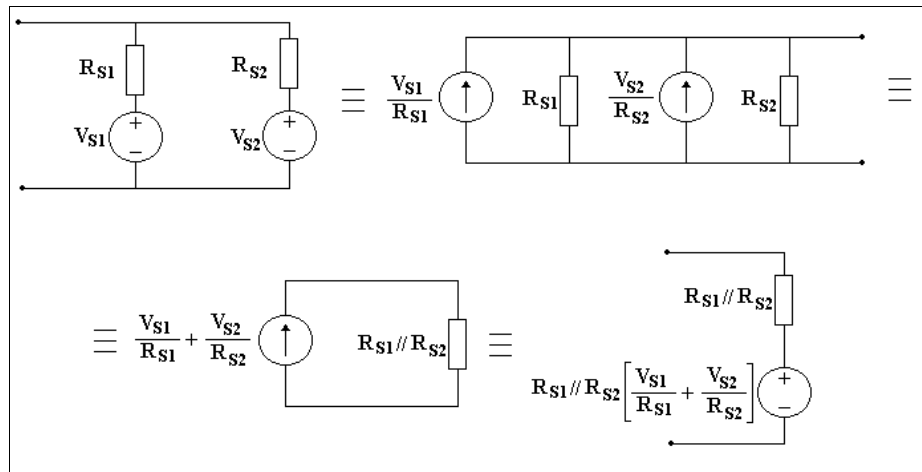


Figura 3.33: Fontes de tensão em paralelo.

Exercícios

E3.1 Um cubo é feito com 8 resistores de $1k\Omega$ como mostra a Figura E3.1. Obter a resistência equivalente entre dois vértices opostos (como por exemplo vértices A e C) do cubo:

- Utilizando transformações Δ -Y e Y- Δ ;
- Utilizando paralelismo de resistores.

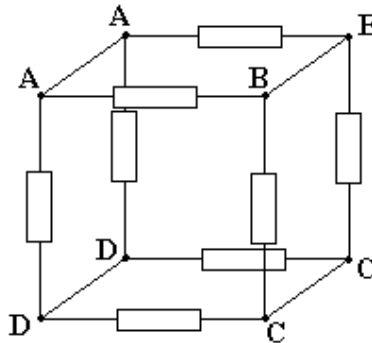


Figura E3.1: circuito para exercício.

E3.2 A resistência de um fio de Ferro é 5,9 vezes a de um fio de cobre com as mesmas dimensões. Qual deve ser o diâmetro de um fio de ferro para que tenha a mesma resistência de um fio de Cobre de 0,12 cm de diâmetro, admitindo-se que ambos os fios tenham o mesmo comprimento.

E3.3 Três resistores iguais são ligados em série. Quando se aplica uma certa ddp a esta combinação, a potência total consumida é de 10 W. Que potência seria consumida se os três resistores fossem ligados em paralelo à mesma diferença de potencial?

E3.4 Aplicando transformação de fontes, determine a tensão no resistor de $3\ \Omega$ do circuito da figura E3.4.

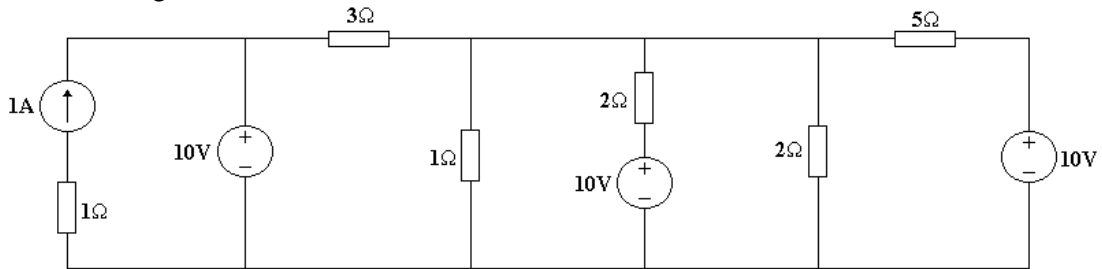


Figura E3.4: circuito para exercício.

E3.5 Um chuveiro elétrico é ligado a rede de 127V como mostra a figura E3.5. A ligação entre o chuveiro e a rede é feita por um condutor de cobre de resistividade $\rho = 17,23 \times 10^{-3}\ \Omega \cdot \text{m}$ e área de secção transversal de $33,59\ \text{mm}^2$. A potência nominal do chuveiro é 5400W quando a tensão em seus terminais é 127V.

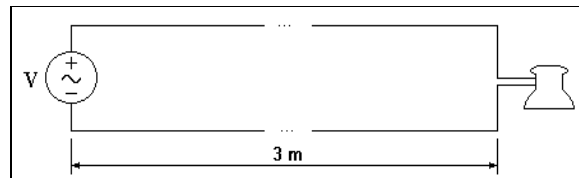


Figura E3.5: circuito para exercício.

- Calcule a potência total dissipada no sistema.
- O proprietário do chuveiro resolveu trocá-lo por um de 5400W/220V visando economizar energia. Então, mandou mudar a tensão da rede para 220V, mas continuou utilizando a mesma fiação. Qual é a potência total dissipada no novo circuito?
- Suponha que a Copel cobre 42 centavos por quilowatt-hora e que o proprietário use o chuveiro durante uma hora a cada dia. Qual é a potência total dissipada no novo circuito?

E3.6 Deseja-se fazer um divisor resistivo simples para regular a intensidade luminosa de uma luminária. A lâmpada da luminária é 150W/127V. A luminária deverá ter dois interruptores simples; quando um é acionado a lâmpada ascende com potência de 150W. Quando o outro interruptor é acionado, porém, o divisor resistivo atua e a potência na lâmpada deverá ser de 75W. Deve-se implementar esse divisor utilizando resistores comerciais de 1W.