CAPÍTULO VIII

Análise de Circuitos RL e RC

8.1 Introdução

Neste capítulo serão estudados alguns circuitos simples que utilizam elementos armazenadores. Primeiramente, serão analisados os circuitos RC (que possuem apenas um resistor e um indutor) sem fonte e em seguida os que possuem fonte independente. Um procedimento será mostrado para essa última análise. Do mesmo modo, os circuitos RL's serão analisados do mais simples, ou seja, sem fonte, até a configuração que utiliza fonte.

As análises aqui realizadas são para circuitos com apenas um resistor e um elemento armazenador de energia. Contudo, os procedimentos empregados e as equações deduzidas podem ser aplicados em circuitos com mais elementos, pois alguns circuitos podem ser simplificados através da aplicação de métodos e teoremas já abordados.

8.2 Análise de Circuito RC sem Fonte

Um circuito RC sem fonte é o resultado de uma desconexão repentina de uma fonte cc em um circuito RC, quando, então, a energia armazenada anteriormente no capacitor é liberada para o resistor.

Considere o circuito da figura 8.1, onde se supõe que o capacitor está inicialmente carregado. Como a tensão no capacitor não pode variar abruptamente, então:

$$v_C(0^+) = v_C(0^-) = v_C(0) = V_0 \tag{8.1}$$

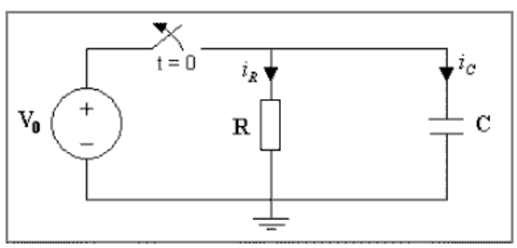

Figura 8.1: Circuito RC sem fonte.

No instante t = 0 o interruptor é aberto e o capacitor começa a descarregar. Aplicando a LCK, ao nó superior do circuito, tem-se:

$$i_R + i_C = 0 \tag{8.2}$$

Como i_c = Cdv/dt e i_R = v/R, então:

$$\frac{v}{R} + C\frac{dv}{dt} = 0 \tag{8.3}$$

Dividindo a expressão por C:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = 0 \tag{8.4}$$

Esta equação é chamada de equação diferencial de 1° ordem, pois existe a 1° derivada em relação ao tempo t. Para resolvê-la dispõe-se os termos da expressão da seguinte forma:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{RC}dt \tag{8.5}$$

Integrando dos dois lados:

$$\ln[v_c(t)] - \ln[v_c(0)] = -\frac{t}{RC} \tag{8.6}$$

Onde ln[v(0)], é a constante de integração. Aplicando propriedade logarítmica:

$$\ln\frac{v_c(t)}{v_c(0)} = -\frac{t}{RC} \tag{8.7}$$

Ou:

$$v_c(t) = V_0 e^{-t/RC} \tag{8.8}$$

A partir do instante em que o interruptor é fechado, a tensão no circuito decresce de forma exponencial conforme mostra a Figura 8.2.

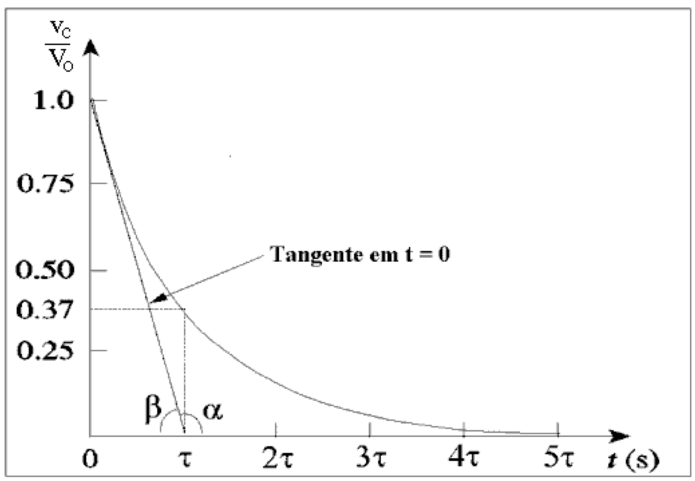

Figura 8.2: Gráfico do fator de decaimento de tensão no circuito RC sem fonte em função do tempo.

A velocidade com que a tensão diminui com o passar do tempo é expressa através de um termo chamado *constante de tempo* denotada pela letra grega τ (tau). Na expressão 8.8:

$$\tau = RC \;\; [\text{s}] \tag{8.9}$$

A tensão no circuito será $V_o e^{-1}$ [V], quando para t = τ e, portanto, a constante de tempo de um circuito é o tempo necessário para que a resposta caia por um fator de 1/e, ou seja, 36,8% do seu valor inicial.

Outra maneira de se entender a constante de tempo é através do traçado da reta tangente da curva no ponto t = 0, como mostra a figura 8.2. Para tanto se segue a seguinte dedução:

$$tg\alpha = \frac{d}{dt}\left(\frac{v_c}{V_o}\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{-t/RC}\right) = -\frac{e^{-t/RC}}{RC} \tag{8.10}$$

$$tg\alpha = -tg\beta = -\frac{v_c(t)}{V_o}\cdot\frac{1}{\tau} = -\frac{e^{-t/RC}}{\tau} \qquad (8.11)$$

Em conjunto as equações 8.10 e 8.11 resultam na equação 8.9.

Observe que, como a curva de descarga é exponencial, o capacitor levará um tempo *infinito* para estar completamente descarregado. Na prática considera-se que após transcorrido um tempo igual a 5τ o capacitor estará com carga desprezível.

Utilizando o conceito de τ, a equação 8.8 fica da seguinte maneira:

$$v(t) = V_0 e^{t/\tau} \qquad (8.12)$$

A Tabela 8.1, mostra que, de fato, em t = 5τ o capacitor terá menos que 1% da carga inicial. Geralmente se considera que o circuito atingiu o **regime permanente** após transcorrido um tempo igual a 5τ.

Tabela 8.1: Tabela com dados de fator de decrescimento

Tempo t	$V(t)/V_0$
T	0,36788
2τ	0,13534
3τ	0,04979
4τ	0,01832
5τ	0,00674

Exemplo 1: Um capacitor de 1mF tem uma tensão inicial de 50V. Determine o tempo 5τ caso seja descarregado:

a) Através de um resistor de 100KΩ;
b) Através de um resistor de 1MΩ.

8.3 Resposta Completa para Circuito RC

Em muitos dos circuitos práticos, há mais do que uma resistência e uma capacitância. Neste caso, deve-se reduzir o circuito original a um circuito equivalente com apenas uma resistência e uma capacitância e definir a constante de tempo $\tau = R_{eq}C_{eq}$. Quando isto não for possível, o circuito não é de primeira ordem, sendo, portanto, abordado posteriormente.

Considere o circuito da Figura 8.3.

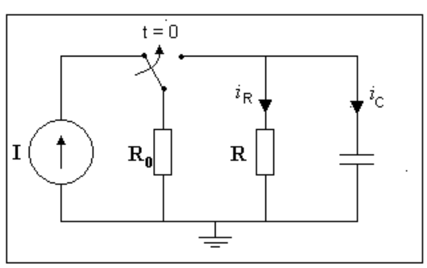

Figura 8.3: Circuito RC com fonte de corrente.

Então, uma equação que engloba as características (tensão e corrente) deste circuito, é:

$$I = i_R(t) + i_c(t) \tag{8.13}$$

$$C\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{R}v_c(t) = I \tag{8.14}$$

Ou, dividindo todos as variáveis por C:

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_c(t) = \frac{I}{C} \tag{8.15}$$

Observa-se que a equação 8.15 é uma equação diferencial de 1° ordem e pode ser resolvida utilizando o método matemático descrito a seguir.

Método Matemático clássico para solução de equações diferenciais:

Considere a equação 8.15. A resposta completa para esta equação será a soma de duas outras respostas, uma chamada resposta homogênea $v_{ch}(t)$ e outra chamada resposta particular $v_{cp}(t)$. A soma dessas duas repostas resulta na tensão $v_c(t)$, ou seja:

$$v_c(t) = v_{ch}(t) + v_{cp}(t) \tag{8.16}$$

Os itens de 'a' a 'c' que se seguem, mostram como encontrar a resposta homogênea e a resposta particular para a equação 8.16.

a) *Solução homogênea:*

É a solução para equação homogênea, ou seja, a solução para a equação:

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_c(t) = 0 \tag{8.17}$$

Na análise de circuitos elétricos, encontra-se freqüentemente, como solução de uma equação diferencial de 1º ordem, uma função exponencial ou a soma de exponenciais do tipo:

$$v_{ch}(t) = k_o e^{k_1 t} \tag{8.18}$$

Então, para resolução da equação diferencial 8.17, supõe-se que 8.18 é solução e determina-se o valor da constante k_o e k_1, como se segue.

$$\frac{d\left(k_o e^{k_1 t}\right)}{dt} + \frac{1}{RC}k_o e^{k_1 t} = 0 \tag{8.19}$$

$$k_o k_1 e^{k_1 t} + \frac{1}{RC}k_o e^{k_1 t} = 0 \tag{8.20}$$

$$k_1 = -\frac{1}{RC} \tag{8.21}$$

E a equação para a solução homogênea fica da seguinte maneira:

$$v_{ch}(t) = k_o e^{-t/RC} \tag{8.22}$$

A outra constante k_o é determinada posteriormente, considerando a solução completa e a condição inicial dada.

b) Solução da equação particular.

A solução particular $v_{cp}(t)$ é determinada a partir da função característica da fonte que excita o circuito e é uma combinação linear desta função e de suas derivadas, com cada termo multiplicado por uma constante a ser determinada.

Para o exemplo, tem-se uma fonte de excitação de corrente contínua e, portanto, a solução particular é:

$$\mathrm{v}_{\mathrm{cp}}(t) = k_2 \tag{8.23}$$

Onde k_2 pode ser determinada substituindo $\mathrm{v}_{\mathrm{cp}}(t)$ na equação original (8.15), ou seja:

$$\frac{dk_2}{dt} + \frac{1}{RC}k_2 = \frac{I}{C} \tag{8.24}$$

$$0 + \frac{1}{RC}k_2 = \frac{I}{C} \tag{8.25}$$

$$k_2 = RI \tag{8.26}$$

c) Solução completa.

$$v_c(t) = k_o e^{-t/RC} + RI \tag{8.27}$$

8.4 Circuito RL sem Fonte

Supõe-se que o indutor da figura 8.4 está sendo percorrido por uma corrente elétrica inicial. Como a corrente no indutor não pode variar abruptamente, então:

$$i(0) = i(0^+) = i(0^-) = I_o \tag{8.28}$$

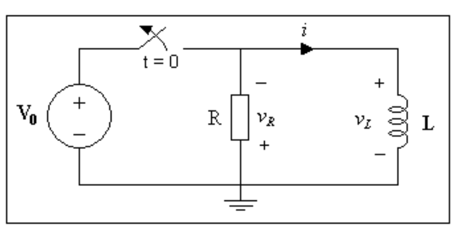

Figura 8.4: Circuito RL sem fonte.

Aplicando LTK ao circuito da figura 8.4, tem-se:

$$v_L + v_R = 0 \tag{8.29}$$

Como v_L= Ldi/dt e v_R = Ri, então:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0 \tag{8.30}$$

Arranjando os termos:

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}dt \tag{8.31}$$

Integrando dos dois lados:

$$\ln\frac{i}{I_o} = -\frac{Rt}{L} \tag{8.32}$$

Ou:

$$i(t) = I_0 e^{Rt/L} \tag{8.33}$$

Da mesma forma que ocorre para o capacitor, há um decaimento exponencial da corrente no indutor como é mostrado na Figura 8.5.

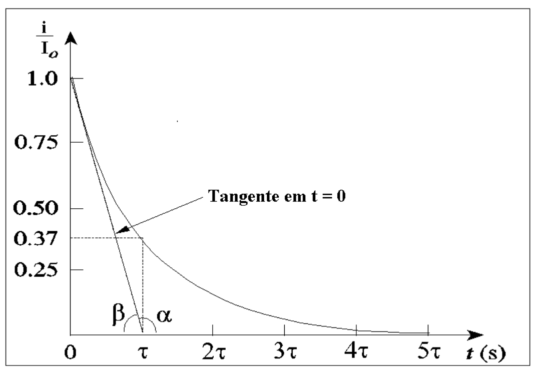

Figura 8.5: Gráfico do fator de decaimento da corrente em função do tempo no circuito RL sem fonte.

A tensão no indutor é:

$$v_L(t) = L\frac{di}{dt} = -RI_o e^{-R/L(t-t_o)} \tag{8.34}$$

O valor de τ seguindo a definição feita na seção 8.1 é:

$$\tau = \frac{L}{R}\ [\text{s}] \tag{8.35}$$

8.5 Resposta Completa para Circuito RL

Não é difícil estender os resultados obtidos para o circuito RL simples a um circuito contendo várias indutâncias e resistências. Basta que se obtenha o circuito equivalente com uma única indutância e uma única resistência. Quando isto não for possível, o circuito não é de primeira ordem, sendo que circuitos de segunda ordem serão estudados em outro capítulo.

Considere o circuito da Figura 8.6.

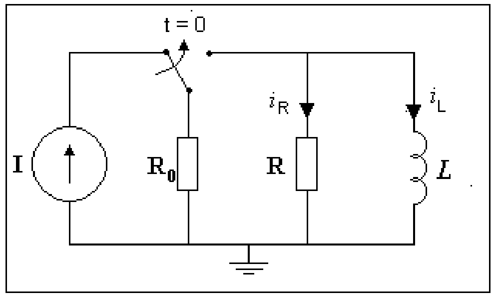

Figura 8.6: Circuito RL com fonte de corrente.

Aplicando LCK:

$$I = i_R(t) + i_L(t) \tag{8.36}$$

$$\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{R}{L} i_L(t) = \frac{RI}{L} \tag{8.37}$$

A resposta completa para esta equação será a soma de duas outras respostas, uma chamada resposta homogênea $i_{ch}(t)$ e outra chamada resposta particular $i_{cp}(t)$, ou seja:

$$i_L(t) = i_{ch}(t) + i_{cp}(t) \tag{8.38}$$

Para solucionar a equação 8.38 seguem-se passos semelhantes aos efetuados para o circuito RC, conforme descritos nos itens de ‘a’ a ‘c’ que se seguem.

a) *Solução homogênea:*
É a solução para equação homogênea, ou seja, a solução para a equação:

$$\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{R}{L} i_L(t) = 0 \tag{8.39}$$

Na análise de circuitos elétricos, encontra-se freqüentemente, como solução de uma equação diferencial de primeira ordem, uma função exponencial ou a soma de exponenciais do tipo:

$$i_{Lh}(t) = k_o e^{k_1 t} \tag{8.40}$$

Então, para resolução da equação diferencial 8.39, supõe-se que 8.40 é solução, assim:

$$\frac{d\left(k_o e^{k_1 t}\right)}{dt} + \frac{R}{L} k_o e^{k_1 t} = 0 \tag{8.41}$$

$$k_o k_1 e^{k_1 t} + \frac{R}{L} k_o e^{k_1 t} = 0 \tag{8.42}$$

$$k_1 = -\frac{R}{L} \tag{8.43}$$

E a equação para a solução homogênea fica da seguinte maneira:

$$i_{Lh}(t) = k_o e^{-Rt/L} \tag{8.44}$$

A outra constante k_o é determinada posteriormente, considerando a solução completa e a condição inicial dada.

b) Solução da equação particular.

A solução particular $i_{Lp}(t)$ é determinada a partir da função característica da fonte que excita o circuito e é uma combinação linear desta função e de suas derivadas, com cada termo multiplicado por uma constante a ser determinada.

Para o exemplo, tem-se uma fonte de excitação de corrente contínua e, portanto, a solução particular é:

$$\mathrm{i}_{\mathrm{Lp}}(t) = k_2 \tag{8.45}$$

Onde k_2 pode ser determinada substituindo $\mathrm{v}_{\mathrm{cp}}(t)$ na equação original (8.37), ou seja:

$$\frac{dk_2}{dt} + \frac{R}{L}k_2 = \frac{RI}{L} \tag{8.46}$$

$$0 + \frac{R}{L}k_2 = \frac{RI}{L} \tag{8.47}$$

$$k_2 = I \tag{8.48}$$

c) Solução completa.

$$i_L(t) = k_o e^{-Rt/L} + I \tag{8.49}$$

Exercícios

E8.1 Determine a tensão $v_c(t)$ e a corrente $i_c(t)$ no circuito da figura E8.1, considerando que $v_C(0) = V_0$ e $I \neq 0$.

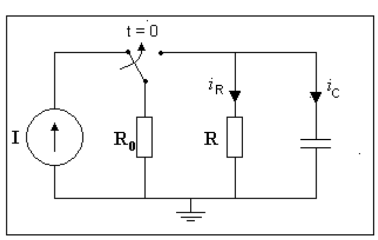

Figura E8.1: Circuito para exercício.

E8.2 Determine a tensão $v_c(t)$ para o circuito da figura E8.2. Considere que o capacitor possui uma tensão $v_C(0) = V_0$.

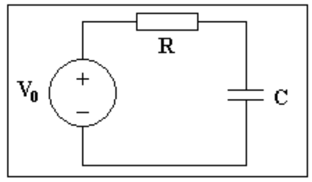

Figura E8.2: Circuito para exercício.

E8.3 A chave da figura E8.3 esteve na posição 'a' por um longo tempo, até que em t = 4s ela é movida para a posição 'b', permanecendo lá. Determine v(t) para t = 10s, sendo V_0 = 24V, $R_1 = 80\Omega$, $R_2 = 20\Omega$ e C_1 = 0,1F.

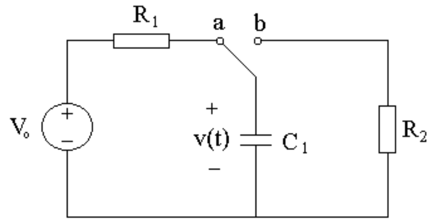

Figura E8.3: Circuito para exercício.

E8.4 Considere o circuito da figura E8.4. Determine $v_o(t)$ se i(0) = 2A e v(t) = 0. Considere $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 3\Omega$ e L_1 = 0,25H.

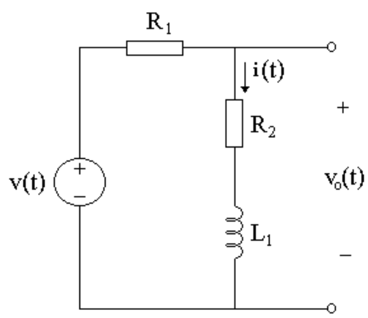

Figura E8.4: Circuito para exercício.

E8.5 Se a entrada em pulso da figura E8.5a for aplicada ao circuito da figura E8.5b, determine a resposta i(t). Considere $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 20\Omega$ e $L_1 = 2H$.

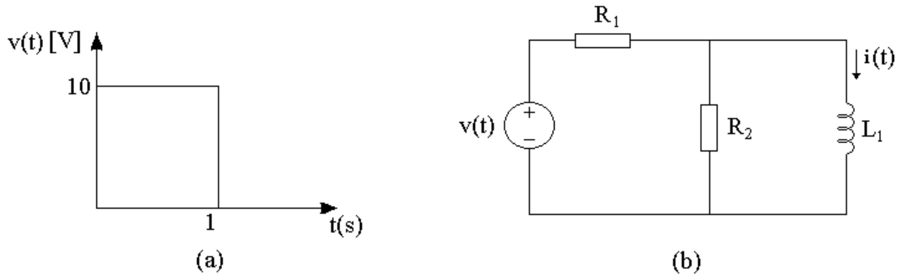

Figura E8.5: Circuito para exercício.

E8.6 Considere o circuito da figura E8.6. Calcule i(t) para t < 0 e t > 0. Considere V_0 = 80V, $R_1 = 40\Omega$, $R_2 = 30\Omega$, $R_3 = 50\Omega$ e $C_1 = 3F$ e que a chave S_1 abre contato em t = 0.

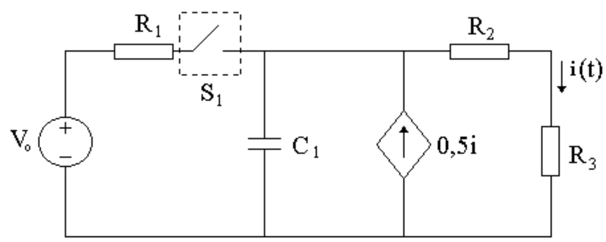

Figura E8.6: Circuito para exercício.

E8.7 Para o circuito mostrado na figura E8.7, determine v(t) para t > 0. Considere V_s = 20V, I_s = 2A, $R_1 = 12\Omega$, $R_2 = 20\Omega$, $R_3 = 6\Omega$, $R_4 = 5\Omega$, $L_1 = 0,5H$ e que a chave S_1 abre contato em t = 0.

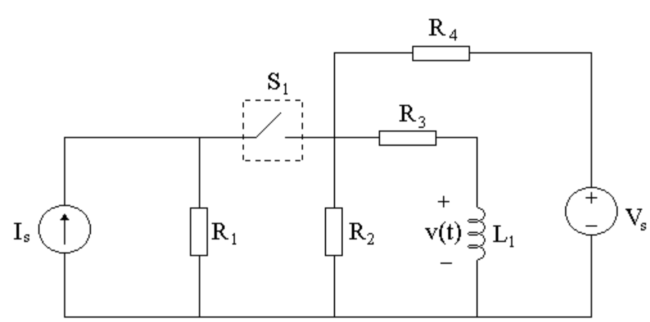

Figura E8.7: Circuito para exercício.

E8.8 Determine $i_x(t)$ e $v_x(t)$ no circuito da Figura E8.8. Considere que o capacitor esta inicialmente carregado com uma tensão de 15V.

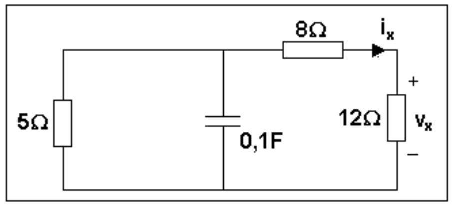

Figura E8.8: Circuito para exercício.

E8.9 Determine v(t) para o circuito da figura E8.9.

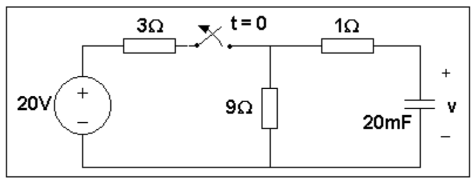

Figura E8.9: Circuito para exercício.

E8.10 Determine $i_l(t)$ no circuito da figura E8.10.

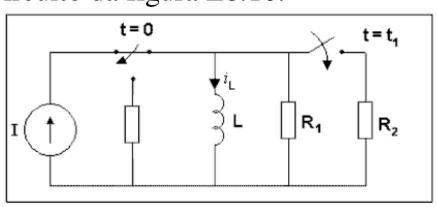

Figura E8.10: Circuito para exercício.

E8.11 Determine i(t) e $i_x(t)$ no circuito da Figura E8.11.

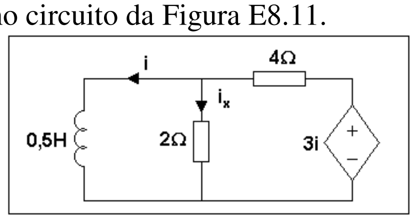

Figura E8.11: Circuito para exercício.

E8.12 Determine v(t) no circuito da figura E8.12.

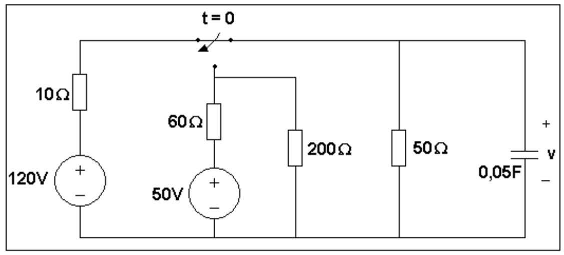

Figura E8.12: Circuito para exercício.

E8.13 O interruptor S_1 do circuito da figura E8.13 é fechado quando t = 0s. Apões 4ms abre-se S_2. Determinar a corrente no indutor nos intervalos 0 < t < 4ms.

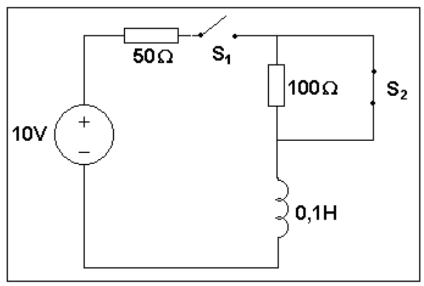

Figura E8.13: Circuito para exercício.

E8.14 Encontre v(t) para t > 0 para o circuito da Figura E8.14. Assuma que para t < 0 o circuito estava em regime permanente.

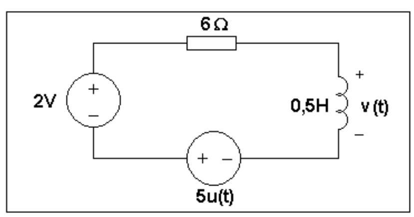

Figura E8.14: Circuito para exercício.

E8.15 No circuito da figura E8.15, fecha-se o interruptor na posição 1, no instante t = 0s, aplicando-se a fonte de 100V ao ramo RC. Quando t = 500ms, o interruptor é levado para a posição 2. Obter as equações da tensão nos intervalos e discutir o transitório (fazer gráfico v x t).

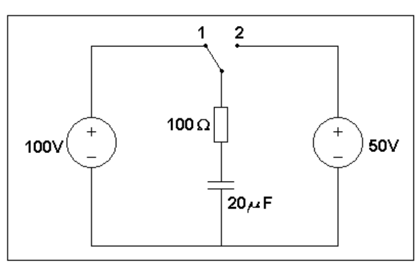

Figura E8.15: Circuito para exercício.

E8.16 Sabendo que a tensão no capacitor C1 e a tensão no capacitor C2 do circuito E8.16, são respectivamente V_o e 0 quando t = 0, determine $v_{c1}(t)$ e $v_{c2}(t)$.

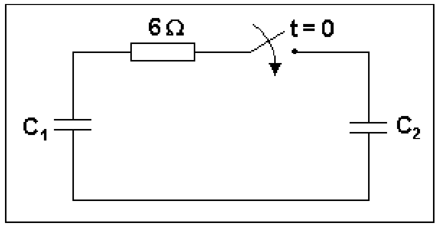

Figura E8.16: Circuito para exercício.

E8.17 Determine $v_o(t)$ no circuito da Figura E8.17.

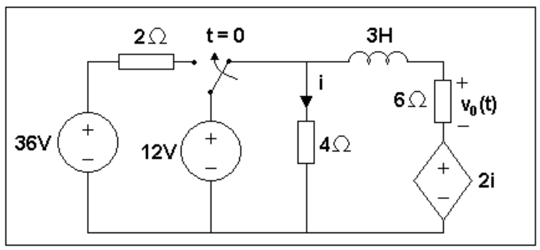

Figura E8.17: Circuito para exercício.

E8.18 A chave do circuito da figura E8.18, comuta de A para B e de B para A a cada segundo a partir de t = 0. Determinar a máxima e mínima corrente no indutor em regime permanente.

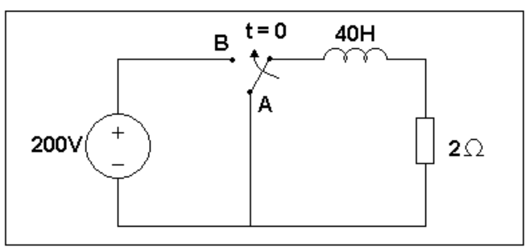

Figura E8.18: Circuito para exercício.