

# CAPÍTULO IX

## Análise de Circuitos RLC

### 9.1 Introdução

Neste capítulo, serão estudados os circuitos RLC's, ou seja, aqueles que possuem resistores, indutores e capacitores. Em geral, a análise desses circuitos resulta em equações diferenciais de ordens maiores ou iguais a dois. Porém, resolução de equações diferenciais de ordens superiores a dois está fora do objetivo deste manual e, portanto, dois é a ordem máxima aqui estudada.

Primeiramente, uma descrição analítica referente a equações de 2° ordem será abordada e posteriormente os circuitos serão analisados aplicando essa abordagem.

### 9.2 Resolução de Equações Diferenciais Lineares de 2° ordem

A forma geral das equações diferenciais lineares de 2° ordem é:

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = F(t) \quad (9.1)$$

Onde:

- $t$  é a variável independente;
- $y(t)$  é a variável dependente ou resposta;
- $F(t)$  é a função forçante (ou excitação).

Se:

- $F(t) \neq 0$  então a função é dita não homogênea
- $F(t) = 0$  então a função é dita *homogênea*

A equação homogênea deve possuir duas soluções diferentes e linearmente independentes  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$ . A solução mais geral da equação homogênea é:

$$y_H(t) = k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t) \quad (9.2)$$

Onde  $k_1$  e  $k_2$  são determinadas constantes tais que satisfazem as condições iniciais do circuito. Só podem ser determinadas após se encontrar a solução completa da equação diferencial.

A solução completa da equação diferencial não-homogênea será:

$$y(t) = y_H(t) + y_p(t) \quad (9.3)$$

Onde  $y_p(t)$  é qualquer solução da equação não homogênea e é chamada de *solução particular*.

## 9.2.1 Solução da equação homogênea

Para solucionar uma equação homogênea se pode utilizar a solução da equação de segunda ordem padrão (equação 9.4). Essa solução é deduzida a seguir.

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{dy(t)}{dt} + \omega_0^2 y(t) = 0 \quad (9.4)$$

Admitindo que  $y_H(t) = e^{st}$  seja uma solução da equação 9.4 então:

$$s^2 e^{st} + 2\alpha s e^{st} + \omega_0^2 e^{st} = 0 \quad (9.5)$$

$$e^{st} (s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2) = 0 \quad (9.6)$$

Para que essa equação seja satisfeita para todos os valores de t, é necessário que:

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0 \quad (9.7)$$

A equação 9.7 é chamada **equação característica** e é usualmente escrita por inspeção direta da equação homogênea padrão. Obviamente para 9.7:

$$s = \frac{-2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 4\omega_0^2}}{2} \quad (9.8)$$

$$s = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (9.9)$$

Pode-se observar que existem quatro casos possíveis de combinações para  $\alpha$  e  $\omega_0$ . Os quatro casos possíveis estão dispostos nos itens de 'a' a 'd' que se seguem:

- a)  **$\alpha > \omega_0$  : CASO SUPERAMORTECIDO** . No caso superamortecido as raízes são negativas ( $\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} < \alpha$ ) e a solução da equação homogênea é a seguinte:

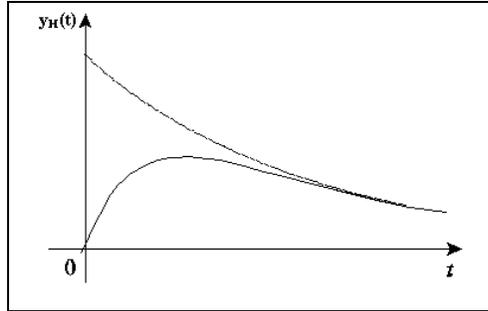
$$y_H(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} \quad (9.10)$$

Onde,  $s_1$  e  $s_2$  são, de acordo com a equação 9.9:

$$\text{➤ } s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$\text{➤ } s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Um esboço gráfico para o caso superamortecido é mostrado na figura 9.1.



**Figura 9.1:** Gráfico para o caso superamortecido.

- b)  **$\alpha = \omega_0$ : CASO CRITICAMENTE AMORTECIDO.** No caso de amortecimento crítico a solução mais geral  $y_H(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t}$ , não dará a solução para equação homogênea. Isto ocorre porque neste caso, pela equação 9.9,  $s_1 = s_2 = -\alpha$  e as exponenciais da solução geral podem ser somadas resultando em uma resposta homogênea como  $y_H(t) = k_3 e^{-\alpha t}$  que não torna possível satisfazer as condições iniciais de um problema.

Então, para resolver tal questão, faz-se necessário tomar a equação diferencial homogênea:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{dy(t)}{dt} + \omega_0^2 y(t) = 0 \quad (9.11)$$

Para  $\omega_0 = \alpha$ :

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{dy(t)}{dt} + \alpha^2 y(t) = 0 \quad (9.12)$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \alpha \frac{dy(t)}{dt} + \alpha \frac{dy(t)}{dt} + \alpha^2 y(t) = 0 \quad (9.13)$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{dy}{dt} + \alpha y \right] + \alpha \left[ \frac{dy}{dt} + \alpha y \right] = 0 \quad (9.14)$$

Chamando:

$$x = \frac{dy}{dt} + \alpha y \quad (9.15)$$

Então:

$$\frac{dx}{dt} + \alpha x = 0 \quad (9.16)$$

Supondo:

$$x = k_1 e^{k_2 t} \quad (9.17)$$

Resulta em:

$$k_2 k_1 e^{k_2 t} + \alpha k_1 e^{k_2 t} = 0 \quad (9.18)$$

Portanto:

$$k_2 = -\alpha \quad (9.19)$$

$$x = \frac{dy}{dt} + \alpha y = k_1 e^{-\alpha t} \quad (9.20)$$

Dividindo-se toda a equação 9.20 por  $e^{-\alpha t}$

$$e^{\alpha t} \frac{dy}{dt} + \alpha e^{\alpha t} y = k_1 \quad (9.21)$$

$$\frac{d}{dt} [y e^{\alpha t}] = k_1 \quad (9.22)$$

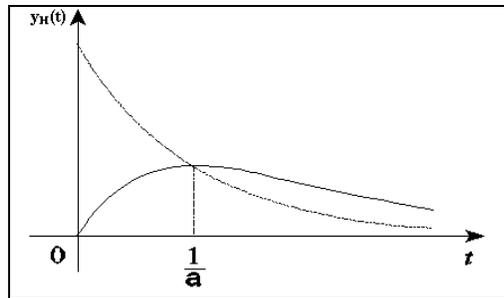
$$\int d[y(t) e^{\alpha t}] = \int k_1 dt \quad (9.23)$$

$$y e^{\alpha t} = k_1 t + k_2 \quad (9.24)$$

Desta maneira, obtém-se a forma desejada para a solução (combinação de duas soluções linearmente dependentes):

$$y = k_1 t e^{-\alpha t} + k_2 e^{-\alpha t} \quad (9.25)$$

Um esboço do gráfico para o caso de amortecimento crítico é mostrado na figura 9.2.



**Figura 9.2:** Gráfico para o caso de amortecimento crítico.

- c)  **$\alpha < \omega_0$ : CASO SUB-AMORTECIDO.** No caso de sub-amortecimento, os valores de  $s_1$  e  $s_2$  são valores complexos conjugados:

$$s = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \Rightarrow s = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad (9.26)$$

Chamando:

$$\triangleright \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

$$\triangleright s = -\alpha \pm j\omega_d$$

Então:

$$y_H(t) = k_1 e^{(-\alpha + j\omega_d)t} + k_2 e^{(-\alpha - j\omega_d)t} \quad (9.27)$$

$$y_H(t) = e^{-\alpha t} [k_1 e^{j\omega_d t} + k_2 e^{-j\omega_d t}] \quad (9.28)$$

Usando a identidade de Euler:

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \operatorname{sen} \theta \quad (9.29)$$

$$e^{-j\theta} = \cos \theta - j \operatorname{sen} \theta \quad (9.30)$$

$$y_H(t) = e^{-\alpha t} [k_1 (\cos \omega_d t + j \operatorname{sen} \omega_d t) + k_2 (\cos \omega_d t - j \operatorname{sen} \omega_d t)] \quad (9.31)$$

$$y_H(t) = e^{-\alpha t} [(k_1 + k_2) \cos \omega_d t + j(k_1 - k_2) \operatorname{sen} \omega_d t] \quad (9.32)$$

Como  $k_1$  e  $k_2$  são parcelas constantes, então, pode-se denominar:

$$A_1 = k_1 + k_2 \quad (9.33)$$

$$A_2 = k_1 - k_2$$

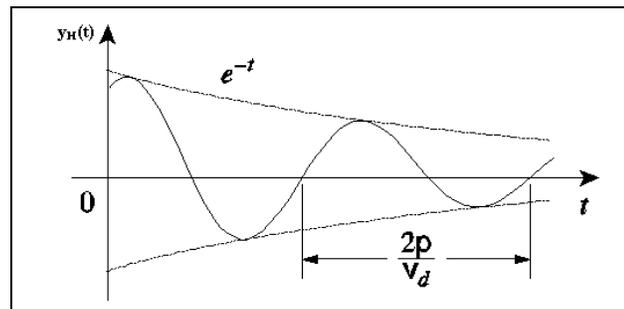
E a equação ficará da seguinte forma:

$$y_H(t) = e^{-\alpha t} [A_1 \cos \omega_d t + A_2 \operatorname{sen} \omega_d t] \quad (9.34)$$

ou

$$y_H(t) = B e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \phi)$$

O gráfico resultante da equação 9.34 tem a forma mostrada na figura 9.3.



**Figura 9.3:** Gráfico para o caso sub-amortecido.

d)  $\alpha = 0$  e  $\omega_0 = \omega$ : CASO SEM AMORTECIMENTO OU OSCILATÓRIO PURO. No caso sem amortecimento, os valores de  $s_1$  e  $s_2$  são imaginários puros:

$$s = j\omega \quad e \quad s = -j\omega \quad (9.35)$$

O que resulta na seguinte solução:

$$y_H(t) = k \cos(\omega_d t + \phi) \quad (9.36)$$

**Resumo:**

Equação homogênea padrão:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{dy(t)}{dt} + \omega_0^2 y(t) = 0 \quad (9.37)$$

Equação característica:

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_0 = 0 \quad (9.38)$$

Solução geral:

$$s = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (9.39)$$

Onde:

- $\alpha$  = frequência neperiana ou fator de amortecimento expresso em nepers por segundo (Np/s);
- $\omega_0$  = frequência de ressonância ou frequência natural;
- $s$  = frequência complexa.

a)  $\alpha > \omega_0$ : SUPER AMORTECIDO

$$y_H(t) = k_1 e^{s_1 t} + k_2 e^{s_2 t} \quad (9.40)$$

Onde:

- $s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$
- $s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$

b)  $\alpha = \omega_0$ : CRITICAMENTE AMORTECIDO

$$y_H(t) = k_1 t e^{-\alpha t} + k_2 e^{-\alpha t} \quad (9.41)$$

c)  $\alpha < \omega_0$ : SUBAMORTECIDO

$$y_H(t) = k_1 e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \phi) \quad (9.42)$$

Onde:

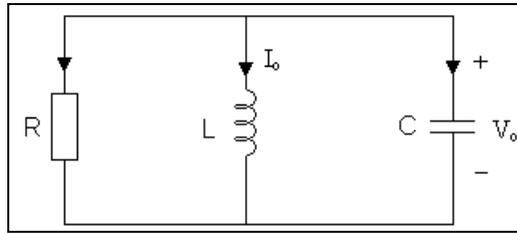
- $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$

d)  $\alpha = 0$ ,  $\omega_d = \omega_0$ : SEM AMORTECIMENTO

$$y_H(t) = k \cos(\omega_d t + \phi) \quad (9.43)$$

### 9.3 Circuito RLC paralelo sem fonte

Considera-se o circuito RLC paralelo mostrado na Figura 9.4.



**Figura 9.4:** Circuito RLC paralelo sem fonte.

Considerando a corrente  $I_0$  inicial no indutor e a tensão  $V_0$  inicial no capacitor:

$$I_0 = i(0) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 v(t) dt \quad (9.44)$$

$$v(0) = V_0 \quad (9.45)$$

Como os três elementos estão em paralelo, eles possuem a mesma tensão. De acordo com a convenção de sinal passivo, a corrente deve entrar em cada elemento, ou seja, a corrente que atravessa cada elemento está deixando o nó superior. Portanto, aplicando a LCK ao nó superior, tem-se:

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v dt + C \frac{dv}{dt} = 0 \quad (9.46)$$

Derivando essa equação com relação a  $t$  e dividindo por  $C$ , tem-se:

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC} v = 0 \quad (9.47)$$

Comparando a equação 9.47 com a equação padrão:

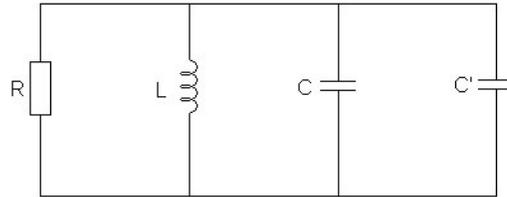
$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{dy(t)}{dt} + \omega_0^2 y(t) = 0 \quad (9.48)$$

Tem-se para circuitos RLC paralelo:

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \quad (9.49)$$

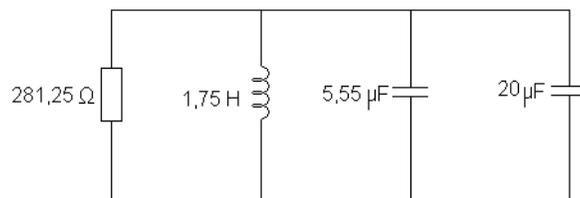
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (9.50)$$

**Exemplo 9.1:** Um circuito RLC paralelo tem um coeficiente de amortecimento exponencial de  $500 \text{ s}^{-1}$  e uma frequência angular de ressonância é de  $400 \text{ rad/s}$ . Experimentalmente é determinado que a adição de um capacitor de  $2 \mu\text{F}$ , em paralelo com o circuito, produz amortecimento crítico. Se a tensão no circuito amortecido criticamente é  $v(t)$  e  $v(0) = 20 \text{ V}$ , com  $\frac{dv(t)}{dt}$  em  $t = 0$  de  $2000 \text{ V/s}$ , determine  $v(t)$  para  $t > 0$ .



**Figura 9.5:** Circuito para exemplo 9.1, RLC paralelo.

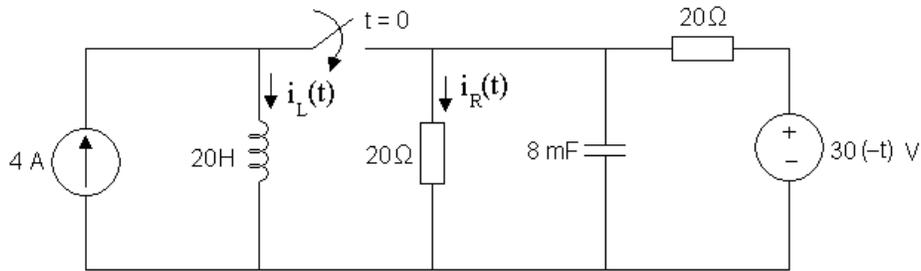
**Exemplo 9.2:** Determine  $v(t)$  para o exemplo 9.1 considerando a adição de mais um capacitor de  $20 \mu\text{F}$  em paralelo como mostra a figura 9.6.



**Figura 9.6:** Circuito para exemplo 8.2, RLC paralelo.

### 9.3.1 Resposta de um circuito RLC paralelo ao degrau

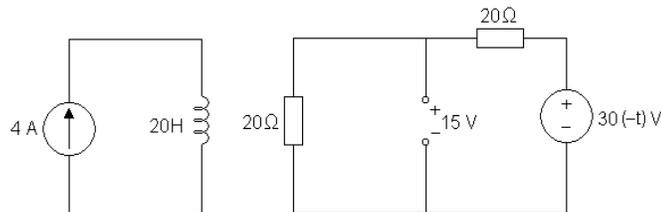
**Exemplo 9.3:** Dado o circuito da figura 9.7 determine  $i_L(t)$  e  $i_R(t)$  para  $t > 0$ .



**Figura 9.7:** Circuito para o exemplo 9.3.

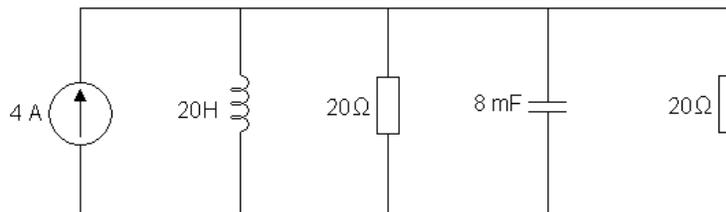
*Solução:*

a) Quando  $t < 0$ :



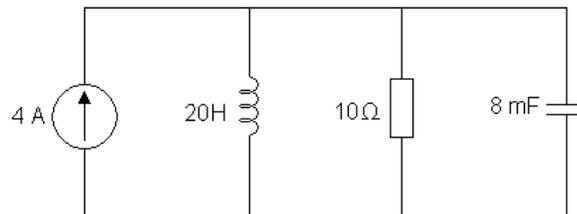
**Figura 9.8:** circuito para  $t < 0$ ; exemplo 2.

b) Quando  $t > 0$ :



**Figura 9.9:** circuito para  $t > 0$ ; exemplo 2.

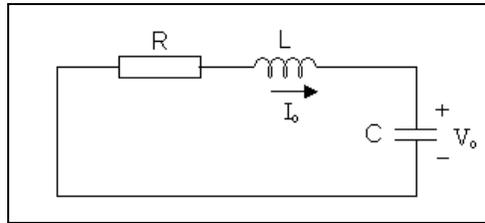
Este circuito é equivalente ao circuito da figura 9.10.



**Figura 9.10:** Circuito para  $t > 0$  redesenhado; exemplo 3.

## 9.4 Circuito RLC Série sem Fonte

Considera-se o circuito RLC série mostrado na Figura 9.11.



**Figura 9.11:** Circuito RLC série.

Considerando a corrente inicial  $I_0$  no indutor e a tensão inicial  $V_0$  no capacitor:

$$V_0 = v(0) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i dt \quad (9.51)$$

$$i(0) = I_0 \quad (9.52)$$

Aplicando a LTK na malha da Figura 9.11:

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt = 0 \quad (9.53)$$

Derivando esta equação em relação a  $t$  e dividindo por  $L$ , tem-se:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0 \quad (9.54)$$

Comparando esta equação com a equação padrão:

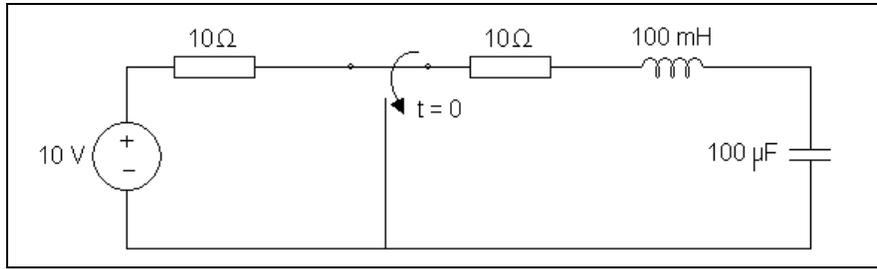
$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{dy(t)}{dt} + \omega_0^2 y(t) = 0 \quad (9.55)$$

Portanto, para circuitos RLC série, tem-se:

$$\alpha = \frac{R}{2L} \quad (9.56)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (9.57)$$

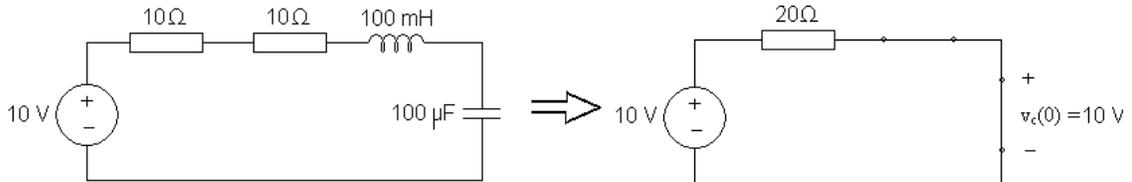
**Exemplo 8.4:** Considera-se o circuito RLC série apresentado na figura 9.12. No instante  $t = 0$  ocorre o chaveamento do interruptor. Determine a corrente através do indutor  $L$ .



**Figura 9.12:** Circuito para exemplo 3, RLC série.

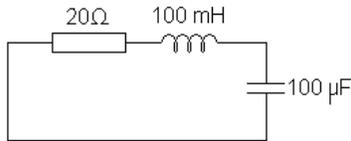
*Solução:*

a) Quando  $t < 0$ :



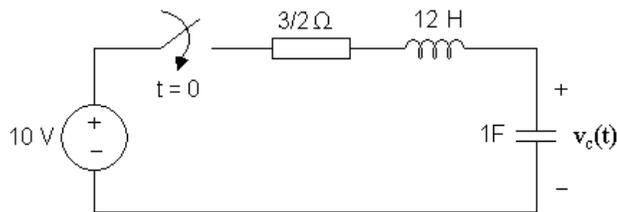
**Figura 9.13:** Circuito para  $t < 0$ .

b) Quando  $t > 0$ :



**Figura 9.14:** Circuito para  $t > 0$

**Exemplo 9.5:** Achar a resposta  $v_c(t)$  do circuito abaixo:



**Figura 9.15:** Circuito para exemplo 4, RLC série.

## Exercícios

E9.1 Para o circuito da figura E9.1, calcule o valor de  $R$  necessário para uma resposta com amortecimento crítico. Considere  $R_1 = 60\Omega$ ,  $C_1 = 0.01F$  e  $L_1 = 4H$ .

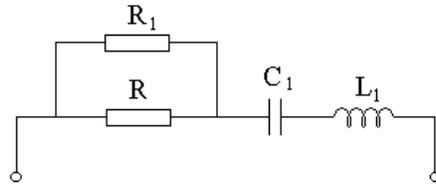


Figura E9.1: Circuito para exercício.

E9.2 Para o circuito da figura E9.2, qual valor de  $C$  é necessário para uma resposta subamortecida com fator de amortecimento unitário ( $\alpha = 1$ ). Considere  $R_1 = 10\Omega$ ,  $C_1 = 10mF$  e  $L_1 = 0,5H$ .

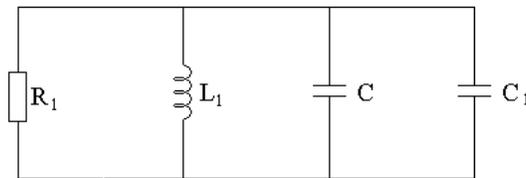


Figura E9.2: Circuito para exercício.

E9.3 Para o circuito da figura E9.3, calcule  $i(t)$  para  $t > 0$ . Considere  $R_1 = 5\Omega$ ,  $R_2 = 10\Omega$  e  $R_3 = 10\Omega$ ,  $L_1 = 3/4H$ ,  $C_1 = 1/3H$  e  $I_s = 2A$ .

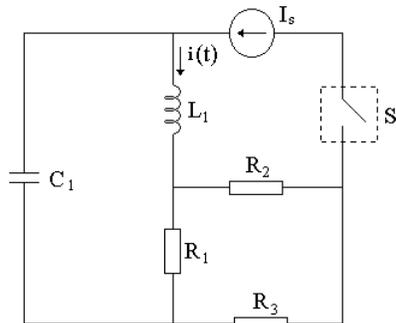


Figura E9.3: Circuito para exercício.

E9.4 A chave do circuito da figura E9.4 foi movida da posição 'a' para 'b' em  $t = 0$ . Determine  $i(t)$  para  $t > 0$ . Considere  $R_1 = 6\Omega$ ,  $R_2 = 2\Omega$  e  $R_3 = 14\Omega$ ,  $L_1 = 2H$ ,  $C_1 = 0.02H$  e  $I_s = 4A$  e  $V_s = 12V$ .

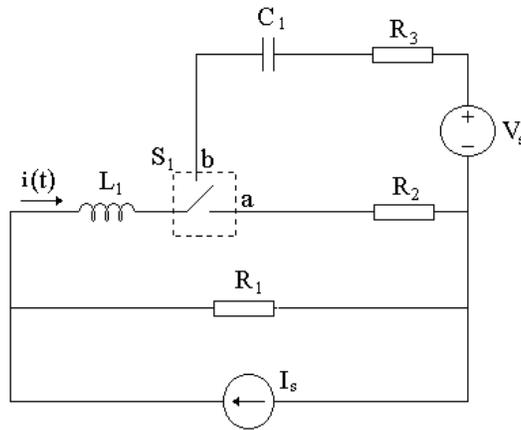


Figura E9.4: Circuito para exercício.

E9.5 Dado o circuito da figura E9.5, determine  $i(t)$  e  $v(t)$  para  $t > 0$ . Considere  $R_1 = 1\Omega$ ,  $R_2 = 2\Omega$ ,  $L_1 = 1H$ ,  $C_1 = 0.25H$  e  $V_s = 6V$ . A chave  $S_1$  fecha contato em  $t = 0$ .

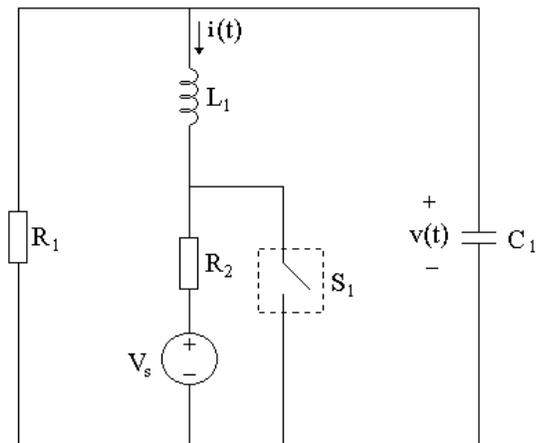


Figura E9.5: Circuito para exercício.

E9.6 Determine  $i(t)$  para  $t > 0$  no circuito da figura E9.6. Considere  $R_1 = 4\Omega$ ,  $R_2 = 5\Omega$ ,  $L_1 = 5H$ ,  $C_1 = 1/20H$ ,  $V_s = 12V$  e  $I_s = 3A$ . A chave  $S_1$  abre contato em  $t = 0$ .

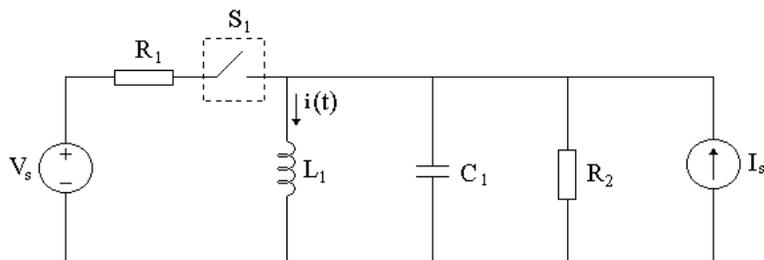


Figura E9.6: Circuito para exercício.

E9.7 Calcule  $i(t)$  para  $t > 0$  no circuito da figura E9.7. Considere  $R_1 = 4\Omega$ ,  $L_1 = 0,25H$ ,  $C_1 = 1/16H$  e  $V_s = 20V$ . A chave  $S_1$  fecha contato em  $t = 0$ .

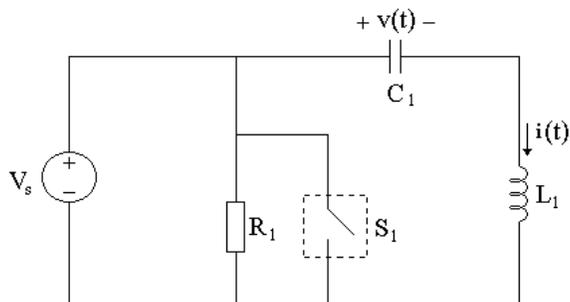


Figura E9.7: Circuito para exercício.

E9.8 Para o circuito da figura E9.8, obtenha  $i(t)$  para  $t > 0$ . Considere  $R_1 = R_2 = R_3 = 6\Omega$ ,  $L_1 = 0,5H$ ,  $C_1 = 1/8H$ ,  $V_{s1} = 10V$  e  $V_{s2} = 30V$ . A chave  $S_1$  abre contato em  $t = 0$ .

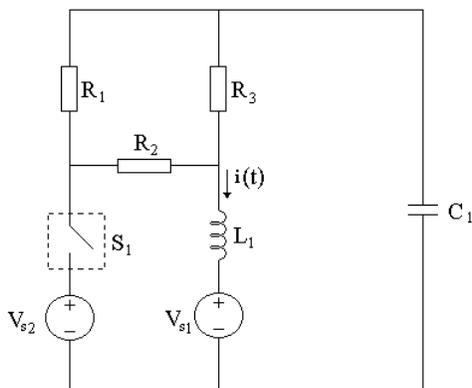


Figura E9.8: Circuito para exercício.

E9.9 Se a chave da figura E9.9 esteve fechada por um longo tempo e é aberta em  $t = 0$  e,  $V_s = 16V$ ,  $R_1 = 12\Omega$ ,  $R_2 = 8\Omega$ ,  $C_1 = 1/36F$  e  $L_1 = 1H$ , determine:

- A equação característica deste circuito;
- $i_x$  e  $v_R$  para  $t > 0$ .

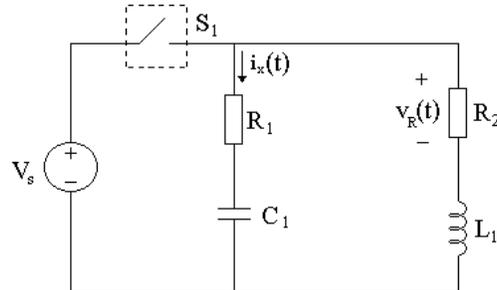


Figura E9.9: Circuito para exercício.

E9.10 O disparador do *airbag* de um automóvel é modelado pelo circuito da figura 9.10. Determine o tempo necessário para que a tensão do disparador atinja o seu primeiro pico após a chave ser movida de A para B. Considere  $R = 3\Omega$ ,  $C = 1/30 F$  e  $L = 60mH$ .

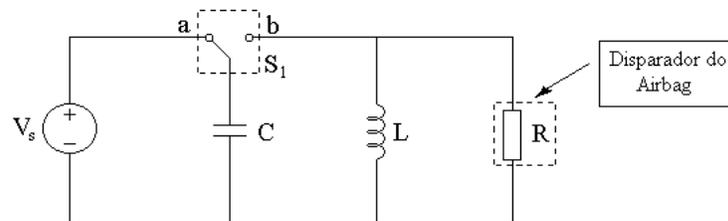


Figura E9.10: Circuito para exercício.

E9.11 Um oscilograma pode ser adequadamente modelado por um sistema de segunda ordem na forma de um circuito RLC paralelo. Deseja-se uma tensão subamortecida em um resistor de  $200\Omega$ . Se a frequência amortecida é de  $4kHz$  e a constante de tempo do envelope é  $0,25s$ , determine os valores necessários para  $L$  e  $C$ .