

Capítulo VII

Elementos Armazenadores de Energia

7.1 Introdução

Neste capítulo serão estudados dois elementos armazenadores de energia conhecidos como indutor e capacitor. O primeiro consiste em um elemento que armazena energia em campo magnético e o segundo armazena energia em campo elétrico. Será visto equações e conceitos que envolvem o funcionamento desses elementos que são utilizados com frequência em rádios, televisões, radares, transformadores, microondas e uma porção de outros equipamentos eletroeletrônicos.

Porém, antes de apresentar esses elementos, faz-se uma sucinta explicação de alguns conceitos físicos relevantes como lei de Coulomb, campo elétrico e magnético, efeito Oersted e lei de Faraday.

7.2 Lei de Coulomb

A lei de Coulomb descreve a força mútua que uma carga ocasiona em outra, como mostra a figura 7.1.

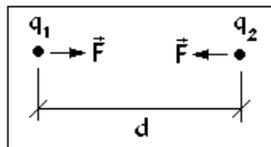


Figura 7.1: Força elétrica entre duas cargas puntiformes.

O equacionamento dessa lei é:

$$F = \frac{Kq_1q_2}{d^2} \quad (7.1)$$

Onde F é a intensidade da força e k é uma constante de proporcionalidade cujo valor é dado por:

$$k = 8,98755 \times 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2} \approx 9,0 \times 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2} \quad (7.2)$$

7.3 Campo Elétrico

A interação elétrica (equação 7.1) entre partículas carregadas pode ser reformulada utilizando o conceito de campo elétrico. Suponha que uma carga Q esteja a uma distância r de uma carga q_0 como mostra a figura 7.2.

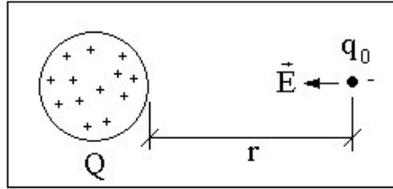


Figura 7.2: Campo elétrico em q_0 devido à carga Q .

O campo elétrico a que a carga q_0 está sujeita é dado pela equação 7.3.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{kq_0Q}{r^2 q_0} \hat{a}_x = \frac{kQ}{r^2} \hat{a}_x \quad [\text{N/m}] \quad (7.3)$$

Onde \hat{a}_x é a direção de \vec{F} .

7.4 Campo Magnético

A diferença fundamental entre campo elétrico e campo magnético é que o campo elétrico se refere ao campo gerado por cargas em *repouso* já o campo magnético se refere ao campo gerado por cargas em *movimento* ou por ímãs permanentes.

Suponha uma carga sujeita a um campo magnético como mostra a figura 7.3.

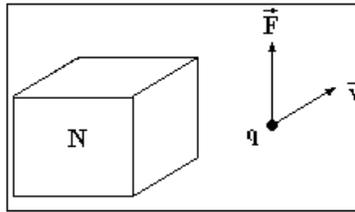


Figura 7.3: Carga sujeita a um campo magnético.

Verificou-se experimentalmente que:

- $\vec{F} \propto q$;
- $\vec{F} \propto |v|$;
- Para uma determinada direção de $\vec{v} \Rightarrow \vec{F} = 0$;
- Se a velocidade não estiver orientada nessa direção mencionada antes, há uma força que é perpendicular à reta e à velocidade;
- $\vec{F} \propto \sin\theta$; sendo θ o ângulo entre a direção em que $\vec{F} = 0$ e a velocidade.

A partir da análise destes fatos experimentais formulou-se a seguinte equação:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (7.4)$$

Onde \vec{B} é o vetor campo magnético, \vec{v} é a velocidade da carga e q é o valor da carga. Como na equação 7.4 há um produto vetorial, ela pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$|\vec{F}| = q \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin\theta \quad (7.5)$$

Portanto, os vetores dessa equação formam o triedro como mostra a figura 7.4.

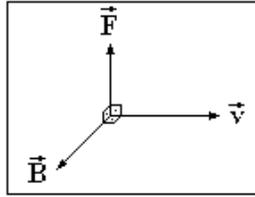


Figura 7.4: Triedro que representa a equação 6.4.

7.5 Efeito Orsted e Lei de Faraday

Em 1820, Hans Christian Orsted, observou que ao aproximar uma bússola de um fio percorrido por uma corrente, há deflexão da agulha da bússola. Observou também que ao inverter o sentido da corrente a bússola girava 180°. A esse fenômeno chamou de efeito orsted. A figura 7.5 mostra as linhas de densidade de campo magnético que aparecem em torno de um fio condutor percorrido por corrente bem como o campo magnético que surge em uma bobina também percorrida por corrente.

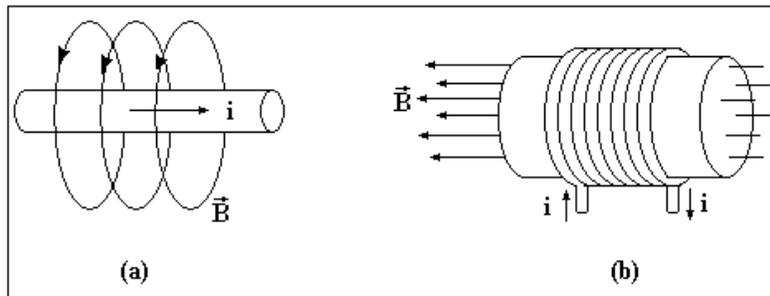


Figura 7.5: a) campo magnético em torno de um fio percorrido por corrente.
b) campo magnético gerado em uma bobina devido a corrente i .

Mais tarde, em 1831, Michael Faraday realizou experimentos para a Royal Society e a partir de suas observações concluiu que uma variação de fluxo magnético no interior de uma espira pode gerar uma fem em seus terminais. A equação que relaciona a variação de fluxo magnético com a ddp gerada em *uma espira* é:

$$fem = - \frac{d\phi}{dt} \quad \text{[Lei de Faraday-Lenz]} \quad (7.6)$$

Esta lei será importante para explicitar a relação entre corrente e tensão no indutor. O sinal negativo dessa equação, postulado por Lenz, indica que há conservação de energia, ou seja, se uma variação de campo magnético ocorre em um sentido, a fem induzida e conseqüente corrente, geram um campo de sentido oposto. (veja Física, P.ª Tipler, 3ª edição, volume 3, 1995, capítulo 26).

7.6 Indutor

O indutor é um dispositivo de dois terminais composto por um fio condutor enrolado em espiral como mostra a figura 7.6.

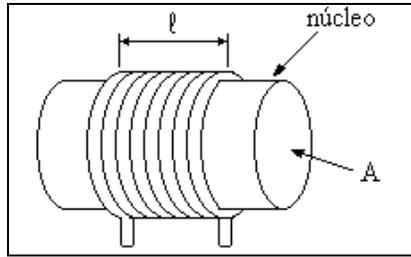


Figura 7.6: Aspectos construtivos do indutor.

Como o indutor é composto pelo equivalente de várias espiras, a tensão em seus terminais, pela lei de Faraday, é:

$$v = -N \frac{d\phi}{dt} = -\frac{dN\phi}{dt} \quad (7.7)$$

Onde N é o número de espiras do indutor. Experimentalmente verifica-se que:

$$L \cdot i = N \cdot \phi \quad (7.8)$$

Onde L é a indutância do indutor. Então, conjuntamente, as equações 7.7 e 7.8 resultam em:

$$v = -L \frac{di(t)}{dt} \quad (7.9)$$

O sinal negativo da equação 7.9 depende do sentido de enrolamento da bobina e, para a análise de circuitos elétricos, este sinal será desconsiderado e a equação ficará da seguinte forma:

$$v = L \frac{di(t)}{dt} \quad (7.10)$$

Para equacionar a corrente em função da tensão basta seguir os seguintes passos:

$$\int_{i_0}^i di = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(t) dt \quad (7.11)$$

$$i(t) - i(t_0) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(t) dt \quad (7.12)$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(t) dt + i(t_0) \quad (7.13)$$

A partir da análise da equação 7.10 é possível concluir que em níveis de corrente contínua o indutor se comporta como um curto-circuito ($v = 0$) e, ainda, pode-se dizer que a corrente no indutor não pode variar abruptamente, pois caso contrário não haverá derivada neste ponto.

A indutância L de um indutor pode ser calculada a partir da seguinte expressão:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l - 0,45d} \quad [\text{H}] \quad (7.14)$$

Onde:

- $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H/m}$ (permeabilidade do vácuo);
- N é o número de espiras;
- l é a extensão da bobina;
- d é o diâmetro do núcleo;
- A é a área da secção transversal do núcleo.

A expressão 7.14 é válida somente para $l \gg d$ e considera-se que não há núcleo (vácuo).

Exemplo 7.1: A tensão em um indutor de 2H é $6\cos 5t$. Estabeleça uma expressão para a

$$\text{corrente, se em } t_o = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow i_o = 1A.$$

7.6.1 Potência e Energia Armazenada no Indutor

Como foi dito na introdução, o indutor é capaz de armazenar energia num campo magnético. Isto ocorre porque, quando o indutor é percorrido por uma corrente elétrica, a lei de Faraday providencia um acúmulo de cargas positivas na entrada do indutor e negativas na saída. É este acúmulo de cargas que representa um armazenamento de energia em campo magnético.

Sabe-se que:

$$p(t) = \frac{dw}{dt} = v(t) \cdot i(t) \quad (7.15)$$

Ou:

$$\int_{t_o}^t p(t)dt = \int_{w_o}^w dw \quad (7.16)$$

$$\int_{t_o}^t Li(t) \frac{di(t)}{dt} dt = w - w_o \quad (7.17)$$

Supondo condições iniciais nulas:

$$w = \frac{1}{2} Li^2(t) \quad (7.18)$$

A equação 7.18 se assemelha a equação de energia cinética ($mv^2/2$) o que leva a inferir que, no indutor, $i(t)$ é conservativo. Isso realmente acontece, pois tomando uma corrente $i_1(t) = I$, obtém-se uma energia E_1 e tomando uma corrente $i_2(t) = -I$, obtém-se uma energia $E_2 = -E_1$. Desta maneira, o somatório das energias é igual a zero, mostrando que há uma conservação de energia que, no caso, é em campo magnético, conforme já descrito.

Além disso, observa-se que uma quantidade finita de energia pode ser armazenada em uma indutância, mesmo que a tensão na mesma seja nula (caso em que a corrente é constante).

7.6.2 Associação de Indutores em Série

Considere uma associação de n indutores em série como mostra figura 7.7.

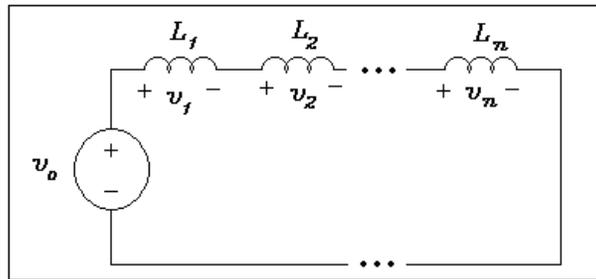


Figura 7.7: Associação série de indutores.

Então:

$$v_o = v_1 + v_2 + \dots + v_n \quad (7.19)$$

$$L_{eq} \frac{di}{dt} = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + \dots + L_n \frac{di}{dt} \quad (7.20)$$

Portanto:

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + \dots + L_n \quad (7.21)$$

Pode-se observar que a associação série de indutores se comporta como um divisor de tensão. Assim, numa configuração como a mostrada na figura 7.8, a tensão no indutor 1 será:

$$v_1 = v_o \frac{L_1}{L_1 + L_2} \quad (7.22)$$

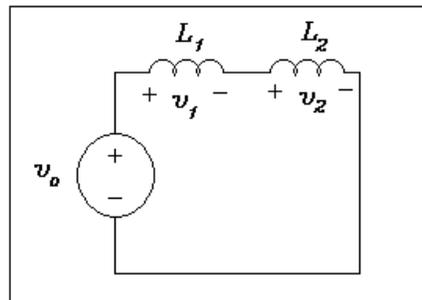


Figura 7.8: Divisor indutivo de tensão.

7.6.3 Associação de Indutores em Paralelo

Considere uma associação de n indutores em paralelo como mostra a Figura 7.9.

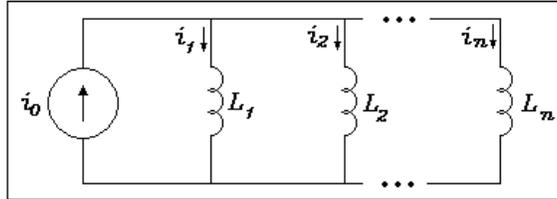


Figura 7.9: Associação de indutores em paralelo.

Então:

$$i_o = i_1 + i_2 + \dots + i_n \quad (7.23)$$

$$i_{eq}(t) = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n} \right) \int_{t_o}^t v(t) dt + \sum_{i=1}^n i_i(t_o) \quad (7.24)$$

Portanto:

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n} \quad (7.25)$$

Pode-se notar que uma associação de indutores em paralelo se comporta como um divisor de corrente. Assim, numa configuração como a mostrada na Figura 7.10, a corrente no indutor 1 será:

$$i_1 = \frac{L_2}{L_1 + L_2} i_o \quad (7.26)$$

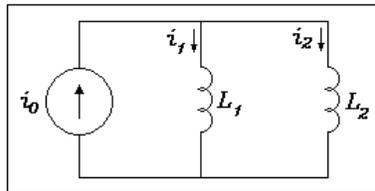


Figura 7.10: Divisor indutivo de corrente.

7.7 Capacitor

O capacitor é um elemento passivo de dois terminais constituído de duas placas metálicas com área extensas e muito próximas uma da outra como mostra a Figura 7.11.

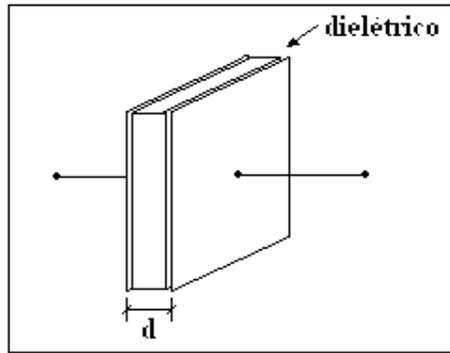


Figura 7.11: Aspectos construtivos do capacitor (esquemático).

A relação entre a carga no capacitor e a tensão aplicada em seus terminais é:

$$q(t) = Cv(t) \quad [F] \quad (7.27)$$

Onde C é uma constante de proporcionalidade denominada capacitância e é calculado a partir da equação:

$$C = \varepsilon \frac{A}{d} \quad (7.28)$$

Onde:

- ε a permissividade do dielétrico (meio isolante);
- A a área de cada uma das placas;
- d a distância entre as placas.

A equação 7.27 pode ser reescrita em função da corrente, ou seja, como:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad (7.29)$$

Então:

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad (7.30)$$

Ou:

$$v(t) = C \int_{t_0}^t i(t) dt + v(t_0) \quad (7.31)$$

De acordo com a equação 7.30, quando o capacitor está sujeito a uma corrente contínua ele se comporta como um circuito aberto $\left(\frac{dv(t)}{dt} = 0\right)$. Além disso, pode-se concluir que a tensão no capacitor não pode variar abruptamente, caso contrário não haverá derivada nesse ponto.

Exemplo 7.2: Calcule V no circuito da Figura 7.12 admitindo que o circuito já esteja em regime permanente.

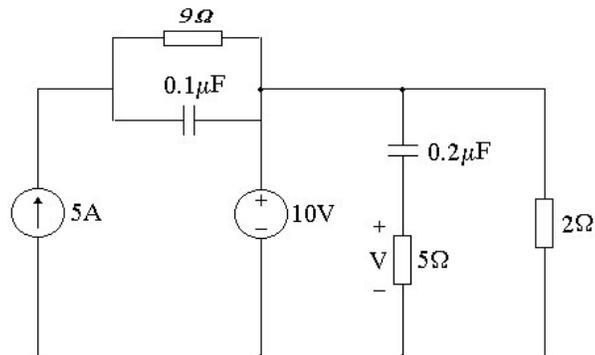


Figura 7.12: Exemplo 7.2.

7.7.1 Potência e Energia Armazenada no Capacitor

Como foi dito na introdução, o capacitor é capaz de armazenar energia num campo elétrico. Isso ocorre porque, quando o capacitor está sujeito a uma diferença de potencial, haverá um acúmulo de cargas nas placas do capacitor. É este acúmulo de cargas que representa um armazenamento de energia em campo elétrico.

Sabe-se que:

$$p(t) = \frac{dw}{dt} = v(t) \cdot i(t) \quad (7.32)$$

Ou:

$$\int_{t_0}^t p(t) dt = \int_{w_0}^w dw \quad (7.33)$$

$$C \int_{t_0}^t v(t) \frac{dv(t)}{dt} dt = w - w_0 \quad (7.34)$$

Supondo condições iniciais nulas:

$$w = \frac{1}{2} C v^2(t) \quad (7.35)$$

7.7.2 Associação de Capacitores em Paralelo

Considere uma associação de capacitores em paralelo como mostra a figura 7.13.

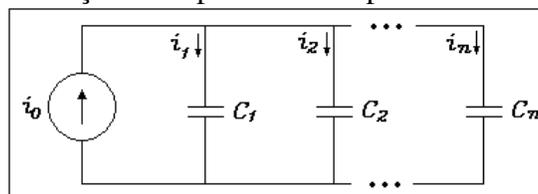


Figura 7.13: Associação de capacitores em paralelo.

Então:
$$i = i_1 + i_2 + \dots + i_n \quad (7.36)$$

$$C_{eq} \frac{dv}{dt} = C_1 \frac{dv}{dt} + C_2 \frac{dv}{dt} + \dots + C_n \frac{dv}{dt} \quad (7.37)$$

Portanto: $C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_n \quad (7.38)$

Como era de se esperar a capacitância equivalente da associação de capacitores em paralelo é igual a soma das capacitâncias associadas. Isso ocorre porque as áreas das placas de cada um dos capacitores se somam.

7.7.3 Associação de Capacitores em Série

Considere uma associação de capacitores em série como mostra a figura 7.14.

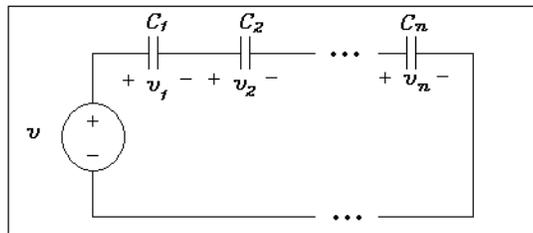


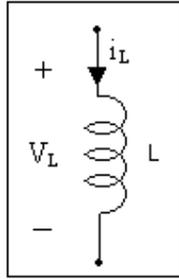
Figura 7.14: Associação de capacitores em série.

Então: $v = v_1 + v_2 + \dots + v_n \quad (7.39)$

$$v = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \int_{t_0}^t i(t) dt + \sum_{i=1}^n v_n(t_0) \quad (7.40)$$

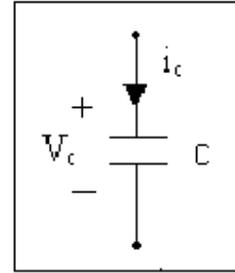
Portanto: $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \quad (7.41)$

Resumo:



$$v_L(t) = L \frac{di}{dt}$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v_L(t) dt + i_L(0)$$



$$i_c(t) = C \frac{dv}{dt}$$

$$v_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_c(t) dt + v_c(0)$$

As três características principais do *indutor* são:

- Armazena energia em seu campo magnético;
- Comporta-se como um curto-circuito para níveis cc;
- A corrente que o atravessa não pode variar abruptamente.

As três principais características do *capacitor* são:

- Armazena energia em seu campo elétrico;
- Comporta-se como um circuito aberto para níveis cc;
- A sua tensão não pode variar abruptamente.

Exercícios

E7.1 Qual é a diferença entre campo magnético e campo elétrico?

E7.2 Qual é a relação entre tensão e corrente no indutor? Dê a forma diferencial e integral dessa relação.

E7.3 Qual é a relação entre tensão e corrente no capacitor? Dê a forma diferencial e integral dessa relação.

E7.4 A forma de onda da figura E7.4 pode ser associada a um capacitor? Justifique.

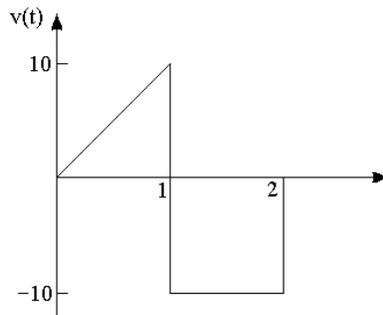


Figura E7.4: Gráfico para exercício.

E7.5 Se $i(t) = \cos 4t$ e $v(t) = \sin 4t$, qual é o elemento x da figura E7.5?

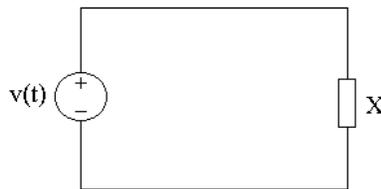


Figura E7.5: Circuito para exercício.

E7.6 A corrente em um capacitor de $4\mu\text{F}$ inicialmente descarregado é mostrada na figura E7.6. Determine a tensão no capacitor para $0 < t < 3$.

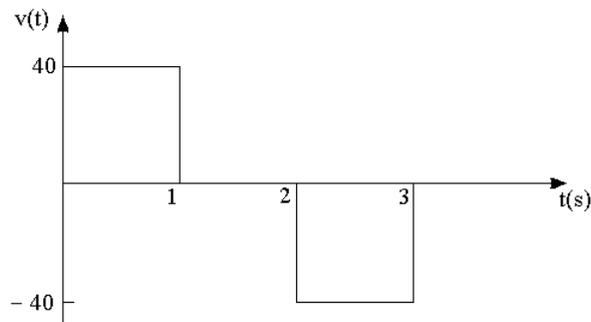


Figura E7.6: Gráfico para exercício.