

Capítulo VI

Teoremas de Circuitos Elétricos

6.1 Introdução

No presente texto serão abordados alguns teoremas de circuitos elétricos empregados freqüentemente em análises de circuitos. Esses teoremas têm como objetivo principal simplificar a análise de circuitos.

Os teoremas relatados neste capítulo são: superposição, Thevenin, Norton e máxima transferência de potência.

6.2 Teorema da Superposição

O teorema da superposição já foi abordado no capítulo 2 deste manual, porém não foi muito bem enfatizado. Nesta seção esse teorema será tratado e exemplificado com mais detalhes.

Considerando o seguinte problema: Um circuito *linear* é composto por n fontes de tensão independentes (V_1, V_2, \dots, V_n). Deseja-se calcular a tensão em um resistor R_1 qualquer do circuito.

A solução de tal problema pode se tornar bastante complicada dependendo da complexidade do circuito, pois pode resultar em um sistema de equações com dezenas de incógnitas. Por outro lado, se o teorema da superposição for empregado, pode-se obter equações mais simples referentes a cada uma das fontes independentemente. Assim, em vez de resolver o problema através de um gigantesco sistema de equações, é possível resolvê-lo por meio de várias equações simples.

O teorema da superposição diz que, se um circuito é linear, então as fontes de tensão V_1, V_2, \dots, V_n ocasionarão, respectivamente, uma tensão $V_{R1}, V_{R2}, \dots, V_{Rn}$ no resistor R_1 e a tensão total sobre o resistor será a soma destas tensões (ou seja, $V_{R1} + V_{R2} + \dots + V_{Rn}$). Para obter a tensão V_{R1} , considera-se a fonte de tensão V_1 e anulam-se todas as demais fontes. Conseqüentemente, para obter a tensão V_{R2} , considera-se a fonte V_2 e assim sucessivamente. No final somam-se todas as tensões adquiridas e têm-se a tensão total sobre o resistor R_1 .

Anular uma fonte de tensão é equivalente a fazer um curto-circuito em seus terminais como mostra a figura 6.1a. Anular uma fonte de corrente significa abrir o circuito em seus terminais como mostra a figura 6.1b.

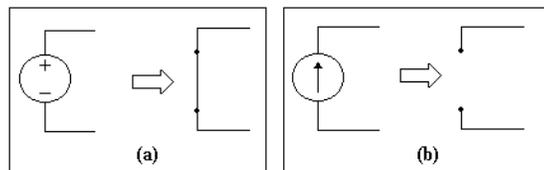


Figura 6.1: (a) Como anular uma fonte de tensão.
(b) Como anular uma fonte de corrente.

É importante observar que para aplicar o princípio da superposição **não se deve anular fontes dependentes.**

Exemplo 6.1: Utilize o princípio da superposição para calcular V_o no circuito da Figura 6.2.

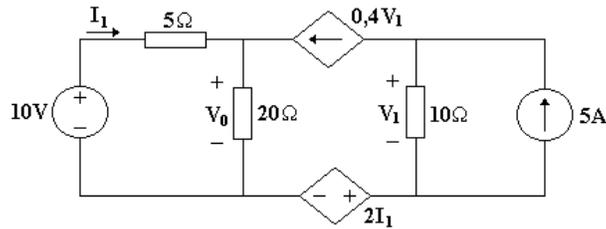


Figura 6.2: Exemplo 6.1.

Exemplo 6.2: Utilize o princípio da superposição para determinar V no circuito abaixo.

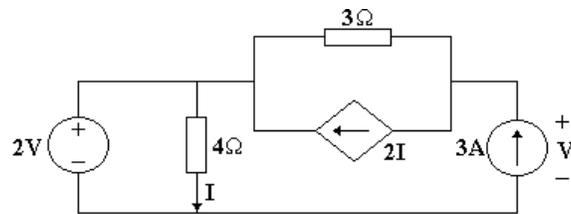


Figura 6.3 Exemplo 6.2.

Exercícios:

- 1) Calcule V_{AB} no circuito da figura 6.4 usando o Teorema da Superposição.

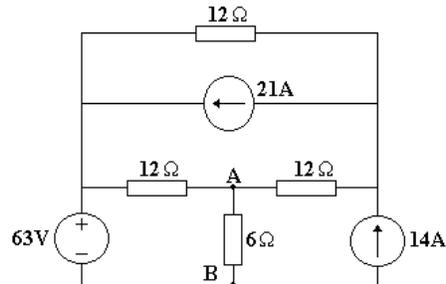


Figura 6.4: Exercício 1.

- 2) Calcule V_1 e I_1 no circuito da figura 6.5.

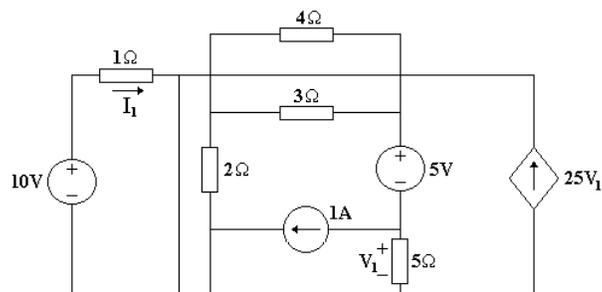


Figura 6.5: Exercício 2.

Respostas: 1) 15V; 2) $V_1 = -5V$; $i_1 = 10A$

6.3 Teorema de Thevenin

Em 1883 M. Leon Thevenin enunciou o seguinte teorema:

“Qualquer estrutura linear ativa pode ser substituída por uma única fonte de tensão V_{th} em série com uma resistência R_{th} ”.

Na prática, isso significa que qualquer circuito pode ser representado conforme mostra a figura 6.6.

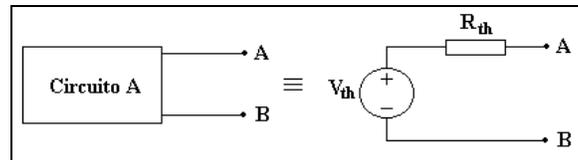


Figura 6.6: Teorema de Thevenin

Dado um circuito A qualquer, calcula-se o equivalente de Thevenin entre dois pontos ‘A’ e ‘B’, da seguinte forma:

- V_{th} é a tensão medida nos terminais ‘A’ e ‘B’ do circuito A;
- R_{th} é a resistência entre os terminais ‘A’ e ‘B’ com todas as fontes do circuito A anuladas.

Exemplo 6.3: Calcule o circuito equivalente de Thevenin responsável pela alimentação do resistor R_L da Figura 6.7.

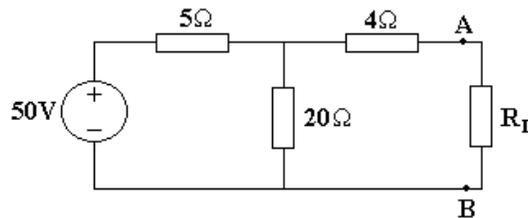


Figura 6.7: Exemplo 6.3

Exemplo 6.4: Obter o equivalente de Thevenin entre os terminais 'A' e 'B' do circuito da figura 6.8:

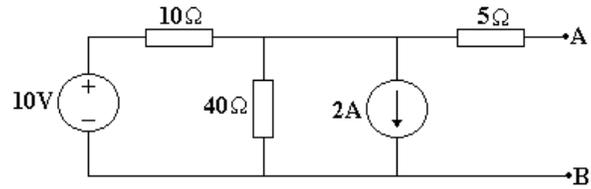


Figura 6.8: Exemplo 6.4

Exercícios:

- 1) Determine a potência dissipada no resistor de 10Ω do circuito da figura 6.9 utilizando o equivalente de Thevenin.

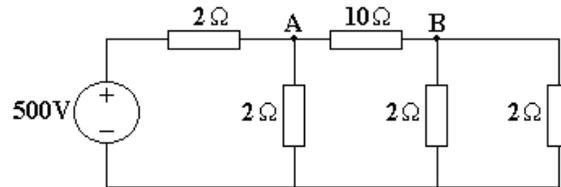


Figura 6.9: Exercício 1.

- 2) Aplicando o Teorema de Thevenin, calcular a tensão no resistor de 20Ω do circuito da figura 6.10.

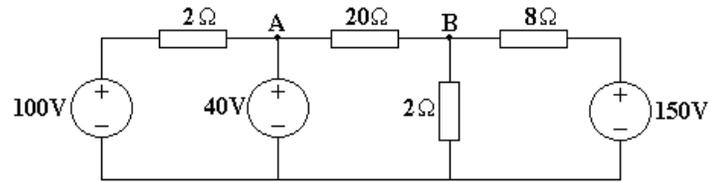


Figura 6.10: Exercício 2.

- 3) Determine a tensão no resistor de 50Ω do circuito da figura 6.11, utilizando o Teorema de Thevenin.

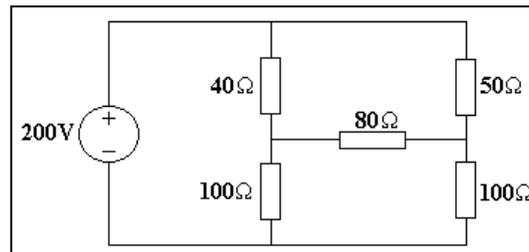


Figura 6.11: Exercício 3.

Respostas: 1) 4,3KW; 2) 9,26V; 3) 5,37V.

- 4) Determine o equivalente de Thevenin responsável pela alimentação do resistor R_L do circuito da figura 6.12.

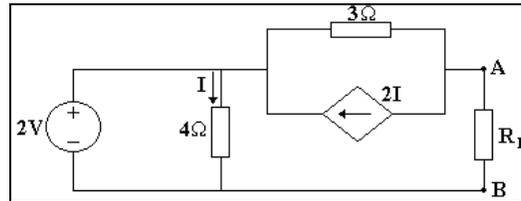


Figura 6.12: Exercício 4.

- 5) Determine a tensão V_0 aplicando Teorema de Thevenin ao circuito da figura 6.13.

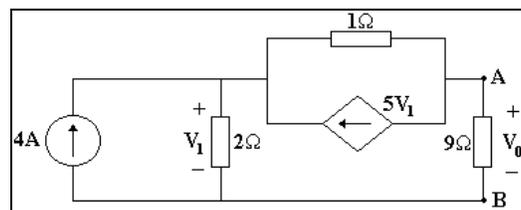


Figura 6.13: Exercício 5

6.4 Teorema de Norton

Em 1933, E. L. Norton enunciou o seguinte teorema:

“Qualquer estrutura linear ativa pode ser substituída por uma única fonte de corrente I_N em paralelo com uma resistência R_N ”.

Esse teorema é o dual ao Teorema de Thevenin e, na prática, diz que um circuito qualquer pode ser representado conforme mostra a figura 6.14.

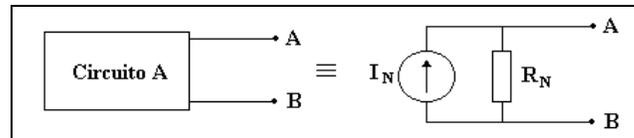


Figura 6.14: Teorema de Norton

Dado um circuito A qualquer, calcula-se o equivalente de Norton, entre dois pontos ‘A’ e ‘B’, da seguinte forma:

- I_N é a corrente que passa por um curto-circuito aplicado nos terminais ‘A’ e ‘B’.
- R_N é calculado da mesma maneira que R_{th} .

Exemplo 6.5: Obter o equivalente de Norton a partir do circuito equivalente de Thevenin (Figura 6.15).

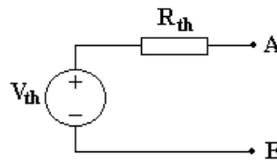


Figura 6.15: Circuito equivalente de Thevenin.

Exemplo 6.6: Obter o equivalente de Norton para o circuito da Figura 6.16.

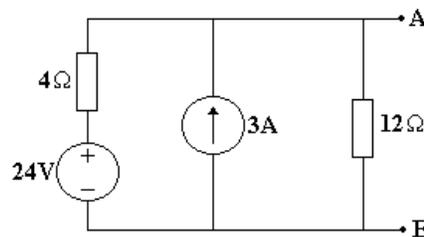


Figura 6.16: Exemplo 6.6.

Exemplo 6.7: Calcular V_o no circuito da figura 6.17 utilizando o Teorema de Norton.

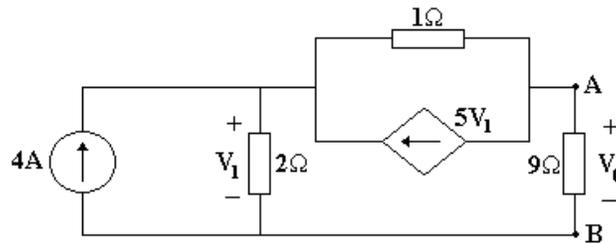


Figura 6.17: Exemplo 6.7.

6.5 Teorema da Máxima Transferência de Potência

Esse teorema trata da potência máxima que se pode obter de um circuito linear qualquer.

Sabe-se que qualquer circuito pode ser representado pelo circuito equivalente de Thevenin, ou seja:

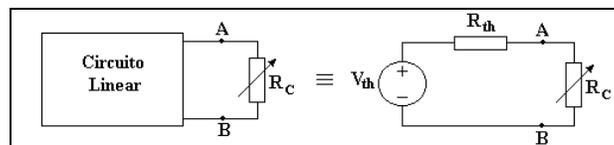


Figura 6.18: Circuito equivalente de Thevenin

Então, pode-se determinar o valor de resistência R_C que dissipará a máxima potência da seguinte maneira:

$$I = \frac{V_{th}}{R_{th} + R_C} \quad (6.1)$$

$$P_C = R_C I^2 \quad (6.2)$$

$$P_C = R_C \left(\frac{V_{th}}{R_{th} + R_C} \right)^2 \quad (6.3)$$

Considerando V_{th} e R_{th} constantes, a equação 6.3 resulta no gráfico da Figura 6.19.

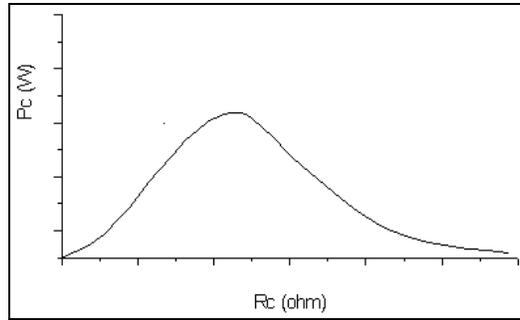


Figura 6.19: Gráfico da potência em função da resistência.

Como se pode ver o gráfico possui um ponto de máximo e isso é coerente pois:

- $P_C > 0$ para $0 < R_C < \infty$;
- $P_C = 0$ quando $R_C = 0$ e quando $R_C \rightarrow \infty$.

O ponto de máximo ocorrerá quando:

$$\frac{dP_C}{dR_C} = 0 \quad (6.4)$$

Logo:

$$\frac{V_{th}^2(R_{th} + R_C) - 2R_C V_{th}^2}{(R_{th} + R_C)^3} = 0 \quad (6.5)$$

$$V_{th}^2(R_{th} + R_C) = V_{th}^2 R_C 2 \quad (6.6)$$

$$R_{th} + R_C = 2R_C \quad (6.7)$$

$$R_C = R_{th} \quad (6.8)$$

A máxima transferência de potência ocorre quando a carga tem resistência igual à resistência de Thevenin do circuito.

Logo, o valor da potência máxima que pode ser dissipada pela carga será:

$$P_{MÁX} = \frac{V_{th} R_{th}}{2R_{th}} \frac{V_{th}}{2R_{th}} \quad (6.9)$$

Onde $V_{th} R_{th} / 2R_{th}$ é o divisor de tensão R_C , R_{th} . Assim:

$$P_{MÁX} = \frac{V_{th}^2}{4R_{th}} \quad (6.10)$$

6.5.1 Rendimento

A eficiência ou rendimento de uma máquina ou circuito é definido como:

$$\eta = \frac{\text{potência_de_saída}}{\text{potência_de_entrada}} \quad (6.11)$$

No caso da máxima transferência de potência, tem-se o seguinte rendimento:

$$P_{SAÍDA} = \frac{V_{th}^2}{4R_{th}} \quad (6.12)$$

$$P_{ENTRADA} = \frac{V_h^2}{2R_{th}} \quad (6.13)$$

Portanto, o rendimento é:

$$\eta = \frac{1}{2} = 50\% \quad (\text{rendimento para máxima transferência}) \quad (6.14)$$

Apenas 50% da potência fornecida é transferida para a carga na situação de máxima transferência de potência. Os outros 50% são dissipados na resistência de Thevenin (que pode ser a resistência interna da fonte).

Exemplo 6.8: Reduza o circuito da Figura 6.20 a uma fonte de tensão em série com uma resistência. Qual a potência máxima que este circuito pode fornecer para uma carga R conectada entre A e B?

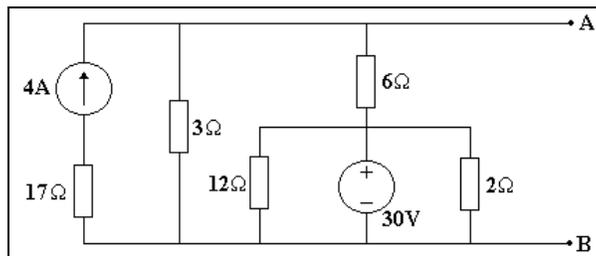


Figura 6.20: Exemplo 6.8.

Solução:

Os resistores de 12Ω e 2Ω em paralelos com a fonte de tensão são irrelevantes pois a tensão na fonte será 30V independentemente do resto do circuito. Da mesma maneira o resistor de 17Ω não faz diferença ao circuito pois a corrente que o atravessa será 4A independentemente de qualquer outro fator. Assim, o circuito 5.19 pode ser redesenhado como mostra a Figura 6.21.

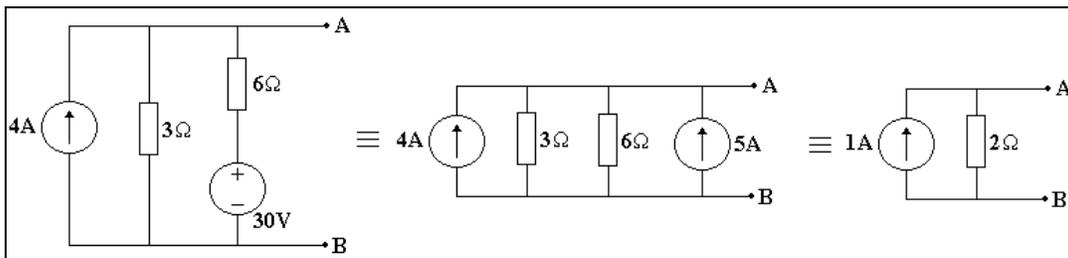


Figura 6.21: Circuito 6.20 redesenhado.

Portanto, a potência máxima que esse circuito pode fornecer é:

$$P = RI^2 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0,5W \quad (6.15)$$

Exemplo 6.9: Calcular a carga R_L que determina a máxima transferência de potência no circuito da Figura 6.22. Determine também a potência fornecida pela fonte e a dissipada na carga.

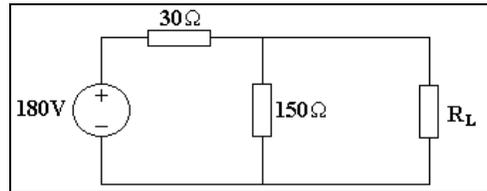


Figura 6.22: Exemplo 6.9.

Solução:

Primeiramente, obtém-se o equivalente de Thevenin entre os pontos A e B. Para o cálculo de R_{th} :

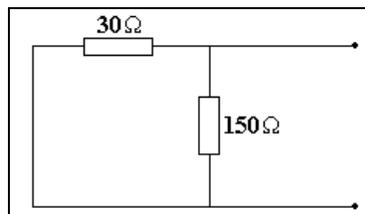


Figura 6.23: Circuito para o cálculo de R_{th} .

Para o cálculo de V_{th} :

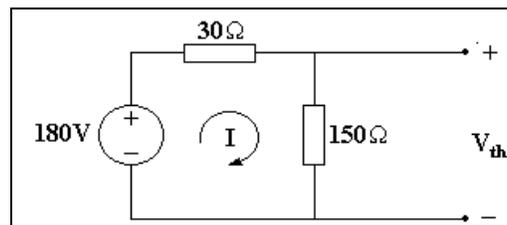


Figura 6.24: Circuito para o cálculo de V_{th} .

O valor de resistência R_L é 25Ω e a potência fornecida e dissipada é:

$$P_{CARGA} = 25 \left(\frac{150}{50} \right)^2 = 225W \quad (6.16)$$

$$P_{FONTE} = 150 \left(\frac{150}{50} \right) = 450W \quad (6.17)$$

Exemplo 6.10: A ponte de Wheastone desequilibrada tem uma resistência R_g em série com um microamperímetro. Calcule o valor da potência máxima para este circuito. Qual a leitura do microamperímetro nesse caso?

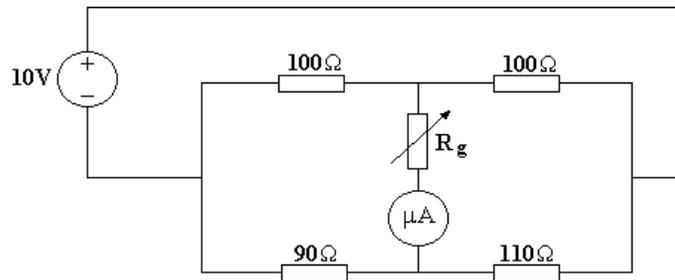


Figura 6.25: Exemplo 6.10.

Exercícios

E6.1 Utilize o princípio da superposição para determinar I_o na rede da figura E6.1.

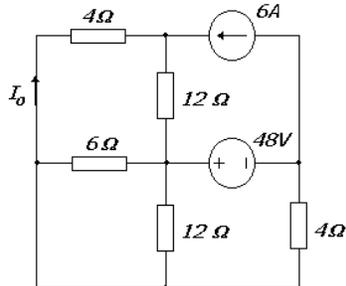


Figura E6.1: circuito para exercício.

E6.2 Utilize o princípio da superposição para determinar V_o na rede da figura E6.2.

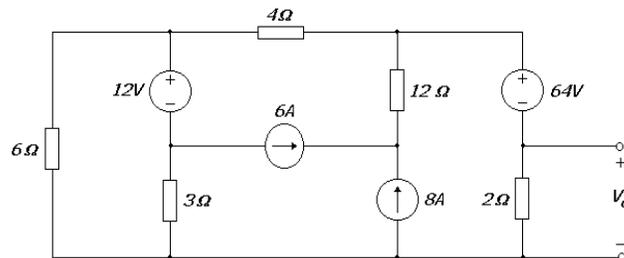


Figura E6.2: circuito para exercício.

E6.3 Efetue uma transformação de fonte para determinar I_o no circuito da figura E6.3.

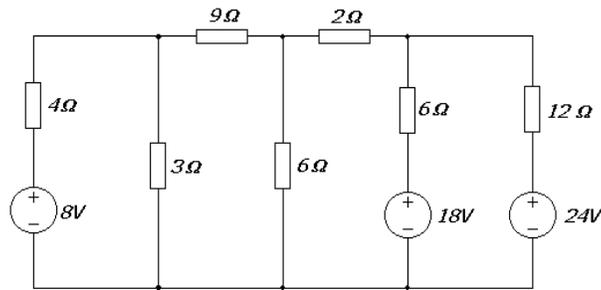


Figura E6.3: circuito para exercício.

E6.4 Utilize o teorema de Thévenin para determinar V_o na figura E6.4.

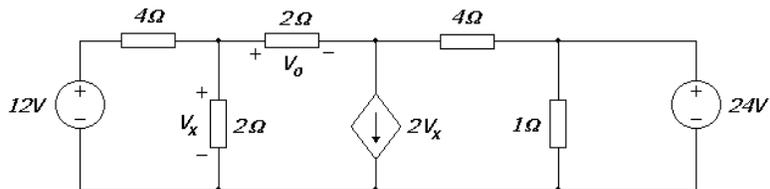


Figura E6.4: circuito para exercício.

E6.5 Utilize o teorema de Thévenin para determinar V_o na rede da figura E6.5.

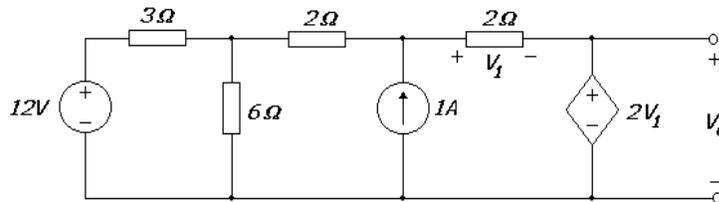


Figura E6.5: circuito para exercício.

E6.6 Utilize o teorema de Thévenin para determinar V_o na rede da figura E6.6.

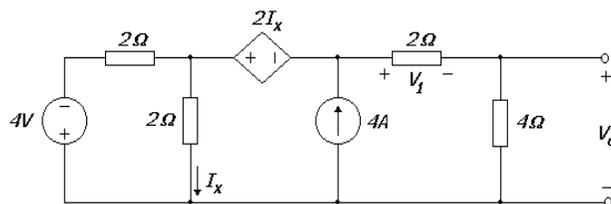


Figura E6.6: circuito para exercício.

E6.7 Encontre o equivalente de Thévenin no circuito da figura E6.7.

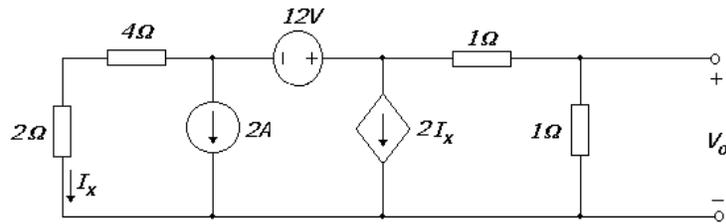


Figura E6.7: circuito para exercício.

E6.8 Encontre o equivalente de Norton na rede da figura E6.8 nos terminais A-B.

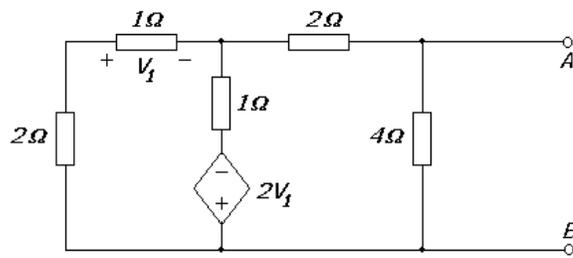


Figura E6.8: circuito para exercício.

E6.9 Determine o valor de R_L na figura E6.9, para uma máxima transferência de potência.

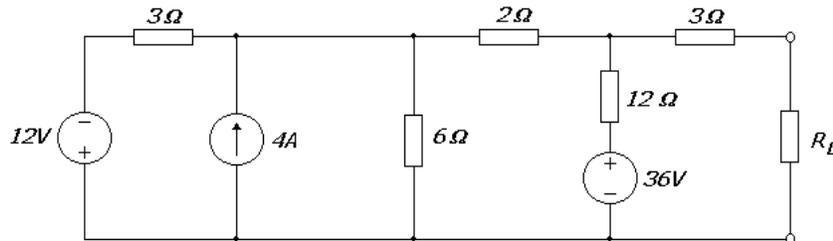


Figura E6.9: circuito para exercício.